Wittgenstein's Writings

Philosophische Grammatik II

Philosophische Grammatik – II

Ludwig
Wittgenstein

Ms-112 47v[6] & 48r[1]

Es ist eine sehr wichtige Bemerkung daß das c in A nicht dieselbe Variable ist wie das c in β & γ. Ich habe also den Beweis nicht ganz richtig hingeschrieben, und zwar in einer für uns sehr wichtigen Beziehung. In A könnten wir statt c n setzen, dagegen sind die c in β & γ identisch. Es ist aber auch noch das zu fragen: kann ich nun aus A ableiten, daß i + (k + c) = (i + k) + c? und wenn ja, warum dann nicht gleich aus B? Also ist auch a & b in A nicht identisch mit a & b in α, β & γ?

Ms-112 48r[5] & 48v[1]

Daß die Variable c in B nicht identisch mit c in A ist sieht man klar wenn man statt ihrer eine Zahl einsetzt. Dann lautet B etwa:

αβγ||
4+(5+1)=(4+5)+114+(5+(6+1))=(4+(5+6))+1(4+5)+(6+1)=(4+5)+(6+
aber dem entspricht nun nicht etwa die Gleichung A_W: 4 + (5 + 6) = (4 + 5) + 6!

Ms-112 49v[6] & 50r[1]

Darin daß das c in B nicht identisch ist mit dem c in A oder: darin daß man die beiden Stellen mit verschiedenen Buchstaben besetzen kann, ist – glaube ich – ausgedrückt, was den Induktionsbeweis von einem Beweis von A unterscheidet.

Ms-112 50v[4]

Heißt was ich oben geschrieben habe etwas anderes als das der Schein des algebraischen Beweises von A dadurch entsteht, daß wir in den Gleichungen A die gleichen Variablen a, b, c wiederzufinden meinen wie in α, β, γ & daher A für das Resultat einer Transformation jener Gleichungen ansehen. (Während ich ja in Wirklichkeit dem Schriftzeichen α β γ eine ganz neue Auffassung gebe, worin es liegt, daß das c in β & γ nicht in derselben Weise als Variable gebraucht wird, wie a & b. So daß es also ein Ausdruck dieser andern Auffassung von B ist, daß in A das c nicht vorkommt.)

Ms-112 50v[5] & 51r[1]

Was ich von dem Wechsel in der Auffassung von α β γ gesagt habe könnte ich jetzt so sagen: β & γ entstehen mit Hilfe von α genau so wie etwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ mit Hilfe der algebraischen Grundgleichungen. Sind sie aber so abgeleitet so betrachten wir den Komplex α β γ auf eine neue Weise, indem wir der Variablen c eine andere Funktion geben als a und b. (c wird das Loch durch das der Zahlenstrom fließen muß.)

Ts-213 293r[1]

1 *****Logischer Schluß***.**

Ts-213 294r[1]

Wissen wir, daß p aus q folgt, weil wir die Sätze verstehen? Geht das Folgen aus einem Sinn hervor?

Ts-213 294r[2]

p & q = p heißt “q folgt aus p”.

Ts-213 294r[3] $(\exists x).fx \vee fa = (\exists x).fx$, $(\exists x).fx \;\&\; fa = fa$ Wie weiß ich das? (denn das Obere habe ich sozusagen bewiesen). Man möchte etwa sagen: “ich verstehe ‘$(\exists x).fx$’ eben”. (Ein herrliches Beispiel dessen, was ‘verstehen’ heißt.) Ich könnte aber ebensogut fragen “wie weiß ich, daß $(\exists x).fx$ aus fa folgt” und antworten: “weil ich ‘$(\exists x).fx$’ verstehe”. Wie weiß ich aber wirklich, daß es folgt? – *Weil ich so kalkuliere*.

Ts-213 294r[4] & 295r[1] Wie weiß ich, daß $(\exists x).fx$ aus fa folgt? Sehe ich quasi hinter das Zeichen “$(\exists x).fx$”, und sehe den Sinn, der hinter ihm steht und daraus , daß er aus fa folgt? ist *das* das Verstehen? Nein, jene Gleichung drückt einen Teil des Verstehens aus (das so ausgebreitet vor mir liegt). Denke an die Auffassung des Verstehens, das ursprünglich *mit einem Schlag erfaßbar*, *erst* so ausgebreitet werden kann. Wenn ich sage “ich weiß, daß $(\exists x)$. fx folgt, weil ich es verstehe”, so hieße das, daß ich, es verstehend, etwas *Anderes* sehe, als das gegebene Zeichen, gleichsam eine *Definition* des Zeichens, aus der das Folgen hervorgeht.

Ts-213 295r[2] Wird nicht vielmehr die Abhängigkeit durch die Gleichung hergestellt und festgesetzt? Denn eine verborgene Abhängigkeit gibt es eben nicht.

Ts-213 295r[3] $(\exists x).fx$WWFF | faWFWF Aber, meinte ich, muß also nicht $(\exists x).fx$ eine Wahrheitsfunktion von fa sein, damit das möglich ist? Damit diese Abhängigkeit möglich ist?

Ts-213 295r[4] Ja sagt denn eben $(\exists x).fx \vee fa = (\exists x).fx$ nicht, daß fa schon in $(\exists x).fx$ enthalten ist? Zeigt es nicht die Abhängigkeit des fa vom $(\exists x).fx$? Nein, außer, wenn $(\exists x).fx$ als logische Summe *definiert* ist (mit einem Summanden fa). – Ist das der Fall, so ist $(\exists x).fx$ (*nichts als*) eine Abkürzung.

Ts-213 295r[5] Einen verborgenen Zusammenhang gibt es in der Logik nicht.

Ts-213 295r[6] Hinter die Regeln kann man nicht dringen, weil es kein Dahinter gibt.

Ts-213 295r[7] & 296r[1] fE & fa = fa Kann man sagen: das ist nur möglich, wenn fE aus fa folgt; oder muß man sagen: das bestimmt, daß fE aus fa folgt?

Ts-213 296r[2] Wenn das erste, so muß es vermöge der Struktur folgen, etwa indem fE durch eine Definition so bestimmt ist, daß es die *entsprechende* Struktur hat. Aber kann denn wirklich das folgen, gleichsam aus der sichtbaren Struktur der Zeichen hervorgehen, wie ein physikalisches Verhalten aus einer physikalischen Eigenschaft, und braucht etwa nicht vielmehr immer solche *Bestimmungen*, wie die Gleichung fE & fa = fa? Ist es etwa den $p \vee q$ anzusehen, daß es aus p folgt, oder auch nur den Regeln, welche Russell für die Wahrheitsfunktionen gibt?

Ts-213 296r[3] Und warum sollte auch die Regel fE & fa = fa aus einer andern Regel hervorgehen und nicht die primäre Regel sein?

Ts-213 296r[4] Denn was soll es heißen “fE muß doch fa in irgendeiner Weise enthalten”? Es enthält es eben nicht, insofern wir mit fE arbeiten können, ohne fa zu erwähnen. Wohl, aber, insofern eben die Regel fE & fa = fa gilt.

Ts-213 296r[5] Die *Meinung* ist nämlich, daß fE & fa = fa nur vermöge einer Definition von fE gelten kann.

Ts-213 296r[6] Und zwar – glaube ich – darum, weil es sonst den falschen Anschein hat, als würde nachträglich noch eine Bestimmung über fE getroffen, nachdem es schon in die Sprache eingeführt *sei*. Es wird aber tatsächlich keine Bestimmung einer künftigen Erfahrung überlassen.

Ts-213 296r[7] & 297r[1] Und die Definition des fE aus ‘allen Einzelfällen’ ist ja *ebenso* unmöglich, wie die Aufzählung *aller* Regeln von der Form fE & fx = fx. Ja, die Einzelgleichungen fE & fx = fx sind eben gerade ein Ausdruck dieser Unmöglichkeit.

Ts-213 297r[2] Wenn man gefragt wird: ist es aber nun auch sicher, daß ein anderer Kalkül als dieser nicht gebraucht wird, so muß man sagen: Wenn das heißt “gebrauchen wir nicht in unserer *tatsächlichen* Sprache noch andere Kalküle”, so kann ich nur antworten “ich weiß (jetzt) keine anderen (so, wie wenn jemand fragte “sind das alle Kalküle der (gegenwärtigen) Mathematik”, ich sagen könnte “ich erinnere mich keiner anderen, aber ich kann etwa noch genauer nachlesen). Die Frage kann aber nicht heißen “kann kein anderer Kalkül gebraucht werden?” Denn wie sollte ich diese Frage beantworten? Ein Kalkül ist ja da, indem man ihn beschreibt.

Ts-213 297r[3] Kann man sagen: 'Kalkül' ist kein mathematischer Begriff?

Ts-213 297r[4] & 298r[1] Wenn ich sagte: "ob p aus q folgt, muß aus p und q allein zu ersehen sein"; so müßte es heißen: daß p aus q folgt, ist eine Bestimmung, die den Sinn von p und q bestimmt; nicht etwas, das, von dem Sinn dieser beiden ausgesagt, wahr ist. Daher kann man (*sehr*) wohl die Schlußregeln angeben, gibt damit aber Regeln für die Benützung der Schriftzeichen an, die deren Sinn erst bestimmen; was nichts andres heißt, als daß diese Regeln willkürlich festzusetzen sind; d.h. nicht von der Wirklichkeit abzulesen, wie eine Beschreibung. Denn, wenn ich sage, die Regeln sind willkürlich, so meine ich, sie sind nicht von der Wirklichkeit determiniert, wie die Beschreibung dieser Wirklichkeit. Und das heißt: Es ist Unsinn, von ihnen zu sagen, sie stimmen mit der Wirklichkeit überein; die Regeln über die Wörter "blau", "rot", etwa, stimmten mit den Tatsachen, die diese Farben betreffen, überein, etc..

Ts-213 298r[2] Die Gleichung p & q = p zeigt eigentlich den Zusammenhang des Folgens und der Wahrheitsfunktionen.

Ts-213 299r[1] 2 *"Wenn p aus q folgt, so muß p in q schon mitgedacht sein".*

Ts-213 299r[2] Bedenke, daß aus dem allgemeinen Satz eine logische Summe von, sagen wir, hundert Summanden folgen könnte, an die wir doch bestimmt nicht gedacht haben, als wir den allgemeinen Satz aussprachen. Können wir *nicht* dennoch sagen, daß sie aus ihm folgt?

Ts-213 299r[3] & 300r[1] “Was aus einem Gedanken folgt, muß in ihm mitgedacht werden. Denn an einem Gedanken ist nichts, was wir nicht wissen, während wir ihn denken. Er ist keine Maschine, deren Untersuchung Ungeahntes zu Tage fördern kann, oder eine Maschine, die etwas leisten kann, was man ihr *zuerst* nicht ansieht. D.h. er wirkt eben *logisch* überhaupt nicht als Maschine. Als Gedanke liegt in ihm nicht mehr, als hineingelegt würde. Als Maschine, d.h. kausal, wäre ihm alles zuzutrauen; logisch ergibt er nur, was wir *mit ihm gemeint haben*.” Wenn ich sage, das Viereck ist ganz weiß, so denke ich nicht an zehn kleinere, in ihm enthaltene Rechtecke, die weiß sind; und an “*alle*” in ihm enthaltene Rechtecke oder Flecken, kann ich nicht denken. Ebenso denke ich im Satz “er ist im Zimmer” nicht an hundert mögliche Stellungen, die er einnehmen kann, und gewiß nicht an *alle*.

Ts-213 300r[2] “Wo immer Du die Scheibe triffst, hast Du gewonnen. – Du hast sie rechts oben getroffen, also ...”

Ts-213 300r[3] & 301r[1] Auf den ersten Blick *scheint es zwei Arten der Deduktion zu geben*: in der einen ist in der Prämisse von dem die Rede, wovon die Konklusion handelt, in der andern nicht. Von der ersten Art ist der Schluß von p & q auf q. Von der anderen der Schluß: der ganze Stab ist weiß, also ist auch das mittlere Drittel weiß. In dieser Konklusion wird von Grenzen gesprochen, von denen im ersten Satz nicht die Rede war. (Das ist verdächtig.) Oder wenn ich sage: "wo immer in diesem Kreise Du die Scheibe triffst, wirst Du den Preis gewinnen" und dann "Du hast sie hier getroffen, also ...", so war dieser Ort im ersten Satz nicht vorausgesehen. Die Scheibe mit dem Einschuß hat zu der Scheibe, wie ich sie früher gesehen habe, eine bestimmte interne Beziehung und darin *besteht* es, daß das Loch hier unter die vorausgesehene allgemeine Möglichkeit fällt. Aber es selbst war nicht vorausgesehen und es kam in dem ersten Bild nicht vor. Oder mußte doch nicht darin vorkommen. Denn selbst angenommen, ich hätte dabei an tausend bestimmte Möglichkeiten gedacht, so hätte es zum mindesten geschehen können, daß die ausgelassen wurde, die später eintraf. Und wäre das Voraussehen dieser Möglichkeit wesentlich gewesen, so hätte die Prämisse durch das Übersehen dieser einen Möglichkeit den unrechten Sinn bekommen und die Konklusion würde nun nicht aus ihr folgen. Anderseits wird dem Satz "wohin immer Du in diesem Kreis triffst ..." nichts *hinzugefügt*, wenn man sagt: "wohin immer Du in diesem Kreis triffst, und wenn Du insbesondere den schwarzen Punkt triffst ...". Aber, war der schwarze Punkt schon da, als man den ersten Satz aussprach, so war er natürlich mitgemeint; war er aber nicht da, so hat sich durch ihn eben der Sinn des Satzes geändert.

Ts-213 301r[2] Was soll es aber dann heißen, zu sagen: wenn ein Satz aus dem andern folgt, so muß der erste im zweiten mitgedacht sein, da es doch nicht nötig ist, im Satz "ich bin 170 cm hoch" auch nur einen einzigen der aus ihm folgenden negativen Längenangaben mitzudenken.

Ts-213 301r[3] "Das Kreuz liegt *so* auf der Geraden: ⊢—x————⊣" – "Es liegt *also* zwischen den Strichen ..." "Es hat hier 16½°". – "Es hat also jedenfalls mehr als 15°." Wenn man sich übrigens wundert, daß dieser Satz aus jenem folgt, obwohl man doch bei jenem gar nicht an ihn dachte, so denke man nur daran, daß $p \vee q$ aus p folgt, und ich denke doch gewiß nicht alle Sätze $p \vee x$ wenn ich p denke.

Ts-213 301r[4] Die ganze Idee, daß man bei dem Satz, aus dem ein anderer folgt, diesen denken muß, beruht auf einer falschen, und psychologisierenden, Auffassung. Wir haben uns ja nur um das zu kümmern, was in den Zeichen und (*ihren*) Regeln liegt.

Ts-213 301r[5] & 302r[1]

Wenn das Kriterium dafür, daß p aus q folgt, darin besteht, daß man "beim Denken von q p mitdenkt", so denkt man wohl beim Denken des Satzes "in dieser Kiste sind 10^5 Sandkörner" die 10^5 Sätze: "in dieser Kiste ist *ein* Sandkorn", "...2 Sandkörner", etc., etc.? Was ist denn hier das Kriterium des Mitdenkens! Und wie ist es mit einem Satz: "ein Fleck (F) liegt zwischen den Grenzen AA? Folgt aus ihm nicht, daß F auch zwischen BB und CC liegt, u.s.w.? Folgen hier aus *einem* Satz unendlich viele? und ist er also unendlich vielsagend? – Aus dem Satz "ein Fleck liegt zwischen den Grenzen AA" folgt jeder Satz von der Art "ein Fleck liegt zwischen den Grenzen BB", den ich hinschreibe – und so viele, als ich hinschreibe. Wie aus p soviele Sätze der Form p ⌄ x folgen, als ich hinschreibe (oder ausspreche, etc.). (Der Induktionsbeweis beweist soviele Sätze von der Form ... als ich hinschreibe.)

Ts-213 303r[1]

3 *Der Fall: unendlich viele Sätze folgen aus einem.*

Ts-213 303r[2]

Ist es unmöglich, daß aus einem Satz unendlich viele Sätze folgen, – in dem Sinn nämlich, daß nach einer Regel immer neue Sätze aus dem einen gebildet werden könnten, ad infinitum?

Ts-213 303r[3] Angenommen, die ersten tausend Sätze dieser *Reihe* schrieben wir in Konjunktion an. Mußte der Sinn dieses Produktes dem Sinne des ursprünglichen Satzes nicht näherkommen, als das Produkt der ersten hundert Sätze? Müßte man nicht eine immer bessere Annäherung an den ersten Satz bekommen, je mehr man das Produkt ausdehnte und würde das nicht zeigen, daß aus dem Satz nicht unendlich viele andere folgen können, da ich schon nicht mehr im Stande bin, das Produkt aus 10^{10} Gliedern zu verstehen und doch den Satz verstanden habe, dem das Produkt aus 10^{100} Gliedern noch näher kommt als das von 10^{10} Gliedern?

Ts-213 303r[4] Man denkt sich wohl, der allgemeine Satz ist eine abgekürzte Ausdrucksweise des Produkts. Aber was ist am Produkt abzukürzen, es enthält ja nichts Überflüssiges.

Ts-213 304r[1] Wenn man ein Beispiel braucht dafür, daß unendlich viele Sätze aus *einem* folgen, so wäre vielleicht das Einfachste das, daß aus "a ist rot" die Negation aller Sätze folgt, die a eine andere Farbe zuschreiben. Diese negativen Sätze werden gewiß in dem einen nicht mitgedacht. Man könnte natürlich sagen: wir unterscheiden doch nicht unendlich viele Farbtöne; aber die Frage ist: hat die Anzahl der Farbtöne, die wir unterscheiden, überhaupt etwas mit der *Komplikation* jenes *ersten* Satzes zu tun; ist er mehr oder weniger komplex, je nachdem wir mehr oder weniger Farbtöne unterscheiden? Müßte man nun nicht so sagen: Ein Satz folgt erst aus *ihm*, wenn er da ist. Erst wenn wir zehn Sätze gebildet haben, die aus dem ersten folgen, folgen zehn Sätze aus ihm.

Ts-213 304r[2] Ich möchte sagen, ein Satz folgt erst dann aus dem anderen, wenn er mit ihm konfrontiert wird. Jenes "u.s.w. ad infinitum" bezieht sich nur auf die Möglichkeit der Bildung von Sätzen, die aus dem ersten folgen, *ergibt* aber keine Zahl solcher Sätze. Könnte ich also einfach sagen: Unendlich viele Sätze folgen *darum* nicht aus einem Satz, weil es unmöglich ist, unendlich viele Sätze hinzuschreiben (d.h. ein Unsinn ist, das zu sagen).

Ts-213 304r[3] Wie verhält es sich nun mit dem Satz: "die Fläche ist von A bis B weiß"? Aus ihm folgt doch, daß sie auch von A′ bis B′ weiß ist. Es braucht sich da nicht um gesehenes Weiß zu handeln; und der Schluß von dem ersten Satz auf den zweiten wird jedenfalls immer wieder *ausgeführt*. Es sagt mir Einer "ich habe die Fläche von A bis B damit bestrichen" und ich sage darauf "also ist sie jedenfalls von A′ bis B′ gestrichen". Man müßte a priori sagen können, daß F(A′B′) aus F(AB) folgen *würde*.

Ts-213 305r[1] Sind die Striche A′ und B′ vorhanden, dann folgt allerdings jener zweite Satz aus dem ersten (dann ist die *Zusammengesetztheit* schon in dem ersten Satz offenbar vorhanden) dann folgen aber aus dem ersten Satz nur so viele Sätze, als seiner *Zusammengesetztheit* entspricht (also nie unendlich viele).

Ts-213 305r[2] "Das Ganze ist weiß, folglich ist auch ein Teil, der durch eine solche Grenzlinie charakterisiert ist, weiß." "Das Ganze war weiß, also *war* auch jener Teil davon weiß, auch wenn ich ihn damals nicht begrenzt darin wahrgenommen habe."

Ts-213 *"Eine ungeteilt gesehene Fläche hat keine Teile"*.

305r[3] Denken wir uns aber einen Maßstab an die Fläche angelegt, sodaß wir etwa zuerst das Bild , dann das Bild und dann vor uns hätten, dann folgt daraus, daß das erste Band *durchaus* weiß ist *durchaus* nicht, daß im zweiten und dritten alles mit Ausnahme der Teilstriche weiß ist.

Ts-213 305r[4] “Wo immer, innerhalb dieses Kreises Du die Scheibe triffst, hast Du gewonnen”. “Ich denke, Du wirst die Scheibe irgendwo innerhalb dieses Kreises treffen”. Was den ersten Satz betrifft, könnte man fragen: woher weißt Du das? Hast Du *alle* möglichen Orte ausprobiert? Und die Antwort müßte dann lauten: das ist ja kein Satz, sondern eine allgemeine *Festsetzung*.

Ts-213 305r[5] & 306r[1] Der Schluß lautet auch nicht so: “wo immer auf der Scheibe der Schuß hintrifft, hast Du gewonnen. Du hast auf der Scheibe **da**hin getroffen, also hast Du den Preis gewonnen”. Denn wo ist dieses *da*? wie ist es außer dem Schuß bezeichnet, etwa durch einen Kreis? Und war der auch schon früher auf der Scheibe? Wenn nicht, so hat die Scheibe sich ja verändert, wäre er aber schon dort gewesen, dann wäre er als eine Möglichkeit des Treffens vorgesehen worden. Es muß vielmehr heißen: “Du hast die Scheibe getroffen, also ...”.

Ts-213 306r[2] Der Ort auf der Scheibe muß nicht notwendig durch ein Zeichen, einen Kreis, auf der Scheibe angegeben sein. Denn es gibt jedenfalls die Beschreibung “näher dem Mittelpunkt”, “näher dem Rand”, “rechts oben“ etc.. Wie immer die Scheibe getroffen wird, stets *muß* so eine Beschreibung möglich sein. (Aber von diesen Beschreibungen gibt es auch nicht “unendlich viele”.)

Ts-213 306r[3] Hat es nun einen Sinn zu sagen: “aber wenn man die Scheibe trifft, muß man sie *irgendwo* treffen”? Oder auch: “wo immer er die Fläche trifft, wird es keine Überraschung sein, – so daß man etwa sagen würde ‘das habe ich mir nicht erwartet, ich habe gar nicht gewußt, daß es diesen Ort gibt’”. Das heißt aber doch, es kann keine geometrische Überraschung sein.

Ts-213 306r[4] Was für eine Art Satz ist: “Auf diesem Streifen sind alle Schattierungen von Grau zwischen Schwarz und Weiß zu sehen”? Hier scheint es auf den ersten Blick, daß von unendlich vielen Schattierungen die Rede ist. Ja, wir haben hier scheinbar das Paradox, daß wir zwar nur endlich viele Schattierungen von einander unterscheiden können und der Unterschied zwischen ihnen natürlich nicht ein unendlich kleiner ist, und wir dennoch einen kontinuierlichen Übergang sehen.

Ts-213 307r[1] Man kann ein bestimmtes Grau ebensowenig als eines der unendlichen vielen Grau zwischen Schwarz und Weiß auffassen, wie man eine Tangente t als eine der unendlich vielen Übergangsstationen von t′ nach t′′ auffassen kann. Wenn ich etwa ein Lineal von t′ nach t′′ am Kreis abrollen sehe, so sehe ich – wenn es sich kontinuierlich bewegt – keine einzige der Zwischenlagen in dem Sinne, in welchem ich t sehe, wenn die Tangente ruht; oder aber ich sehe nur eine endliche Anzahl von Zwischenlagen. Wenn ich aber in so einem Fall scheinbar von einem allgemeinen Satz auf einen Spezialfall schließe, so ist die Quelle dieses allgemeinen Satzes nie die Erfahrung und der Satz wirklich kein Satz. Wenn ich z.B. sage: "Ich habe das Lineal sich von t′ nach t′′ bewegen sehen, *also* muß ich es auch in t gesehen haben", so haben wir hier keinen richtigen logischen Schluß. Wenn ich nämlich damit sagen will, das Lineal muß mit in der Lage t *erschienen* sein – wenn ich also von der Lage im Gesichtsraum rede, so folgt das aus dem Vordersatz durchaus nicht. Rede ich aber vom physischen Lineal, so ist es natürlich möglich, daß das Lineal die Lage t übersprungen hat und das Phänomen im Gesichtsraum dennoch kontinuierlich war.

Ts-213 308r[1] 4 *Kann eine Erfahrung lehren, daß dieser Satz aus jenem folgt?*

Ts-213 308r[2] Es ist nur wesentlich, daß wir (hier) nicht sagen können, wir sind durch Erfahrung daraufgekommen, daß es auch noch diesen Fall der Grammatik gibt. Denn den müßten wir in dieser Aussage beschreiben und diese Beschreibung, obwohl ich ihre Wahrheit erst jetzt einsehe, hätte ich doch schon vor dieser Erfahrung verstehen können.

Ts-213 308r[3] Es ist die alte Frage: inwiefern kann man jetzt von einer Erfahrung sprechen, die man jetzt nicht hat. Was ich nicht voraussehen kann, kann ich nicht voraussehen. Und wovon ich jetzt sprechen kann, kann ich jetzt sprechen, unabhängig von dem, wovon ich jetzt *nicht* sprechen kann. Die Logik ist eben immer komplett.

Ts-213 308r[4] "Wie kann ich wissen, was alles folgen wird?" – Was ich dann wissen kann, kann ich auch jetzt wissen.

Ts-213 308r[5] & 309r[1] Aber gibt es denn auch allgemeine Regeln der Grammatik, oder nicht nur Regeln über allgemeine Zeichen? Was wäre etwa eine allgemeine und eine besondere Regel im Schachspiel (oder einem andern)? Jede Regel ist ja allgemein. Doch ist eine andere Art der Allgemeinheit in der Regel, daß p ⌄ q aus p folgt, als in der, daß jeder Satz der Form p, non-non-p, ... aus p & q folgt. Ist aber nicht die Allgemeinheit der Regel für den Rösselsprung eine andere als die, einer Regel für den Anfang einer Partie?

Ts-213 309r[2] Ist das Wort "Regel" überhaupt vieldeutig? Und sollen wir also nicht von Regeln im Allgemeinen reden, wie auch nicht von Sprachen im Allgemeinen? Sondern nur von Regeln in besonderen Fällen.

Ts-213 309r[3] "Wenn aus F1(a) (a hat die Farbe F1) folgt non-F2(a), so mußte in der Grammatik des ersten Satzes auch schon die Möglichkeit des zweiten vorausgesehen sein (wie könnten wir auch sonst F1 und F2 Farben nennen)." "Wenn der zweite Satz dem ersten, sozusagen, unerwartet gekommen wäre, so könnte er nie aus ihm folgen". "Der erste Satz muß den anderen als seine Folge anerkennen. Oder vielmehr es muß dann beide *eine* Grammatik vereinigen und diese muß dieselbe sein, wie vor dem Schluß". (Es ist sehr schwer, hier keine Märchen von den Vorgängen im Symbolismus zu erzählen, wie an anderer Stelle keine Märchen über die psychologischen Vorgänge. Denn alles ist ja einfach und allbekannt (und nichts neues zu erfinden). Das ist ja eigentlich das Unerhörte an der Logik, daß ihre außerordentliche Schwierigkeit darauf beruht, daß nichts zu konstruieren, *sondern* alles schon da und bekannt ist.)

Ts-213 309r[4] "Welchen Satz p nicht als seine Folge erkennt, der ist nicht seine Folge".

Ts-213 310r[1] Aus der Grammatik des Satzes – und aus ihr allein, muß es *hervorgehen*, ob ein Satz aus ihm folgt. Keine Einsicht in einen neuen Sinn kann das ergeben; – sondern nur die Einsicht in den alten Sinn. – Es ist nicht möglich, einen neuen Satz zu bilden, der aus jenem folgt, den man nicht hätte bilden können (wenn auch ohne zu wissen, ob er wahr oder falsch ist) als jener gebildet wurde. Entdeckte man einen neuen Sinn und folge dieser aus jenem ersten Satz, so hätte dieser Satz dann nicht seinen Sinn geändert.

Ts-213 5 ****Allgemeinheit.

311r[1] Ts-213 312r[1] *Der Satz “der Kreis befindet sich im Quadrat” in gewissem Sinne unabhängig von der Angabe einer bestimmten Lage* (*er hat, in gewissem Sinne, nichts mit ihr zu tun*).

Ts-213 312r[2] Ich möchte sagen: das allgemeine Bild | ∘ | hat eine andre Metrik als das besondere.

Ts-213 312r[3] Im allgemeinen Zeichen “| ∘ |” spielen die Distanzen so wenig eine Rolle wie im Zeichen “aRb”.

Ts-213 312r[4] Wie man die Zeichnung | ∘ | als eine Darstellung des “allgemeinen Falls” ansehen kann. Quasi nicht im Maßraum, sondern so, daß die Distanzen des Kreises von den Geraden *garnichts ausmachen*. Man sieht dann das Bild als *Fall* eines anderen Systems, wie wenn man es als Darstellung einer besonderen Lage des Kreises zwischen den Geraden sieht. Oder richtiger: Es ist dann Bestandteil eines andren Kalküls. Von der Variablen gelten eben andre Regeln, als von ihrem besonderen Wert.

Ts-213 312r[5] & 313r[1] ”Woher weißt Du, daß er im Zimmer ist?” – “Weil ich ihn hineingesteckt habe und er nirgends heraus kann.” – So ist also Dein Wissen der allgemeinen Tatsache, daß er irgendwo im Zimmer ist, auch von der Multiplizität dieses Grundes.

Ts-213 313r[2] Nehmen wir die besonderen Fälle des allgemeinen Sachverhalts, daß das Kreuz sich zwischen den Grenzstrichen befindet:

⊢x————⊣ ⊢—x————⊣ ⊢————x—⊣. Jeder dieser Fälle z.B. hat eine *besondere* Individualität. Tritt diese

Individualität irgendwie in den Sinn des allgemeinen Satzes ein? Offenbar nicht.

Ts-213 313r[3] Es scheint uns aber das ‘zwischen den Strecken, oder Wänden, Liegen’ etwas Einfaches, wovon die verschiedenen Lagen (ob die Gesichtserscheinungen, oder die durch Messen festgestellten Lagen) ganz unabhängig sind. D.h., wenn wir von den einzelnen (gesehenen) Lagen reden, so scheinen wir von etwas ganz Anderem zu reden, als von dem, wovon im allgemeinen Satz die Rede ist.

Ts-213 313r[4] Es ist ein anderer Kalkül, zu dem unsere Allgemeinheitsbezeichnung gehört und ein anderer, in dem es jene Disjunktion gibt. Wenn wir sagen, das Kreuz liegt zwischen diesen Strichen, so haben wir keine Disjunktion bereit, die den Platz des allgemeinen Satzes nehmen könnte.

Ts-213 313r[5] & 314r[1] Wenn man die allgemeinen Sätze von der Art “der Kreis befindet sich im Quadrat” betrachtet, so kommt es einem immer wieder so vor, als sei die Angabe der Lage im Quadrat *nicht eine nähere Bestimmung* zur Angabe, der Kreis liege *im Quadrat* (wenigstens nicht, soweit der Gesichtsraum in Betracht kommt), als sei vielmehr das “im Quadrat” eine komplette Bestimmung, die an sich nicht mehr näher zu *beschreiben* sei. So wie eine Angabe der Farbe die Angabe der Härte eines Materials nicht näher bestimmt. – So ist nun das Verhältnis der Angaben über den Kreis natürlich nicht, und doch hat das Gefühl einen Grund.

Ts-213 In den grammatischen Regeln für die Termini des allgemeinen
314r[2] Satzes muß es liegen, welche Mannigfaltigkeit er für mögliche Spezialfälle vorsieht. Was in den Regeln nicht liegt, ist nicht vorhergesehen.

Ts-213 Alle diese Verteilungen könnten verschiedene Zerrbilder
314r[3] desselben Sachverhalts sein. (Man denke sich die beiden weißen Streifen und den schwarzen Streifen in der Mitte dehnbar.)

Ts-213 Ist denn in $(x).fx$ von a die Rede, da fa aus $(x).fx$ folgt? In dem
314r[4] Sinne des allgemeinen Satzes, dessen Verifikation in einer Aufzählung besteht, ja.

Ts-213 314r[5] & 315r[1] Wenn ich sage “in dem Quadrat ist ein schwarzer Kreis” so ist es mir immer, als habe ich hier wieder etwas Einfaches vor mir. Als müsse ich nicht an verschiedene mögliche Stellungen oder Größen des Kreises denken. Und doch kann man sagen: wenn ein Kreis in dem Quadrat ist, so muß er irgendwo und von irgend einer Größe sein. Nun kann aber doch auf keinen Fall davon die Rede sein, daß ich mir *alle* möglichen Lagen und Größen zum voraus denke. – In dem ersten Satz scheine ich sie vielmehr, sozusagen, durch ein Sieb zu fassen, sodaß “Kreis innerhalb des Quadrats” *einem* Eindruck zu entsprechen scheint, für den das *Wo* etc. überhaupt noch nicht in Betracht kommt, als sei es (gegen allen Anschein) etwas, was mit jenem ersten *Sachverhalt* nur physikalisch, nicht logisch verbunden sei. Der Ausdruck “Sieb” kommt daher: wenn ich etwa eine Landschaft ansehe, durch ein Glas, das nur die Unterschiede von Dunkelheit und Helligkeit durchläßt, nicht aber die Farbunterschiede, so kann man so ein Glas ein Sieb nennen. Denkt man sich nun das Quadrat durch ein Glas betrachtet, das nur den Unterschied “Kreis im Quadrat, oder nicht im Quadrat” durchließe, nicht aber einen Unterschied der Lage oder Größe des Kreises, so könnten wir auch hier von einem Sieb sprechen.

Ts-213 315r[2] Ich möchte sagen, in dem Satz “ein Kreis liegt im Quadrat” ist von der besonderen Lage überhaupt nicht die Rede. Ich sehe dann in dem Bild nicht die Lage, ich sehe von ihr ab. So als wären etwa die Abstände von den Quadratseiten dehnbar und als gälten ihre Längen nicht. Ja, kann denn nicht der Fleck sich wirklich im Viereck bewegen? Ist das nicht nur ein spezieller Fall von *dem*, im Viereck zu sein? Dann wäre es also doch nicht so, daß der Fleck an einer bestimmten Stelle im Viereck liegen muß, wenn er überhaupt darin ist.

Ts-213 315r[3] Ich will sagen, daß es eine Beziehung des Flecks zum Rand zu geben scheint, die unabhängig von dem Abstand ist. – Gleichsam als bediente ich mich einer Geometrie, in der es keinen Abstand gibt, wohl aber ein Innen und Außen. So gesehen, sind allerdings auch die Bilder und gleich.

Ts-213 315r[4] & 316r[1] Der Satz “der Fleck ist im Quadrat” hält gleichsam *selbst* den Fleck bloß im Quadrat, das heißt, er beschränkt die Freiheit des Flecks nur auf diese Weise und gibt ihm in dem Quadrat volle Freiheit. Der Satz *bildet* dann einen Rahmen, der die Freiheit des Flecks beschränkt und ihn innerhalb frei läßt, das heißt, mit seiner Lage *nichts zu schaffen hat*. – Dazu muß aber der Satz (gleichsam eine Kiste, in der der Fleck eingesperrt ist) die logische Natur dieses Rahmens haben und das hat er, denn ich könnte jemandem den Satz erklären und dann jene Möglichkeiten auseinandersetzen und zwar unabhängig davon, ob ein solcher Satz wahr ist oder nicht, also unabhängig *von einer Tatsache*.

Ts-213 316r[2] “Wo immer der Fleck im Viereck ist ...” heißt “wenn er im Viereck ist ...” und hier ist nur die Freiheit (Ungebundenheit) im Viereck *gemeint*, aber keine Menge von Lagen.

Ts-213 316r[3] Es besteht freilich eine logische Ähnlichkeit (*formelle Analogie*) zwischen dieser Freiheit und der Gesamtheit von Möglichkeiten, daher gebraucht man oft in beiden Fällen dieselben Wörter (“alle”, “jeder”, etc.).

Ts-213 316r[4] “Alle Helligkeitsgrade unter diesem tun meinen Augen weh”. Prüfe die Art der Allgemeinheit.

Ts-213 316r[5] “Alle Punkte dieser Fläche sind weiß”. Wie verifizierst Du das? – dann werde ich wissen, was es heißt.

Ts-213 317r[1] 6 *Der Satz “der Kreis liegt im Quadrat” keine Disjunktion von Fällen.*

Ts-213 317r[2] Wenn ich sage, der Fleck liegt im Quadrat, so weiß ich – und muß wissen – daß es verschiedene mögliche Lagen für ihn gibt. Aber auch, daß ich nicht eine bestimmte Zahl aller solcher Lagen nennen könnte. Ich weiß von vornherein nicht, wieviele Lagen “ich unterscheiden könnte”. – Und ein Versuch darüber lehrt mich auch nicht das, was ich hier wissen will. Das Dunkel, welches über den Möglichkeiten der Lage etc. herrscht, ist die *gegenwärtige* logische Situation. So wie trübe Beleuchtung auch eine bestimmte Beleuchtung ist.

Ts-213 317r[3] Es ist da immer so, als könnte man eine logische Form nicht ganz übersehen, da man nicht weiß, wieviel, oder welche mögliche Lagen es für den Fleck im Viereck gibt. Anderseits weiß man es doch, denn man ist von keiner überrascht, wenn sie auftritt.

Ts-213 317r[4] & 318r[1] Es ist natürlich nicht “Stellung des Kreises in diesem Quadrat” ein Begriff, und die besondere Stellung ein Gegenstand, der unter ihn fällt. So daß Gegenstände gefunden würden, von denen man sich überzeugt, daß sie (auch) Stellungen des Kreises im Quadrat sind, von denen man aber früher nichts gewußt hat.

Ts-213 318r[2] Die Mittelstellung des Kreises und andere ausgezeichnete Stellungen sind übrigens ganz analog den primären Farben in der Farbenskala. (Dieses Gleichnis könnte man mit Vorteil fortsetzen.)

Ts-213 318r[3] Der Raum ist sozusagen *eine* Möglichkeit. Er besteht nicht aus mehreren Möglichkeiten.

Ts-213 318r[4] Wenn ich also höre, das Buch liegt – irgendwo – auf dem Tisch, und finde es nun in einer bestimmten Stellung, so kann ich nicht überrascht sein und sagen “ah, ich habe nicht gewußt, daß es diese Stellung gibt” und doch hatte ich diese besondere Stellung nicht vorhergesehen, d.h., als besondere Möglichkeit vorher ins Auge gefaßt. Was mich überrascht, ist eine physische Möglichkeit, nicht eine logische!

Ts-213 318r[5] Was ist aber der Unterschied zwischen dem Fall "das Buch liegt irgendwo auf dem Tisch" und *dem* "das Ereignis wird irgendeinmal in Zukunft eintreten"? Offenbar der, daß wir im einen Fall eine sichere Methode kennen zu verifizieren, ob das Buch auf dem Tisch liegt, im anderen Fall eine analoge Methode nicht existiert. Wenn etwa ein bestimmtes Ereignis bei einer der unendlich vielen Bisektionen einer Strecke eintreten sollte, oder besser: wenn es eintreten sollte, wenn wir die Strecke in *einem* Punkt (ohne nähere Bestimmung) schneiden und an diesem Punkt eine Minute verweilen, so ist diese Angabe ebenso sinnlos, wie die über die unendliche Zukunft.

Ts-213 319r[1] Angenommen, ich gäbe eine Disjunktion von so vielen Stellungen an, daß es mir unmöglich wäre, eine Stellung von allen angegebenen als verschieden zu erkennen; wäre *nun* die Disjunktion der allgemeine Satz $(\exists x).fx$? Wäre es nicht sozusagen Pedanterie, die Disjunktion noch immer nicht als den allgemeinen Satz anzuerkennen? Oder besteht ein wesentlicher Unterschied, und ist die Disjunktion vielleicht dem allgemeinen Satz gar nicht ähnlich?

Ts-213 319r[2] Das, was uns auffällt, ist, daß der eine Satz so kompliziert, der andere so einfach ist. Oder ist der einfache nur eine kurze Schreibweise des komplizierteren?

Ts-213 319r[3] Was ist denn das Kriterium dafür (für den allgemeinen Satz), daß der Kreis im Quadrat ist? Entweder überhaupt nichts, was mit einer Mehrheit von Lagen (bezw. Größen) zu tun hat, oder aber etwas, was mit einer endlichen Anzahl solcher Lagen zu tun hat.

Ts-213 319r[4] & 320r[1] Wenn man sagt, der Fleck A ist irgendwo zwischen den Grenzen B und C, ist es denn nicht offenbar möglich, eine Anzahl von Stellungen des A zwischen B und C zu beschreiben oder abzubilden, sodaß ich die Sukzession aller dieser Stellungen als kontinuierlichen Übergang sehe? Und ist dann nicht die Disjunktion aller dieser N Stellungen eben der Satz, daß sich A irgendwo zwischen B und C befindet? Aber wie verhält es sich mit diesen N Bildern? Es ist klar, daß ein Bild und das unmittelbar folgende visuell nicht unterscheidbar sein dürfen, sonst ist der Übergang visuell diskontinuierlich. Die Stellungen, deren Sukzession ich als kontinuierlichen Übergang sehe, sind Stellungen nicht im Gesichtsraum.

Ts-213 320r[2] Wie ist der Umfang des Begriffs "Dazwischenliegen" bestimmt? Denn es soll doch im Vorhinein festgelegt werden, welche Möglichkeiten zu diesem Begriff gehören. Es kann, wie ich sage, keine Überraschung sein, daß ich auch *das* "dazwischenliegen" nenne. Oder: wie können die Regeln für das Wort "dazwischenliegen" angegeben werden, da ich doch nicht die Fälle des Dazwischenliegens aufzählen kann? Natürlich muß gerade das für die Bedeutung dieses Worts charakteristisch sein.

Ts-213 320r[3] Wir würden das Wort ja auch nicht durch Hinweisen auf *alle besonderen Fälle* jemandem zu erklären suchen, sondern indem wir auf einen solchen Fall (oder einige) zeigten und in irgendeiner Weise andeuteten, daß es auf den besonderen Fall nicht ankomme.

Ts-213 Das Aufzählen von Lagen ist nicht nur nicht nötig, sondern es
320r[4] kann hier wesentlich von so *einem Aufzählen* keine Rede sein.

Ts-213 Zu sagen “der Kreis liegt entweder zwischen den beiden
320r[5] Geraden oder *hier*“ (wo dieses ‘hier’ ein Ort zwischen den Geraden ist) heißt offenbar nur: “der Kreis liegt zwischen den beiden Geraden”, und der Zusatz “oder hier” *erscheint* überflüssig. Man wird sagen: in dem ‘irgendwo’ ist das ‘hier’ schon mitinbegriffen. Das ist aber merkwürdig, weil es nicht (*darin*) genannt ist.

Ts-213 Eine bestimmte Schwierigkeit besteht darin, daß die Worte das
320r[6] & nicht zu sagen scheinen, was der Gedanke erfaßt, oder: wenn
321r[1] die Worte das nicht sagen, was der Gedanke zu erfassen scheint. So, wenn wir sagen “dieser Satz gilt von allen Zahlen” und glauben in dem Gedanken alle Zahlen wie die Äpfel in einer Kiste gefaßt zu haben.

Ts-213 Nun könnte man aber fragen: Wie kann ich (nun) im Voraus
321r[2] wissen, aus welchen Sätzen dieser allgemeine Satz folgt? Wenn ich diese Sätze nicht angeben kann.

Ts-213 Kann man aber sagen: “man kann nicht sagen, aus welchen
321r[3] Sätzen dieser Satz folgt”? Das klingt so wie: man weiß es nicht. Aber so ist es natürlich nicht. Und ich kann ja Sätze sagen, und im Vorhinein sagen, aus denen er folgt. – “Nur nicht *alle*”. – Aber das heißt ja eben nichts.

Ts-213 321r[4] Es ist eben nur der allgemeine Satz und besondere Sätze (nicht die besonderen Sätze). Aber der allgemeine Satz zählt besondere Sätze nicht auf. Aber was charakterisiert ihn denn dann als allgemein, und was zeigt, daß er nicht einfach diejenigen besonderen Sätze umschließt, von denen wir in *diesem* bestimmten Falle sprechen?

Ts-213 321r[5] Er kann nicht durch seine Spezialfälle charakterisiert werden; denn wieviele man auch aufzählt, so könnte er immer mit dem Produkt der angeführten *Fälle* verwechselt werden. Seine Allgemeinheit liegt also in einer Eigenschaft (grammatischen Eigenschaft) der Variablen.

Ts-213 322r[1] 7 *Unzulänglichkeit der Frege- und Russell'schen Allgemeinheitsbezeichnung.*

Ts-213 322r[2] & 323r[1]

Die eigentliche Schwierigkeit liegt nämlich im Begriff des ‘$(\exists n)$’ und allgemein des ‘$(\exists x)$’. Ursprünglich stammt diese Notation vom Ausdruck unsrer Wortsprache her: “es gibt ein … von der und der Eigenschaft”. Und was hier an Stelle der Punkte steht, ist etwa “Buch meiner Bibliothek”, oder “Ding (Körper) in diesem Zimmer”, “Wort in diesem Brief”, u.s.w.. Man denkt dabei an Gegenstände, die man *der Reihe nach* durchgehen kann. Durch einen, so oft *verwendeten*, Prozeß der Sublimierung wurde diese Form dann zu der: “es gibt einen Gegenstand, für welchen …”, und hier dachte man sich ursprünglich auch die Gegenstände der Welt ganz analog den ‘Gegenständen’ im Zimmer (nämlich den Tischen, Stühlen, Büchern, etc.). Obwohl es ganz klar ist, daß die Grammatik dieses “$(\exists x)$. etc.” in vielen Fällen eine ganz andere ist, als im primitiven und als Urbild dienenden Fall. Besonders kraß wird die Diskrepanz zwischen dem ursprünglichen Bild und dem, worauf die Notation nun angewendet werden soll, wenn ein Satz “in diesem Viereck sind nur zwei Kreise” wiedergegeben wird durch die Form “es gibt keinen Gegenstand, der die Eigenschaft hat, ein Kreis in diesem Viereck, aber weder der Kreis a noch der Kreis b zu sein”, oder “es gibt nicht drei Gegenstände, die die Eigenschaft haben, ein Kreis in diesem Viereck zu sein”. Der Satz “es gibt nur zwei Dinge, die Kreise in diesem Viereck sind” (analog gebildet dem Satz “es gibt nur zwei Menschen, die diesen Berg erstiegen haben”) klingt verrückt; und mit Recht. D.h., es ist nichts damit gewonnen, das wir den Satz “in diesem Viereck sind zwei Kreise” in jene Form pressen; vielmehr hilft uns das nur zu übersehen, daß wir die Grammatik dieses Satzes nicht *klargestellt* haben.

Zugleich aber gibt hier die Russell'sche Notation einen Schein von Exaktheit, der Manchen glauben macht, die Probleme seien dadurch gelöst, daß man den Satz auf die Russell'sche Form gebracht hat. (Es ist das ebenso gefährlich, wie der Gebrauch des Wortes "wahrscheinlich", ohne weitere Untersuchung darüber, wie das Wort in diesem speziellen Fall gebraucht wird. Auch das Wort "wahrscheinlich" ist, aus leicht verständlichen Gründen, mit einer Idee der Exaktheit verbunden.) In allen den Fällen: "Einer der vier Füße dieses Tisches hält nicht", "es gibt Engländer mit schwarzen Haaren", "auf dieser Wand ist ein Fleck", "die beiden Töpfe haben das gleiche Gewicht", "auf beiden Seiten stehen gleichviel Wörter" – wird in der Russell'schen Notation das "(∃ ...) ..." gebraucht; und jedesmal mit anderer Grammatik. Damit will ich also sagen, daß mit einer Übersetzung so eines Satzes aus der Wortsprache in die Russell'sche Notation nicht viel gewonnen ist.

Ts-213 323r[2] & 324r[1]

Unzulänglichkeit der Frege'schen und Russell'schen Allgemeinheitsbezeichnung. Es hat Sinn, zu sagen "schreib' eine beliebige Kardinalzahl hin", ist aber Unsinn zu sagen: "schreib' alle Kardinalzahlen hin". "In dem Viereck befindet sich ein Kreis" ((∃x).fx) hat Sinn, aber nicht non (∃x).non fx: "in dem Viereck befinden sich alle Kreise". "Auf einem andersfarbigen Hintergrund befindet sich ein roter Kreis" hat Sinn, aber nicht "es gibt keine von rot verschiedene Farbe eines Hintergrundes, auf der sich kein roter Kreis befindet". "In diesem Viereck ist ein schwarzer Kreis": Wenn dieser Satz die Form "(∃x).x ist ein schwarzer Kreis im Viereck" hat, was ist so ein Ding x, welches die Eigenschaft hat, ein schwarzer Kreis zu sein (und also auch die haben kann, *kein* schwarzer Kreis zu sein)? Ist es etwa ein Ort im Quadrat? dann aber gibt es keinen Satz "(x).x ist ein schwarzer ...". Anderseits könnte jener Satz bedeuten "es gibt einen Fleck im Quadrat, der ein schwarzer Kreis ist". Wie verifiziert man diesen Satz? Nun, man geht die verschiedenen Flecken im Quadrat durch und untersucht sie daraufhin, ob sie ganz schwarz und kreisförmig sind. Welcher Art ist aber der Satz: "Es ist kein Fleck in dem Quadrat"? Denn, wenn das 'x' in '(∃x)' im vorigen Fall 'Fleck im Quadrat' *hieß*, dann kann es zwar einen Satz "(∃x).fx" geben, aber keinen "(∃x)" oder "non (∃x)". Oder, ich könnte wieder fragen: Was ist das für ein Ding, das die Eigenschaft hat (oder nicht hat) ein Fleck im Quadrat zu sein? Und wenn man sagen kann "ein Fleck ist in dem Quadrat", hat es dann auch schon Sinn, zu sagen "alle Flecken sind in dem Quadrat"? Welche *alle*?

Ts-213 324r[2] & 325r[1] Die gewöhnliche Sprache sagt "in diesem Viereck ist ein roter Kreis", die Russell'sche Notation sagt "es gibt einen Gegenstand, der ein roter Kreis in diesem Viereck ist". Diese Ausdrucksform ist *offenbar* nach dem Modell gebildet: "es gibt eine Substanz, die im Dunkeln leuchtet", "es gibt einen Kreis in diesem Viereck, der rot ist". – Vielleicht ist schon der Ausdruck "es gibt" irreführend. "Es gibt" heißt eigentlich soviel wie "es findet sich", oder "es gibt unter diesen Kreisen einen ...". Wenn man also in größtmöglicher Annäherung an die Russell'sche Ausdrucksweise sagt "es gibt einen Ort in diesem Viereck, wo ein roter Kreis ist", so heißt das eigentlich, unter diesen Orten gibt es einen, an welchem etc..

Ts-213 325r[2] (Der schwierigste Standpunkt in der Logik ist der des gesunden Menschenverstandes. Denn er verlangt zur Rechtfertigung seiner Meinung die volle Wahrheit und hilft uns nicht, durch die geringste Konzession, oder Konstruktion.)

Ts-213 325r[3] Der *richtige* Ausdruck dieser Art Allgemeinheit ist also der, der gewöhnlichen Sprache "in dem Viereck ist ein Kreis", welcher die Lage des Kreises einfach *offen* läßt (*unentschieden* läßt). ("Unentschieden" ist ein richtiger Ausdruck, weil die Entscheidung einfach *fehlt*.)

Ts-213 326r[1] 8 *Kritik meiner früheren Auffassung der Allgemeinheit.*

Ts-213 326r[2] Meine Auffassung des allgemeinen Satzes war, daß $(\exists x).fx$ eine logische Summe ist und daß nur ihre Summanden *hier* nicht aufgezählt seien, sich aber aufzählen ließen (und zwar aus dem Wörterbuch und der Grammatik der Sprache). Denn ließen sie sich nicht aufzählen, so handelt es sich ja doch nicht um eine logische Summe. (Vielleicht ein Gesetz, logische Summen zu bilden.)

Ts-213 326r[3] & 327r[1] Die Erklärung von $(\exists x).fx$ als einer logischen Summe und $(x).fx$ als logischem Produkt kann natürlich nicht aufrecht erhalten werden. Sie ging mit einer falschen Auffassung der logischen Analyse zusammen, indem ich etwa dachte, das logische Produkt für ein bestimmtes $(x).fx$ werde sich schon einmal finden. – Es ist natürlich richtig, daß $(\exists x).fx$ irgendwie als logische Summe funktioniert und $(x).fx$ als Produkt; ja in *einer* Verwendungsart der Worte “alle” und “einige” ist meine alte Erklärung richtig, nämlich – z.B. – in dem Falle “alle primären Farben finden sich in diesem Bild” oder “alle Töne der C-Dur Tonleiter kommen in diesem Thema vor”. In Fällen aber wie “alle Menschen sterben, ehe sie 200 Jahre alt werden” stimmt meine Erklärung nicht. Daß nun aber $(\exists x).fx$ als logische Summe funktioniert, ist darin ausgedrückt, daß es aus fa und aus $fa. \vee .fb$ folgt, also in den Regeln: $(\exists x).fx\ .\ \&\ .\ fa = fa$ und $(\exists x).fx : \& : fa. \vee .fb = fa. \vee .fb$. Aus diesen Regeln ergeben sich dann die Grundgesetze Russells $fx\ . \supset .\ (\exists z).fz$ und $fx. \vee .fy : \supset : (\exists z).fz$ als Tautologien.

Ts-213 327r[3] Man könnte übrigens wirklich eine Notation für $(\exists x).fx$ einführen, in der man es durch ein Zeichen “$fr \lor fs \lor ft \lor$ ...” ersetzt und dürfte dann damit rechnen, wie mit einer logischen Summe; es müßten aber die Regeln vorgesehen sein, nach denen ich diese Notation immer in die von “$(\exists x).fx$” zurücknehmen kann und die also das Zeichen “$fa \lor fb \lor fc \lor$ ...” von dem einer logischen Summe unterscheiden. Der Zweck dieser Notation wäre nur der, in gewissen Fällen leichter mit $(\exists x).fx$ rechnen zu können.

Ts-213 327r[4] & 328r[1] Wenn ich Recht habe, so gibt es keinen Begriff “reine Farbe”; der Satz “A hat eine reine Farbe” heißt einfach “A ist rot, oder gelb, oder blau, oder grün”. “Dieser Hut gehört entweder A oder B oder C” ist nicht derselbe Satz wie “dieser Hut gehört einem Menschen in diesem Zimmer”, selbst wenn tatsächlich nur A,B,C im Zimmer sind, denn das muß erst dazugesagt werden. – Auf dieser Fläche sind zwei reine Farben, *heißt*: Auf dieser Fläche sind rot und gelb, oder rot und blau, oder rot und grün, oder etc. Wenn ich nun nicht sagen kann “es gibt 4 reine Farben”, so sind die reinen Farben und die Zahl 4 doch irgendwie miteinander verbunden und das muß sich auch irgendwie ausdrücken. – Z.B. wenn ich sage “auf dieser Fläche sehe ich 4 Farben: gelb, blau, rot, grün”.

Ts-213 328r[2] Die Allgemeinheitsbezeichnung unserer gewöhnlichen Sprache faßt die logische Form noch viel oberflächlicher, als ich früher geglaubt habe. Sie ist eben in dieser Beziehung mit der Subjekt-Prädikat-Form vergleichbar.

Ts-213 Die Allgemeinheit ist so vieldeutig, wie die Subjekt-Prädikat
328r[3] Form.

Ts-213 Es gibt so viel verschiedene Allgemeinheiten, als es
328r[4] verschiedene Zahl**arten** gibt.

Ts-213 Darum nützt es nichts, zur Klärung das Wort “alle” zu
328r[5] gebrauchen, wenn man seine Grammatik in *diesem* Falle noch
nicht kennt.

Ts-213 9 *Erklärung der Allgemeinheit durch Beispiele.*
329r[1]

Ts-213 329r[2] & 330r[1]

Denken wir uns die Erklärung des Begriffs der Pflanze. Wir zeigen jemand mehrere Gegenstände und sagen, das sind Pflanzen. Dann zeigt auch er auf einen weiteren Gegenstand und sagt "ist auch das eine Pflanze" und wir antworten "ja, das auch", u.s.w.. Ich hätte nun einmal gesagt, er habe nun in dem Gezeigten den Begriff 'Pflanze' – das gewisse Gemeinsame – gesehen und er sähe die Beispiele der Erklärung anders, wenn er in ihnen eben diesen Begriff sieht als, wenn er sie etwa als Repräsentanten dieser bestimmten Form und Farbe allein auffasse. (So wie ich auch sagte, er sähe in der Variablen, wenn er sie als solche versteht, etwas, was er im Zeichen für den besonderen Fall nicht sieht.) Aber der Gedanke des 'darin Sehens' ist von dem Fall hergenommen, wo ich z.B. die Figur !!!!|||| verschieden 'phrasiert' sehe. Aber dann sehe ich eben in einem andern Sinn wirklich verschiedene Figuren und, was diese gemein haben, ist außer ihrer Ähnlichkeit die Verursachung durch das gleiche physikalische Bild. Aber diese Erklärung ist doch nicht ohne weiteres auf den Fall des Verstehens der Variablen oder der Beispiele für den Begriff 'Pflanze' anzuwenden. Denn angenommen, wir hätten wirklich etwas anderes in ihnen gesehen, als in Pflanzen, die nur um ihrer selbst willen gezeigt wurden, so ist die Frage, kann denn dieses, *oder irgendein anderes*, Bild uns zu der Anwendung als Variablen berechtigen? Ich hätte Einem also die Pflanzen zur Erklärung zeigen können und ihm dazu einen Trank gegeben, durch den es verursacht wird, daß er die Beispiele in der bestimmten Weise sieht. (Wie es möglich wäre, daß ein Alkoholisierter eine Gruppe !!!!|||| immer als !!!||| !| sieht.) Und damit wäre die Erklärung des Begriffs in eindeutiger Weise gegeben und wer sie verstanden hat, hätte von den vorgezeigten Spezimina und den begleitenden Gesten *dieses* Bild empfangen. So ist es aber doch nicht. – Es ist nämlich wohl möglich, daß der, welcher z.B. das Zeichen !!!!!!|||||| als Zahlzeichen für die 6 sieht, es anders sieht (etwas andres darin sieht) als der, welcher es nur als Zeichen für “einige” auffaßt, weil er seine Aufmerksamkeit nicht auf das Gleiche richten wird; aber es kommt dann auf das System von Regeln an, die von diesen Zeichen gelten und das Verstehen wird wesentlich kein Sehen des Zeichens in gewisser Weise sein.

Ts-213 330r[2] Es wäre also möglich, zu sagen ‘jetzt sehe ich das nicht mehr als Rose, sondern nur noch als Pflanze’! Oder: “Jetzt sehe ich es nur als *diese* Rose”. “Ich sehe den Fleck nur noch im Quadrat, aber nicht mehr in einer bestimmten Lage”.

Ts-213 330r[3] Der seelische Vorgang des Verstehens interessiert uns eben gar nicht. (So wenig, wie der einer Intuition.)

Ts-213 330r[4] & 331r[1] “Es ist doch gar kein Zweifel, daß der, welcher die Beispiele als beliebige Fälle zur Veranschaulichung des Begriffs versteht, etwas andres versteht, als der, welcher sie als *bestimmt begrenzte* Aufzählung auffaßt”. Sehr richtig, aber *was* versteht der erste also, was der zweite nicht versteht? Nun, er sieht eben nur *Beispiele* in den vorgezeigten Dingen, die nur gewisse Züge *aufzeigen* sollen, aber er meint nicht, daß ich ihm im Übrigen diese Dinge um ihrer selbst willen zeige. –

Ts-213 331r[2] Ich möchte die eine *Aufzählung* ‘logisch begrenzt’, die andere ‘logisch nicht begrenzt’ nennen.

Ts-213 331r[3] Ja, aber ist es denn so, daß er nun tatsächlich nur diese Züge an den Dingen sieht? Etwa am Blatt nur das, was allen Blättern gemeinsam ist? Das wäre so, als sähe er alles übrige "in blanko". Also gleichsam ein unausgefülltes Formular, in dem die wesentlichen Züge vorgedruckt sind. (Aber die Funktion "f(...)" ist ja so ein Formular.)

Ts-213 331r[4] Aber was ist denn das für ein Prozeß, wenn mir Einer mehrere verschiedene Dinge als Beispiele eines Begriffes zeigt, um mich darauf zu führen, das Gemeinsame in ihnen zu sehen; und wenn ich es nun suche und wirklich sehe? Er kann mich auch auf das Gemeinsame *aufmerksam machen*. – Bringt er aber dadurch hervor, daß ich den Gegenstand anders *sehe*? Vielleicht auch, denn ich kann jedenfalls *besonders* auf einen seiner Teile schauen, während ich sonst etwa alle gleichmäßig deutlich gesehen hätte. Aber dieses Sehen ist nicht das Verstehen des Begriffs. Denn wir sehen nicht etwas mit einer *leeren* Argumentstelle.

Ts-213 332r[1] Man könnte auch fragen: Sieht der, welcher das Zeichen "!!!||| ..." als Zeichen des Zahlbegriffs (im Gegensatz zu "!!!|||", welches 3 bezeichnen soll) auffaßt, jene erste Gruppe von Strichen anders, als die Zweite? Aber auch wenn er sie anders – gleichsam, vielleicht, verschwommener – sieht, *sieht* er da etwa das Wesentliche des Zahlbegriffs? Hieße das nicht, daß er dann "!!!||| ..." und "!!!!|||| ..." tatsächlich nicht voneinander müßte unterscheiden können? (Wenn ich ihm (nämlich) etwa den Trank eingegeben hätte, der ihn den *Begriff* sehen macht.)

Ts-213 332r[2] Denn wenn ich sage: Er bewirkt dadurch, daß er uns mehrere Beispiele zeigt, daß wir das Gemeinsame in ihnen sehen und von dem Übrigen absehen, so heißt das eigentlich, daß das Übrige in den Hintergrund tritt, also gleichsam blasser wird (und warum soll es dann nicht ganz verschwinden) und "das Gemeinsame", etwa die Eiförmigkeit, allein im Vordergrund bleibt. Aber so ist es nicht. Übrigens wären die mehreren Beispiele nur ein technisches Hilfsmittel, und wenn ich einmal das Gewünschte gesehen hätte, so könnte ich's auch in *einem* Beispiel sehen. (Wie ja auch '$(\exists x).fx$' nur *ein* Beispiel enthält.)

Ts-213 332r[3] Es sind also die Regeln, die von dem Beispiel gelten, die es zum Beispiel machen. –

Ts-213 332r[4] & 333r[1]

Nun genügt aber doch heute jedenfalls das bloße Begriffswort ohne eine Illustration, um sich mit mir zu verständigen (und die Geschichte des Verständnisses interessiert uns ja nicht) z.B., wenn mir Einer sagt "forme ein Ei"; und ich will doch nicht sagen, daß ich etwa dabei den Begriff des Ei's vor meinem inneren Auge sehe, wenn ich diesen Befehl (und das Wort "Ei") verstehe. Wenn wir eine Anwendung des Begriffes 'Ei' oder 'Pflanze' machen, so schwebt uns gewiß nicht vorerst ein allgemeines Bild vor, oder bei dem Hören des Wortes "Pflanze" das Bild des bestimmten Gegenstandes, den ich dann als eine Pflanze bezeichne. Sondern ich mache die Anwendung sozusagen spontan. Dennoch gibt es eine Anwendung, von der ich sagen würde: nein, das habe ich unter 'Pflanze' nicht gemeint; oder anderseits "ja, das habe ich auch gemeint". Aber heißt das, daß mir diese Bilder vorgeschwebt haben und ich sie in meinem Geist ausdrücklich abgewiesen und zugelassen habe? – Und doch hat es diesen Anschein, wenn ich sage: "ja, das und das und das habe ich alles gemeint, aber *das* nicht". Man könnte aber fragen: Ja, hast Du denn alle diese Fälle vorausgesehen? und die Antwort würde dann lauten "ja", oder "nein, aber ich dachte mir, es sollte etwas zwischen dieser und dieser Form sein", oder dergleichen. Meistens aber habe ich in diesem Moment gar keine Grenzen gezogen und diese ergeben sich nur auf einem Umweg durch eine Überlegung. Ich sage z.B. "bring' mir noch eine ungefähr so große Blume" und er bringt eine und ich sage: Ja, so eine habe ich gemeint. So erinnere ich mich vielleicht an ein Bild, was mir vorschwebte, aber aus diesem geht nicht hervor, daß auch die herbeigebrachte Blume noch zulässig ist. Sondern hier wende ich eben jenes Bild an. Und diese Anwendung war nicht antizipiert worden.

Ts-213 333r[2] Was uns interessiert ist nur die *exakte* Beziehung des Beispiels zum Folgen

Ts-213 333r[3] Es wird aus dem Beispiel heraus wieder kalkuliert.

Ts-213 334r[1] Denn uns interessiert nur die Geometrie des Mechanismus. (Das heißt doch, die Grammatik seiner Beschreibung.)

Ts-213 334r[2] Wie äußert es sich aber in unsern Regeln, daß die behandelten Fälle fx keine *wesentlich abgeschlossene* Klasse sind? – Doch wohl nur durch die Allgemeinheit der allgemeinen Regel. – Daß sie nicht *die* Bedeutung für den Kalkül haben, wie eine abgeschlossene Gruppe von Grundzeichen (etwa den Namen der 6 Grundfarben). Wie anders, als durch die Regeln, die von ihnen ausgesagt sind. – Wenn ich etwa in einem Spiel die Erlaubnis habe, eine gewisse Art von Steinen in beliebiger Anzahl zu borgen, andere aber in festgesetzter Anzahl vorhanden sind, oder das Spiel zwar zeitlich unbegrenzt, aber räumlich begrenzt ist, haben wir ja wohl denselben Fall. Und der Unterschied zwischen den einen und den anderen Figuren des Spiels muß eben durch die Spielregeln festgesetzt sein. Es heißt dann etwa von der einen: Du kannst soviele Steine dieser Art nehmen, als Du willst. – Und nach einem anderen exakteren Ausdruck der Regel darf ich nicht suchen.

Ts-213 334r[3] Das heißt, daß der Ausdruck für die Unbegrenztheit der behandelten Einzelfälle (*eben*) ein allgemeiner Ausdruck sein wird und kein andrer sein kann, kein Ausdruck, in dem die anderen nicht behandelten Einzelfälle in schattenhafter Weise vorkämen.

Ts-213 334r[4] Es ist ja klar, daß ich keine logische Summe als Definition des Satzes “das Kreuz liegt zwischen den Strichen” anerkenne. Und damit ist doch alles gesagt.

Ts-213 335r[1] & 336r[1]

Eines möchte ich immer sagen, um den Unterschied der *Fälle* zu erklären, die als Beispiele für einen Begriff beigebracht werden, von denen, die in der Grammatik eine bestimmte abgeschlossene Gruppe bilden. Wird nämlich zuerst erklärt "a,b,c,d sind Bücher. – Nun bringe mir ein Buch" und er bringt eines, das von allen gezeigten verschieden ist, so kann dennoch gesagt werden, er habe ganz richtig nach der aufgestellten Regel gehandelt. Hätte es aber geheißen "a,b,c,d sind meine Bücher. – Bringe mir eines von meinen Büchern", so wäre es falsch gewesen, überhaupt ein *fünftes* zu bringen und die Antwort hätte gelautet: Ich habe Dir doch gesagt, daß a,b,c,d meine Bücher sind. Im ersten Fall handelt der der Regel nicht zuwider, der einen anderen Gegenstand bringt, als die in der Regel genannten, im zweiten Fall würde er dadurch der Regel zuwider handeln. Wenn Du aber auch nur a,b,c,d im Befehl nanntest, aber die Handlung f(e) als Befolgung des Befehls ansahst, heißt das nicht, daß Du mit F(a,b,c,d ...) doch F(a,b,c,d,e) meintest? Oder, wie unterscheiden sich diese Befehle, wenn sie doch von dem Selben befolgt werden? – Ja, aber es hätte ja auch f(g) mit dem Befehl übereingestimmt und nicht nur f(e). – Gut, dann meintest Du eben mit dem ersten Befehl: F(a,b,c,d,e,g) u.s.f. Was immer Du mir bringst, ich hätte es doch in einer Disjunktion einschließen können. Wenn wir also eine Disjunktion aller von uns tatsächlich *gebrauchten Fälle konstruieren*, wie würde sich die syntaktisch von dem allgemeinen Satz unterscheiden? Denn wir dürfen nun nicht sagen: dadurch, daß der allgemeine Satz auch noch durch r (das nicht in der Disjunktion steht) *wahr gemacht* wird. Denn dadurch unterscheidet sich der allgemeine Satz nicht von einer

Disjunktion, die r enthält. (Und also ist auch jede andere ähnliche Antwort unmöglich.) Wohl aber wird es einen Sinn haben, zu sagen: F(a,b,c,d,e) ist die Disjunktion aller tatsächlich von uns gebrauchten Fälle, aber auch *andere Fälle* (es wird natürlich keiner erwähnt) machen den allgemeinen Satz "F(a,b,c,d, ...)" wahr. Während man hierin natürlich nicht den allgemeinen Satz für F(a,b,c,d,e) einsetzen kann.

Ts-213 336r[2] Es ist übrigens hier gerade wichtig, daß die Parenthese im vorigen Satz "und also ist auch jede andere ähnliche Antwort unmöglich" ein Unsinn ist, weil man zwar verschiedene besondere Fälle als Beispiele einer Allgemeinheit geben kann, aber nicht verschiedene Variable, da die Variablen r,s,t sich ihrer Bedeutung nach nicht unterscheiden.

Ts-213 336r[3] & 337r[1]

Man könnte dann freilich nicht sagen, wir befolgen $F(\exists)$ anders, wenn wir $f(d)$ tun, als eine Disjunktion, worin $f(d)$ vorkommt, denn $F(\exists) = F(\exists) \vee f(d)$. Wem der Befehl gegeben wird "hole mir irgend eine Pflanze, oder diese" (von welcher ihm ein Bild mitgegeben wird), der wird dieses Bild ruhig beiseite legen und sich sagen "da es irgend eine tut, so geht mich dieses Bild nichts an". Dagegen werden wir das Bild nicht einfach beiseite legen dürfen, wenn es uns mit fünf anderen gegeben wurde und der Befehl lautete, eine von diesen sechs Pflanzen zu bringen. (Es kommt also darauf an, in *welcher* Disjunktion sich der besondere Befehl befindet.) Und nach dem Befehl "$f(a) \vee f(b) \vee f(c)$" wird man sich anders richten, als nach dem Befehl "$f(\exists)$" ($= f(\exists) \vee f(c)$), auch wenn man jedes Mal $f(c)$ tut. – Das Bild $f(c)$ geht in $f(\exists)$ unter. (Und es hilft uns ja nichts in einem Kahn zu sitzen, wenn wir mitsamt ihm unter Wasser sind und sinken.) Man möchte (uns) sagen: Wenn Du auf den Befehl "$f(\exists)$" $f(c)$ tust, so hätte Dir ja auch $f(c)$ ausdrücklich erlaubt sein können, und wie hätte sich dann der allgemeine Befehl von einer Disjunktion unterschieden? – Aber auf diese Erlaubnis hättest Du Dich eben, in der Disjunktion mit dem allgemeinen Satz, gar nicht *stützen* können. Ist es also so, daß der Befehl "bringe mir eine Blume" nie durch den Befehl ersetzt werden kann von der Form "bringe mir a oder b oder c", sondern immer lauten muß "bringe mir a oder b oder c, *oder eine andere Blume*"? Aber warum tut der allgemeine Satz so unbestimmt, wenn ich ja doch jeden Fall, der wirklich eintritt, auch im Voraus hätte beschreiben können?

Ts-213 337r[2] Aber auch das scheint mir noch nicht den wichtigsten Punkt dieser *Sache* zu treffen. Weil es, wie ich glaube, nicht eigentlich auf die Unendlichkeit der Möglichkeiten ankommt, sondern auf eine Art von Unbestimmtheit. Ja, gefragt, wieviele Möglichkeiten es denn für einen Kreis im Gesichtsfeld gäbe, innerhalb eines bestimmten Vierecks zu liegen, könnte ich weder eine endliche Zahl nennen, noch sagen, es gäbe unendlich viele (wie in der euklidischen Ebene). Sondern wir kommen hier zwar nie zu einen Ende, aber die Reihe ist nicht endlos im Sinne von [1, x, x + 1]. Sondern, kein Ende, zu dem wir kommen, ist wesentlich das Ende. Das heißt, ich könnte immer sagen: ich seh' nicht ein, warum das alle Möglichkeiten sein sollen. – Und das heißt doch wohl, daß es sinnlos ist, von "allen Möglichkeiten" zu sprechen. Der Begriff 'Pflanze' und 'Ei' wird also von der Aufzählung *gar nicht angetastet*.

Ts-213 337r[3] & 338r[1]

Wenn wir auch sagen, wir hätten die besondere Befolgung fa immer als möglich voraussehen können, so haben wir dies doch in Wirklichkeit nie getan. – Aber selbst, wenn ich die Möglichkeit fa vorhersehe und ausdrücklich in meinen Befehl aufnehme, so verliert sie sich neben dem allgemeinen Satz und zwar, weil ich eben aus dem allgemeinen Satz ersehe, daß dieser besondere Fall erlaubt ist, und nicht einfach daraus, daß er im Befehl als erlaubt festgesetzt ist. Denn, steht der allgemeine Satz da, so nützt mir das Hinzusetzen des besonderen Falles nichts mehr (d.h. es macht den Befehl nicht expliciter). Denn nur aus dem allgemeinen Satz leite ich ja die Rechtfertigung her, diesen besonderen Fall neben ihn zu setzen. Man könnte nämlich glauben, und darauf geht ja meine ganze Argumentation aus, daß durch das Hinzusetzen des besonderen Falles die – gleichsam verschwommene – Allgemeinheit des Satzes aufgehoben wird. Man könnte sagen "jetzt brauchen wir sie nicht mehr, wir haben ja hier den bestimmten Fall". Ja, aber wenn ich doch zugebe, daß ich den besonderen Fall darum *hierhersetze*, weil er mit dem allgemeinen Satz übereinstimmt! Oder, daß ich doch anerkenne, daß fa ein besonderer Fall von f∃ ist! Denn nun kann ich nicht sagen: das beweist eben, daß f∃ eine Disjunktion ist, deren ein Glied fa ist. Denn wenn dies so ist, so muß sich diese Disjunktion angeben lassen. f∃ muß dann als eine Disjunktion definiert sein. Eine solche Definition wäre auch ohne weiteres zu geben, sie entspräche aber nicht dem Gebrauch von f∃, den wir meinen. Nicht so, daß die Disjunktion immer noch etwas übrig läßt; sondern, daß sie das Wesentliche der Allgemeinheit gar nicht berührt, ja, wenn man sie dieser beifügt, ihre Rechtfertigung erst von dem allgemeinen Satz nimmt.

Ts-213 338r[2] & 339r[1] & 340r[1]

Ich befehle zuerst $f\exists$; er befolgt den Befehl und tut fa. Nun denke ich, ich hätte ihm ja gleich den Befehl "$f\exists \vee$ fa" geben können. (Denn, daß fa den Befehl $f\exists$ befolgt, wußte ich ja früher und es kam ja auf dasselbe hinaus, ihm $f\exists \vee$ fa zu befehlen.) Und dann hätte er sich also bei der Befolgung nach der Disjunktion "tue Eines oder fa" gerichtet. Und ist es, wenn er den Befehl durch fa befolgt, nicht gleichgültig, was in Disjunktion mit fa steht? Wenn er auf jeden Fall fa tut, so ist ja doch der Befehl befolgt, was immer die Alternative ist. Ich möchte auch sagen: In der Grammatik ist nichts nachträglich, keine Bestimmung *nach* einer andern, sondern alles ist zugleich da. Insofern kann ich also (auch) nicht sagen, ich habe zuerst den Befehl $f\exists$ gegeben und bin dann erst draufgekommen, daß fa ein Fall von $f\exists$ ist; jedenfalls aber war und blieb mein Befehl $f\exists$, und fa setze ich dazu *wissend*, daß fa mit $f\exists$ übereinstimmt. Und diese Bestimmung, daß fa mit $f\exists$ übereinstimmt, setzt doch eben den Sinn des Satzes $f\exists$ voraus, wenn er überhaupt selbständig festgehalten wird, und nicht erklärt wird, er sei durch eine Disjunktion zu ersetzen. Und mein Satz "jedenfalls war und blieb aber mein Befehl $f\exists$ u.s.w." hieß nur, daß ich den allgemeinen Befehl *nicht* durch eine Disjunktion *ersetzt* hatte. Man kann sich nun denken, daß ich einen Befehl $p \vee$ fa gebe und der Andre den ersten Teil des Befehls nicht deutlich versteht, wohl aber, daß der Befehl "... $\vee$ fa" lautet. Er könnte dann fa tun und sagen "ich weiß gewiß, daß ich den Befehl befolgt habe, wenn ich auch den ersten Teil nicht verstanden habe". So nun denke ich es mir auch, wenn ich sage, es käme ja auf die andere Alternative nicht an. Aber dann hat er doch nicht den *gegebenen* Befehl befolgt, sondern ihn als "fa|"

aufgefaßt. Man könnte fragen: Hat der, welcher auf den Befehl “f∃∨ fa” fa tut, den Befehl darum (d.h. insofern) befolgt, weil der Befehl von der Form x ∨ fa ist, oder darum, weil f∃∨ fa = f∃ ist? Wer f∃ versteht, also weiß, daß f∃∨ fa = f∃ ist, der befolgt durch fa f∃, auch wenn ich es “f∃∨ fa” schreibe, weil er ja *doch* sieht, daß fa ein Fall von f∃ ist. – Und nun kann man uns entgegenhalten: Wenn er sieht, daß fa ein Fall von f∃ ist, so heißt das ja doch, daß fa disjunktiv in f∃ enthalten ist, daß also f∃ *mit Hilfe* von fa definiert ist! Und – muß er jetzt weiter sagen – die übrigen Teile der Disjunktion gehen mich eben nichts an, wenn die Glieder, die ich sehe, alle sind, *die ich jetzt brauche*. “Du hast eben mit der Erklärung ‘daß fa ein Fall von f∃ ist’ nichts weiter gesagt, als daß fa in f∃ vorkommt, und noch andere Glieder.” – Aber gerade das meinen wir nicht. Und es ist nicht so, als hätten wir durch unsere Bestimmung f∃ *unvollständig definiert*. Denn dann wäre ja eine vollständige Definition *möglich*. Und es wäre diejenige Disjunktion, nach welcher das angehängte “∨ f∃” gleichsam lächerlich wäre, weil ja doch nur die *genannten* Fälle für uns in Betracht kämen. Wie wir aber f∃ auffassen, ist die Bestimmung, daß fa ein Fall von f∃ ist, keine unvollkommene, sondern gar keine Definition von f∃. Ich nähere mich also auch nicht dem Sinn von f∃, wenn ich die Disjunktion der Fälle vermehre; die Disjunktion der Fälle ∨ f∃ ist zwar gleich f∃, aber niemals gleich der Disjunktion der Fälle, sondern ein ganz anderer Satz.

Ts-213 340r[2] Auf keinem Umweg kann, was über eine *Aufzählung* von Einzelfällen gesagt ist, die Erklärung der Allgemeinheit ergeben.

Ts-213 340r[3] Kann ich denn aber die Regeln des Folgens in diesem Fall angeben? Denn, wie weiß ich, daß gerade aus fa (∃x).fx folgt? ich kann ja doch nicht *alle* Sätze angeben, aus denen es folgt. – Das ist aber auch gar nicht nötig; folgt (∃x).fx aus fa, so war *das* jedenfalls vor jeder besonderen Erfahrung zu wissen, und möglich, es in der Grammatik anzugeben.

Ts-213 340r[4] Ich sagte "es war möglich, vor jeder Erfahrung zu wissen, daß (∃x).fx aus fa folgt und es in der Grammatik anzugeben". Es sollte aber heißen: '(∃x).fx folgt aus fa' ist kein Satz (Erfahrungssatz) der Sprache, der '(∃x).fx' und 'fa' angehören, sondern eine in ihrer Grammatik festgesetzte Regel.

Ts-213 341r[1]

10 ***Bildungsgesetz einer Reihe.***

" u.s.w."

Ts-213 341r[2] Man kann für den Gebrauch der Variablen wohl eine Regel aufstellen und es ist kein Pleonasmus, daß wir dabei eben diese Art der Variablen gebrauchen. Denn brauchten wir sie nicht, so wäre ja durch die Regeln die Variable definiert. Und wir nehmen ja nicht an, daß sie sich definieren lasse, oder: sie definiert werden müsse (denn einmal nehmen die Definitionen doch ein Ende).

Ts-213 341r[3] Das heißt (nur), daß – z.B. – die Variable "x^2" keine Abkürzung ist (etwa für eine logische Summe) und daß *in unserm Gedanken* auch nur ein Zeichen dieser Multiplizität vorhanden ist.

Ts-213 341r[4] & 342r[1] Denn nehmen wir an, ich hätte 7 Fälle aufgezählt und sagte "ihre logische Summe ist aber nicht der allgemeine Satz", so ist das nicht genug und ich will noch sagen, daß auch keine andere *Zahl* von Fällen den allgemeinen Satz ergibt. Aber in diesem Zusatz scheine ich nun wiederum eine Aufzählung, wenn auch nicht wirklich so doch quasi schattenhaft *auszuführen*. Aber so ist es nicht, denn in dem Zusatz kommen ganz andere Wörter als die Zahlwörter vor.

Ts-213 342r[2] "Wie aber soll ich es verbieten, daß *ein* Zahlwort dort und dort eingesetzt wird? Ich kann doch nicht vorhersehen, welches Zahlwort Einer wird einsetzen wollen, *um es zu verbieten*". – Du kannst es ja verbieten, wenn es kommt. – Aber da sprechen wir ja schon, allgemein, vom Zahlbegriff!

Ts-213 342r[3] Was aber macht ein Zeichen zum Ausdruck der Unendlichkeit? Was gibt ihm den eigentümlichen Charakter dessen, was wir unendlich nennen? Ich glaube, daß es sich ähnlich verhält wie das Zeichen einer enormen Zahl. Denn das Charakteristische des Unendlichen, wie man es so? auffaßt, ist seine enorme Größe.

Ts-213 342r[4] Aber es gibt nicht etwas, was eine Aufzählung ist und doch keine Aufzählung. Eine Allgemeinheit, die quasi nebelhaft aufzählt, aber nicht wirklich und bis zu einer bestimmten *Grenze*.

Ts-213 342r[5] Die Punkte in “1 + 1 + 1 + 1 ...” sind eben auch nur die vier Pünktchen. Ein Zeichen, für das sich gewisse Regeln angeben lassen müssen. (Nämlich dieselben, wie für das Zeichen “u.s.w. ad inf.”) Dieses Zeichen ahmt zwar die Aufzählung in gewisser Weise nach, ist aber keine Aufzählung. Und das heißt wohl, daß die Regeln, die von ihm gelten, bis zu einem Punkt mit denen, die von einer Aufzählung gelten, übereinstimmen, aber nicht ganz übereinstimmen.

Ts-213 342r[6] Es gibt kein Mittelding zwischen einer bestimmten Aufzählung und der Variablen.

Ts-213 343r[1] Man hat natürlich nur die Zahlen bis zu einer gewissen höchsten – sagen wir 10^{10} – hingeschrieben. Worin besteht nun die *Möglichkeit*, Zahlen hinzuschreiben, die man noch nicht hingeschrieben hat? Wie seltsam dieses Gefühl, als wären sie doch schon alle irgendwie vorhanden! (Frege sagte, eine Konstruktionslinie sei in gewissem Sinne schon vorhanden, auch ehe sie gezogen wurde.)

Ts-213 343r[2] Hier ist die Schwierigkeit, sich zu wehren gegen den Gedanken, die Möglichkeit sei eine Art schattenhafter Existenz.

Ts-213 343r[3] In den Regeln für die Variable *a* kann eine Variable *b* vorkommen und auch besondere Zahlzeichen; aber auch keine Gesamtheit von Zahlen.

Ts-213 343r[4] Nun scheint es aber, als wäre damit etwas (*aus der Logik*) *weggeleugnet*. Etwa gerade die Allgemeinheit; oder das, was die Punkte andeuten. Das Unfertige (Lockere, Dehnbare) der Reihe. Und natürlich dürfen und können wir nichts wegleugnen. Wo kommt also diese Unbestimmtheit zum Ausdruck? Etwa so: Wenn wir Zahlen anführen, die wir statt der Variablen *a* einsetzen dürfen, so sagen wir von keiner, es sei die letzte, oder höchste.

Ts-213 343r[5] Würde uns aber nun nach der Erklärung einer Rechnungsart jemand fragen "und ist nun 103 das letzte Zeichen, welches ich benützen kann"; was sollen wir antworten? "Nein, es ist nicht das letzte", oder "es gibt kein letztes"? – Aber muß ich ihn nicht zurückfragen: "Und wenn es nicht das letzte ist, was käme dann noch?" Und sagt er nun "104", so müßte ich sagen: Ganz richtig, Du kannst die Reihe selber fortsetzen.

Ts-213 343r[6] & 344r[1] Von einem Ende der Möglichkeit kann ich überhaupt nicht reden. (Nur vor dem Geschwätz muß man sich in der Philosophie hüten. Eine Regel aber, die praktisch anwendbar ist, ist immer in Ordnung.)

Ts-213 344r[2] Es ist klar, daß man einer Regel von der Art [a, x, x + 1] folgen kann; ich meine, ohne schon von vornherein die Reihe hinschreiben zu können, sondern, indem man sich wirklich nach der Bildungsregel richtet. Es ist ja dann dasselbe, wie wenn ich eine Reihe etwa mit der Zahl 1 anfinge und sagte: "nun gib 7 dazu, multipliziere mit 5 und zieh' die Wurzel, und diese zusammengesetzte Operation wende immer wieder auf das Resultat an". (Das wäre ja die Regel [1,x,√(x+7)•5‾].)

Ts-213 344r[3] Schließlich ist ja das Wort “u.s.w.” nichts anderes, als das *Wort “ u.s.w.”* (d.h. wieder als ein Zeichen des Kalküls, das nicht mehr tun kann, als durch die Regeln zu bedeuten, die von ihm *gelten*. Das nicht mehr *sagen* kann, als es zeigt.) D.h. es wohnt dem Wort “u.s.w.” keine geheime Kraft inne, durch die nun die Reihe fortgesetzt wird, ohne fortgesetzt zu werden.

Ts-213 344r[4] Das wohl nicht, wird man sagen, aber eben die Bedeutung der *unendlichen Fortsetzung*.

Ts-213 344r[5] Man könnte nun aber fragen: Wie kommt es, daß der, welcher die allgemeine Regel nun auf eine *weitere* Zahl anwendet, nur *dieser* Regel folgt. Daß keine weitere Regel nötig war, die ihm erlaubt, die allgemeine auch auf diesen Fall anzuwenden; und daß doch dieser Fall in der (*allgemeinen*) Regel nicht genannt war.

Ts-213 344r[6] & 345r[1] Es wundert uns also, daß wir diesen Abgrund zwischen den einzelnen Zahlen und dem allgemeinen Satz nicht überbrücken können.

Ts-213 345r[2] “Kann man sich einen leeren Raum vorstellen?” (Diese Frage gehört merkwürdigerweise hierher.)

Ts-213 345r[3] Es ist einer der tiefstwurzelnden Fehler der Philosophie: die Möglichkeit als ein Schatten der Wirklichkeit. Anderseits aber kann es kein Irrtum sein. Und das ist es auch nicht, wenn man den Satz diesen Schatten nennt.

Ts-213 345r[4] Die Gefahr ist natürlich hier wieder, in einen *Positivismus* zu verfallen, nämlich in einen, der einen eigenen Namen verdient und daher *natürlich* ein Irrtum sein muß. Denn wir dürfen überhaupt keine Tendenz haben, keine besondere Auffassung der Dinge, sondern müssen alles anerkennen, was jeder Mensch darüber je gesagt hat, außer soweit er selbst eine besondere Auffassung oder Theorie hatte.

Ts-213 345r[5] Denn das Zeichen “u.s.w.”, oder ein ihm entsprechendes, ist wohl für die Bezeichnung der Endlosigkeit wesentlich. Natürlich durch die Regeln, die von einem solchen Zeichen gelten. D.h. wir können wohl das Reihenstück “1, 1 + 1, 1 + 1 + 1” unterscheiden von der Reihe “1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w.”. Und das letzte Zeichen und sein Gebrauch ist so wesentlich für den Kalkül, als *eines der vorhergehenden*.

Ts-213 345r[6] Das, was mich nun bedrückt, ist, daß das “u.s.w.” scheinbar auch in den Regeln für das Zeichen “u.s.w.” vorkommen muß. Z.B. ist 1, 1 + 1, u.s.w. = 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w. *u.s.w.*

Ts-213 346r[1] Aber haben wir denn hier nicht die alte Erkenntnis, daß wir die Sprache nur von außen beschreiben können? Daß wir also nicht erwarten dürfen, durch eine Beschreibung der Sprache in andere Tiefen zu dringen, *als die Sprache selbst offenbart*: Denn die Sprache beschreiben wir mittels der Sprache.

Ts-213 346r[2] Wir könnten sagen: Es ist ja gar kein Anlaß, zu fürchten, daß wir das Wort “u.s.w.” in einer das Endliche übersteigenden Weise gebrauchen.

Ts-213 346r[3] Übrigens kann der, für das “u.s.w.” charakteristische Teil seiner Grammatik nicht in Regeln über die Verbindung von “u.s.w.” mit einzelnen Zahlzeichen (nicht: “*den* einzelnen Zahlzeichen”) bestehen – denn diese Regeln geben ja wieder ein beliebiges Stück einer Reihe – sondern in Regeln der Verbindung von “u.s.w.” mit “u.s.w.”.

Ts-213 346r[4] & 347r[1] Die Möglichkeit noch weitere Zahlen anzuführen. Die Schwierigkeit scheint uns die zu sein, daß die Zahlen, die ich tatsächlich angeführt habe, ja gar nicht wesentlich sind und nichts dies andeutet, daß sie eine *beliebige* Kollektion sind *die zufällig aufgeschriebenen unter allen Zahlen*. (So, als hätte ich in einer Schachtel alle Steine eines Spiels und auf dem Tisch daneben eine zufällige Auswahl aus dieser Schachtel. Oder, als wären die einen Ziffern in Tinte *nachgezogen*, während sie alle schon gleichsam blaß vorgezeichnet sind.) Daß wir aber außer diesen zufällig benützten nur die allgemeine Form haben. Haben wir hier übrigens nicht – so komisch das klingt – den Unterschied zwischen Zahlzeichen und Zahlen? Wenn ich z.B. sage “‘Kardinalzahlen’ nenne ich alles, was aus 1 durch fortgesetztes Addieren von 1 entsteht”, so vertritt das Wort “fortgesetzt” nicht eine nebelhafte Fortsetzung von 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, vielmehr ist auch das Zeichen “1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, ...” ganz exakt zu nehmen; als verschieden von “1, 1 + 1, 1 + 1 + 1” anderen bestimmten Regeln unterworfen und nicht ein Ersatz einer Reihe “die sich nicht hinschreiben läßt”.

Ts-213 347r[2] Das heißt: Mit dem Zeichen “1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, ...” wird auch *gerechnet*, wie mit (den) Zahlzeichen, nur nach andern Regeln.

Ts-213 347r[3] Was bildet man sich denn aber ein? Welchen Fehler macht man denn? Wofür hält man das Zeichen "1, 1 + 1, ..."? D.h.: wo kommt denn das *wirklich* vor, was man in diesem Zeichen zu sehen meint? Etwa, wenn ich sage "er zählte 1,2,3,4 und so weiter bis 1000"? wo es auch möglich wäre, wirklich alle Zahlen hinzuschreiben.

Ts-213 347r[4] Als was *sieht* man denn "1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, ..." an? Als eine ungenaue Ausdrucksweise. Die Pünktchen sind so, wie weitere Zahlzeichen, die aber undeutlich sind. So, als hörte man auf, Zahlzeichen hinzuschreiben, weil man ja doch nicht alle hinschreiben kann, aber als seien sie allerdings, quasi, in einer Kiste, vorhanden. Etwa auch, wie wenn ich von einer Melodie nur die ersten Töne deutlich singe und den Rest nur noch andeute und in Nichts auslaufen lasse. (Oder wenn man beim Schreiben von einem Wort nur wenige Buchstaben deutlich schreibt und mit einem unartikulierten Strich endet.) *Wo dann dem 'undeutlich' ein 'deutlich' entspräche*.

Ts-213 347r[5] & 348r[1] Ich habe einmal gesagt, es könne nicht Zahlen geben und den Begriff der Zahl. Und das ist richtig, wenn es heißt, daß die Variable zur Zahl nicht so steht, wie der Begriff Apfel zu einem Apfel (oder der Begriff Schwert zu Nothung). Anderseits *ist die Zahlvariable kein Zahlzeichen*.

Ts-213 348r[2] Ich wollte aber auch sagen, daß der Zahlbegriff nicht unabhängig von den Zahlen (*gegeben*) sein könnte, und das ist nicht wahr. Sondern die Zahlvariable ist in dem Sinne von einzelnen Zahlen unabhängig, als es einen Kalkül mit einer Klasse unsrer Zahlzeichen, die von unsern gelten, und ohne die allgemeine Zahlvariable, wohl gibt. Freilich gelten dann eben nicht alle Regeln von diesen Zahlzeichen, die von unsern gelten, aber doch entsprechen sie unseren, wie die Damesteine im Damespiel denen im Schlagdamespiel.

Ts-213 348r[3] Wogegen ich mich wehre, ist die Anschauung, daß eine unendliche Zahlenreihe etwas uns Gegebenes sei, worüber es nun spezielle Zahlensätze und auch allgemeine Sätze über alle Zahlen der Reihe gibt. So daß der arithmetische Kalkül nicht vollständig wäre, wenn er nicht auch die allgemeinen Sätze über die Kardinalzahlen enthielte, nämlich allgemeine Gleichungen der Art a + (b + c) = (a + b) + c. Während schon $1:3=0\dot{}3\dot{}$ einem andern Kalkül angehört als 1:3 = 0,3. Und so ist eine allgemeine Zeichenregel (z.B. rekursive Definition), die für 1, (1) + 1, ((1) + 1) + 1, (((1) + 1) + 1) + 1, u.s.w. gilt, etwas andres, als eine spezielle Definition. Und die allgemeine Regel fügt dem Zahlenkalkül etwas neues bei, ohne welches er ebenso vollständig gewesen wäre, wie die Arithmetik der Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5.

Ts-213 348r[4] & 349r[1] Es fragt sich auch, wo denn der Zahlbegriff (oder Begriff der Kardinalzahl) unbedingt gebraucht wird. Zahl, im Gegensatz wozu?

[1, x, x + 1] wohl im Gegensatz zu [5, x, $\sqrt{x}$] u.s.w..– Denn wenn ich so ein Zeichen (wie “[1, x, x + 1]”) wirklich einführe – und nicht nur als Luxus mitschleppe, so muß ich auch etwas mit ihm tun, d.h., es in einem Kalkül verwenden, und dann verliert es seine Alleinherrlichkeit und kommt in ein System ihm koordinierter Zeichen.

Ts-213 349r[2] Man wird vielleicht sagen: aber ‘Kardinalzahl’ steht doch im Gegensatz zu ‘Rationalzahl’, ‘reelle Zahl’ etc.. Aber dieser Unterschied ist ein Unterschied der Regeln (der von ihnen geltenden Spielregeln) – nicht einer, der Stellung auf dem Schachbrett – nicht ein Unterschied, für den man im selben Kalkül verschiedene *koordinierte* Worte braucht.

Ts-213 349r[3] Man sagt “dieser Satz ist für alle Kardinalzahlen bewiesen”. Aber sehen wir doch nur hin, wie der Begriff der Kardinalzahl in den Beweis eintritt. Doch nur, indem im Beweis von 1 und der Operation x + 1 die Rede ist – aber nicht im Gegensatz zu Etwas, was den Rationalzahlen entspräche. Wenn man also den Beweis in Prosa mit Hilfe des Begriffsworts ‘Kardinalzahl’ beschreibt, so sehen wir wohl, daß kein *Begriff* diesem Wort entspricht.

Ts-213 349r[4] & 350r[1] Die Ausdrücke "die Kardinalzahlen", "die reellen Zahlen" sind außerordentlich irreführend, außer, wo sie als Teil einer Bestimmung verwendet werden, wie in: "die Kardinalzahlen von 1 bis 100", etc.. "Die Kardinalzahlen" gibt es nicht, sondern nur "Kardinalzahlen" und den Begriff, die Form, 'Kardinalzahl'. Nun sagt man: "die Zahl der Kardinalzahlen ist kleiner, als die der reellen Zahlen" und denkt sich, man könnte die beiden Reihen etwa nebeneinander schreiben (wenn wir nicht schwache Menschen wären) und dann würde die eine im Endlosen enden, während die andere ins wirklich Unendliche über sie hinaus liefe. Aber das ist alles Unsinn. Wenn von einer Beziehung, die man nach Analogie "größer" und "kleiner" nennen kann, die Rede sein kann, dann nur zwischen den Formen 'Kardinalzahl' und 'reelle Zahl'. Was eine Reihe ist, erfahre ich dadurch, daß man es mir erklärt und nur soweit, als man es erklärt. Eine endliche Reihe wurde mir durch Beispiele der Art 1, 2, 3, 4 erklärt, eine endlose durch Zeichen der Art "1, 2, 3, 4, u.s.w." oder "1, 2, 3, 4 …".

Ts-213 350r[2] Es ist wichtig, daß ich eine Projektionsregel verstehen (sehen) kann, ohne sie in einer allgemeinen Notation vor mir zu haben. Ich kann aus der Reihe 112439416 eine allgemeine Regel entnehmen – freilich auch beliebig viele andere, *aber doch auch eine bestimmte* und das heißt, daß für mich diese Reihe irgendwie der Ausdruck dieser einen Regel war.

Ts-213 350r[3] Hat man "intuitiv" das Bildungsgesetz einer Reihe, z.B. der Reihe m verstanden, so daß man also im Stande ist, ein beliebiges m(v) zu bilden, so hat man das Bildungsgesetz *ganz* verstanden, also so gut, wie es etwa eine algebraische Darstellung vermitteln könnte. D.h. man kann es durch eine solche Darstellung nicht mehr besser verstehen. Und diese Darstellung ist daher *insofern* auch nicht *strenger*. Obwohl sie natürlich einprägsamer sein kann.

Ts-213 350r[4] & 351r[1] Man ist geneigt, zu glauben, daß die Notation, die eine Reihe durch Anschreiben einiger Glieder mit dem Zeichen "u.s.w." *darstellt*, wesentlich unexakt ist. Im Gegensatz zur Angabe des allgemeinen Gliedes. Dabei vergißt man, daß die Angabe des allgemeinen Gliedes sich auf eine Grundreihe bezieht, welche nicht wieder durch ein allgemeines Glied beschrieben sein kann. So ist 2n + 1 das allgemeine Glied der ungeraden Zahlen, *wenn* n die Kardinalzahlen durchläuft, aber es wäre Unsinn zu sagen, n sei das allgemeine Glied der Reihe der Kardinalzahlen. Wenn man diese Reihe erklären will, so kann man es nicht durch Angabe des "allgemeinen Gliedes n", sondern natürlich nur durch eine Erklärung der Art 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w.. Und es ist natürlich kein wesentlicher Unterschied zwischen dieser Reihe und der: 1, 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 1 + 1, u.s.w., die ich ganz ebensogut als Grundreihe hätte nehmen können (sodaß dann das allgemeine Glied der Kardinalzahlenreihe ½ • (n − 1) *gelautet* hätte).

Ts-213 351r[2] & 352r[1] (∃x).fx & non (∃x,y).fx & fy (∃x,y).fx & fy. & .non (∃x,y,z).fx & fy & fz (∃x,y,z).fx & fy & fz. & .non (∃x,y,z,u).fx & fy & fz & fu

““Wie müßte man es nun anfangen, die allgemeine Form solcher Sätze zu schreiben? Die Frage hat offenbar einen guten Sinn. Denn, wenn ich nur einige solcher Sätze als Beispiele hinschreibe, so versteht man, was das _Wesentliche_ dieser Sätze sein soll.”” Nun, dann ist also die Reihe der Beispiele schon eine Notation; denn das Verstehen dieser Reihe besteht doch in der Verwendung dieses Symbols und darin, daß wir es von andern in demselben System unterscheiden, z.B. von: (∃x).fx (∃x,y,z).fx & fy & fz (∃x,y,z,u,v).fx & fy & fz & fu & fv.

Warum sollen wir aber nicht das allgemeine Glied der ersten Reihe _so_ schreiben: (∃x1...xn).Πxnx1fx&(∃x1...xn+1).Πxn+1x1fx? Ist diese Notation unexakt? Sie selbst soll ja nichts bildhaft machen, sondern nur auf die Regeln ihres Gebrauchs, das System in die sie gebraucht wird, kommt es an. Die Skrupel, die ihr anhaften, schreiben sich von einem Gedankengang her, der sich mit der Zahl der Urzeichen in dem Kalkül der ‘Principia Mathematica’ beschäftigte.

Ts-213 529r[1] 11 ****_Grundlagen der Mathematik_.

Ts-213 530r[1] ***Die Mathematik mit einem Spiel verglichen.***

Ts-213 530r[2] Was spricht man der Mathematik ab wenn man sagt, sie sei nur ein Spiel (oder: sie sei ein Spiel)?

Ts-213 530r[3] Ein Spiel, im Gegensatz wozu? – Was spricht man ihr zu, wenn man sagt, ihre Sätze hatten Sinn?

Ts-213 530r[4] Der Sinn außerhalb des Satzes. Und was geht uns der an? Wo zeigt er sich und was können wir mit ihm anfangen? (Auf die Frage "was ist der Sinn dieses Satzes?" antwortet ein Satz.) ("Aber der mathematische Satz drückt doch einen Gedanken aus" – Welchen Gedanken? –)

Ts-213 530r[5] & 531r[1] Kann er durch einen anderen Satz ausgedrückt werden? oder nur durch *diesen* Satz? – Oder überhaupt nicht? In *diesem* Falle geht er uns nichts an. Will man durch die mathematischen Sätze von andern Gebilden, den Hypothesen, etc. etwa unterscheiden? Daran tut man Recht, und daß dieser Unterschied besteht, unterliegt ja keinem Zweifel.

Ts-213 531r[2] Will man sagen, die Mathematik werde gespielt, wie das Schach, oder eine Patience und es gebe dabei ein Gewinnen oder Ausgehen so ist das offenbar unrichtig.

Ts-213 531r[3] Sagt man, daß die seelischen Vorgänge, die den Gebrauch der mathematischen Symbole begleiten, andere sind, als die, die das Schachspielen begleiten, so weiß ich darüber nichts zu sagen.

Ts-213 531r[4] Es gibt auch beim Schach einige Konfigurationen, die unmöglich sind, obwohl jeder Stein in einer ihm erlaubten Stellung steht. (Z.B. wenn die Anfangsstellung der Bauern intakt ist und ein Läufer schon auf dem Feld.) Aber man könnte sich ein Spiel denken, in welchem die Anzahl der Züge vom Anfang der Partie notiert würde, und dann *gäbe es den Fall*, daß nach n Zügen diese Konfiguration nicht eintreten könnte und man es der Konfiguration doch nicht ohneweiters ansehen kann, ob sie als n-te möglich ist, oder nicht.

Ts-213 531r[5] Die Handlungen im Spiel müssen den Handlungen im Rechnen entsprechen. (Ich meine: darin muß die Entsprechung bestehen, oder, so müssen die beiden einander zugeordnet sein.)

Ts-213 531r[6] & 532r[1] Handelt die Mathematik von Zeichen? Ebensowenig, wie das Schachspiel von Holzfiguren handelt. Wenn wir von dem Sinn mathematischer Sätze reden, oder; wovon sie handeln, so gebrauchen wir ein falsches Bild. Es ist nämlich hier auch so, als ob unwesentliche, willkürliche, Zeichen das Wesentliche – eben den Sinn – miteinander gemein hätten. Weil die Grammatik ein Kalkül ist und daher wesentlich von nichts handelt, gibt es keine Metamathematik.

Ts-213 532r[2] Wie verhält sich die Schachaufgabe (das Schachproblem) zur Schachpartie? – Denn, daß die Schachaufgabe der Rechenaufgabe entspricht, eine Rechenaufgabe ist, ist klar.

Ts-213 532r[3] Ein arithmetisches Spiel wäre z.B. folgendes: Wir schreiben auf gut Glück eine vierstellige Zahl hin, etwa 7368; dieser Zahl soll man sich dadurch nähern, daß man die Zahlen 7, 3, 6 und 8 in irgendeiner Reihenfolge miteinander multipliziert. Die Spielteilnehmer rechnen mit Bleistift auf Papier, und wer in der geringsten Anzahl von Operationen der Zahl 7368 am nächsten kommt, hat gewonnen. (Übrigens lassen sich eine Menge der mathematischen Rätselfragen zu solchen Spielen umformen.)

Ts-213 532r[4] Angenommen, einem Menschen wäre Arithmetik nur zum Gebrauch in einem arithmetischen Spiel gelehrt worden. Hätte er etwas Anderes gelernt als der, welcher Arithmetik zum normalen Gebrauch lernt? Und wenn er nun im Spiel 21 mit 8 multipliziert und 168 erhält, tut er etwas Andres, als der, welcher herausfinden wollte, wieviel 21 × 8 ist?

Ts-213 532r[5] Man wird sagen: Der Eine wollte doch eine Wahrheit finden, während der Andre nichts dergleichen wollte.

Ts-213 532r[6] & 533r[1] Nun könnte man diesen Fall etwa mit dem des Tennisspiels vergleichen wollen, in welchem der Spieler eine bestimmte Bewegung macht, der Ball darauf in bestimmter Weise fliegt und man diesen Schlag nun als Experiment auffassen kann, durch welches man eine bestimmte Wahrheit erfahren hat, oder aber auch als eine Spielhandlung, mit dem alleinigen Zweck, das Spiel zu gewinnen. Dieser Vergleich würde aber nicht stimmen, denn wir sehen im Schachzug kein Experiment (was wir übrigens *auch* könnten), sondern eine Handlung einer Rechnung.

Ts-213 533r[2] Es könnte Einer vielleicht sagen: In dem arithmetischen Spiel werden wir zwar multiplizieren 21×8_168, aber die Gleichung 21 × 8 = 168 wird nicht im Spiel vorkommen. Aber ist das nicht ein äußerlicher Unterschied? und warum sollen wir nicht auch so multiplizieren (und gewiß dividieren), daß die Gleichung als solche angeschrieben wird?

Ts-213 533r[3] Also kann man nur einwenden, daß in dem Spiel die Gleichung kein Satz ist. Aber was heißt das? Wodurch wird sie dann zu einem Satz? Was muß noch dazu kommen, damit sie ein Satz wird? – Handelt es sich nicht um die Anwendung der Gleichung (oder der Multiplikation)? – Und Mathematik ist es wohl dann, wenn es zum Übergang von einem Satz zu einem andern verwendet wird. Und so wäre das unterscheidende Merkmal zwischen Mathematik und Spiel mit dem Begriff des Satzes (nicht 'mathematischen Satzes') gekuppelt, und verliert damit für uns seine Aktualität.

Ts-213 533r[4] & 534r[1] Man könnte aber sagen, daß der eigentliche Unterschied darin bestehe, daß für Bejahung und Verneinung im Spiel kein Platz sei. Es wird da z.B. multipliziert und $21 \times 8 = 148$ wäre ein falscher Zug, aber "non ($21 \times 8 = 148$)", welches ein richtiger arithmetischer Satz ist, hätte in unserm Spiel nichts zu suchen.

Ts-213 534r[2] (Da mag man sich daran erinnern, daß in der Volksschule nie mit Ungleichungen gearbeitet wird, vom Kind nur die richtige Ausführung der Multiplikation verlangt wird und nie – oder höchst selten – die Konstatierung einer Ungleichung.)

Ts-213 534r[3] Wenn ich in unserm Spiel 21 × 8 ausrechne, und wenn ich es tue, um damit eine praktische Aufgabe zu lösen, so ist jedenfalls die Handlung der Rechnung in beiden Fällen die Gleiche (und auch für Ungleichungen könnte in einem Spiele Platz geschaffen werden). Dagegen ist mein übriges Verhalten zu der Rechnung jedenfalls in den zwei Fällen verschieden. Die Frage ist nun: kann man von dem Menschen, der im Spiel die Stellung "21 × 8 = 168" erhalten hat, sagen, er habe herausgefunden, daß 21 × 8 168 sei? Und was fehlt ihm dazu? Ich glaube, es fehlt nichts, es sei denn eine Anwendung der Rechnung.

Ts-213 534r[4] Die Arithmetik ein Spiel zu nennen, ist ebenso falsch, wie das Schieben von Schachfiguren (den Schachregeln gemäß) ein Spiel zu nennen; denn es kann auch eine Rechnung sein.

Ts-213 534r[5] & 535r[1] Man müßte also sagen: Nein, das Wort “Arithmetik” ist nicht der Name eines Spiels. (Das ist natürlich wieder eine Trivialität.) – Aber die Bedeutung des Wortes “Arithmetik” kann erklärt werden durch die Beziehung der Arithmetik zu einem arithmetischen Spiel, oder auch durch die Beziehung der Schachaufgabe zum Schachspiel. Dabei aber ist es *wesentlich*, zu erkennen, daß dieses Verhältnis nicht das ist, einer Tennisaufgabe zum Tennisspiel. Mit “Tennisaufgabe” meine ich etwa die Aufgabe, einen Ball unter gegebenen Umständen in bestimmter Richtung zurückzuwerfen. (Klarer wäre der Fall, vielleicht, einer Billardaufgabe.) Die Billardaufgabe ist keine mathematische Aufgabe (obwohl zu ihrer Lösung Mathematik angewendet werden kann). Die Billardaufgabe ist eine physikalische Aufgabe und daher “Aufgabe” im Sinne der Physik; die Schachaufgabe ist eine mathematische Aufgabe und daher “Aufgabe” in einem andern (im mathematischen) Sinn.

Ts-213 535r[2] In dem Kampf zwischen dem “Formalismus” und der “inhaltlichen Mathematik”, – was behauptet denn jeder Teil? Dieser Streit ist so ähnlich dem, zwischen Realismus und Idealismus! Darin z.B., daß er bald obsolet (geworden) sein wird und daß beide Parteien, entgegen ihrer täglichen Praxis, Ungerechtigkeiten behaupten.

Ts-213 535r[3] Die Arithmetik *ist* kein Spiel, niemandem wäre es eingefallen, unter den Spielen der Menschen die Arithmetik zu nennen.

Ts-213 535r[4] Worin besteht denn das Gewinnen und Verlieren in einem Spiel (oder das Ausgehen der Patience)? Natürlich nicht in der Konfiguration, die das Gewinnen – z.B. – hervorbringt. Wer gewinnt, muß durch eine eigene Regel festgestellt werden. ("Dame" und "Schlagdame" sind nur durch diese Regel unterschieden.)

Ts-213 536r[1] Konstatiert nun die Regel etwas, die sagt, "wer zuerst seine Steine im Feld des Andern hat, hat gewonnen"? Wie ließe sich das verifizieren? Wie weiß ich ob Einer gewonnen hat? Etwa daraus, daß er sich freut? Diese Regel sagt doch wohl: Du mußt versuchen, Deine Steine so rasch als möglich etc.. Die Regel in dieser Form bringt das Spiel schon mit dem Leben in Zusammenhang. Und man könnte sich denken, daß in einer Volksschule, in der das Schachspielen ein obligater Gegenstand wäre, die Reaktion des Lehrers auf das schlechte Spiel eines Schülers dieselbe wäre, wie die auf eine falsch gerechnete Rechenaufgabe.

Ts-213 536r[2] Ich möchte beinahe sagen: Im Spiel gibt es (*zwar*) kein "wahr" und "falsch", dafür gibt es aber in der Arithmetik kein "Gewinnen" und "Verlieren".

Ts-213 536r[3] Ich sagte einmal, es wäre denkbar, daß Kriege auf einer Art großem Schachbrett nach den Regeln des Schachspiels ausgefochten würden. Aber: Wenn es wirklich bloß nach den Regeln des Schachspiels ginge, dann brauchte man eben kein Schlachtfeld für diesen Krieg, sondern er könnte auf einem gewöhnlichen Brett gespielt werden. Und dann wäre es (eben) im *gewöhnlichen* Sinne kein Krieg. Aber man könnte sich ja auch eine Schlacht von den Regeln des Schachspiels geleitet denken. Etwa so, daß der "Läufer" mit der "Dame" nur kämpfen dürfte, wenn seine Stellung zu ihr es ihm im Schachspiel erlaubte, sie zu "nehmen".

Ts-213 536r[4] & 537r[1] Könnte man sich eine Schachpartie gespielt denken, d.h., sämtliche Spielhandlungen ausgeführt denken, aber *in einer andern Umgebung*, so daß dieser Vorgang uns nicht die Partie eines Spiels genannt würde? Gewiß, es könnte sich ja um eine *Aufgabe* handeln, die die Beiden miteinander lösen. (Und einen Fall für die Nützlichkeit einer solchen Aufgabe kann man sich ja nach dem Oberen leicht konstruieren.)

Ts-213 537r[2] Die Regel über das Gewinnen und Verlieren unterscheidet eigentlich nur zwei Pole. Welche Bewandtnis es (dann) mit dem hat, der gewinnt (oder verliert), geht sie eigentlich nichts an. Ob z.B. der Verlierende dann etwas zu zahlen hat. (Und ähnlich, kommt es uns ja vor, verhält es sich mit dem "richtig" und "falsch" im Rechnen.)

Ts-213 537r[3] & 538r[1] In der Logik geschieht immer wieder, was in dem Streit über das Wesen der Definition geschehen ist. Wenn man sagt, die Definition habe es nur mit Zeichen zu tun und ersetze bloß ein kompliziertes Zeichen durch ein einfacheres, so wehren sich die Menschen dagegen und sagen, die Definition leiste nicht *nur* das, oder es gebe eben verschiedene Arten von Definitionen und die interessante und wichtige sei nicht die (*reine*) "Verbaldefinition". Sie glaube nämlich, man nehme der Definition ihre Bedeutung, Wichtigkeit, wenn man sie als bloße Ersetzungsregel, die von Zeichen handelt, hinstellt. Während die *Bedeutung* der Definition in ihrer Anwendung liegt, quasi in ihrer Lebenswichtigkeit. Und eben das geht (*heute*) in dem Streit zwischen Formalismus, Intuitionismus, etc. vor sich. Es ist den Leuten unmöglich, die Wichtigkeit einer *Sache*, ihre Konsequenzen, ihre Anwendung, von ihr selbst zu unterscheiden; die Beschreibung einer Sache von der Beschreibung ihrer Wichtigkeit. Immer wieder hören wir (so), daß der Mathematiker mit dem Instinkt arbeitet (*oder etwa*, daß er nicht mechanisch nach der Art eines Schachspielers *vorgehe*), aber wir erfahren nicht, was das mit dem Wesen der Mathematik zu tun haben soll. Und wenn ein solches psychisches Phänomen in der Mathematik eine Rolle spielt, wie weit wir überhaupt exakt über die Mathematik reden können, und wie weit nur mit der Art der Unbestimmtheit, mit der wir über Instinkte, etc. reden müssen.

Ts-213 538r[2] Immer wieder möchte ich sagen: *Ich* kontrolliere die *Geschäftsbücher* der Mathematiker; die seelischen Vorgänge in den Inhabern, so wichtig sie sind, kümmern mich nicht.

Ts-213 539r[1] **12** *Es gibt keine Metamathematik.*

Ts-213 539r[2] Kein Kalkül kann ein philosophisches Problem entscheiden. Der Kalkül kann uns nicht prinzipielle Aufschlüsse über die Mathematik geben.

Ts-213 539r[3] Es kann daher auch keine "führenden Probleme" der mathematischen Logik geben, denn das wären solche, deren Lösung uns endlich berechtigen würde Arithmetik zu treiben, wie wir es tun.

Ts-213 539r[4] Und dazu können wir nicht auf dem Glücksfall der Lösung eines mathematischen Problems warten.

Ts-213 539r[5] & 540r[1] Ich sagte oben "Kalkül ist kein mathematischer Begriff"; das heißt, das Wort 'Kalkül' ist kein *Schachstein* der Mathematik. Es brauchte in der Mathematik nicht vorzukommen. – Und wenn es doch in einem Kalkül gebraucht wird, so ist dieser nun kein Metakalkül. Vielmehr ist dann *dieses Wort* wieder nur ein Schachstein wie alle andern. Auch die Logik ist keine Metamathematik, d.h. auch Operationen des logischen Kalküls können keine wesentlichen Wahrheiten *über* die Mathematik zu Tage fördern. Siehe hierzu das "Entscheidungsproblem" und ähnliches in der modernen mathematischen Logik.

Ts-213 540r[2] Durch Russell, aber besonders durch Whitehead, ist in die Philosophie eine Pseudoexaktheit gekommen, die die schlimmste Feindin wirklicher Exaktheit ist. Am Grunde liegt hier der Irrtum, ein Kalkül könne die metamathematische Grundlage der Mathematik sein.

Ts-213 540r[3] Die Zahl ist durchaus kein “grundlegender mathematischer Begriff”. Es gibt so viele Kalküle, in denen von Zahlen nicht die Rede ist. Und was die Arithmetik betrifft, so ist es mehr oder weniger willkürlich, was wir noch Zahlen nennen wollen. Und im Übrigen ist der Kalkül – z.B. – der Kardinalzahlen zu beschreiben, d.h. seine Regeln sind anzugeben, und damit sind die Grundlagen der Arithmetik gegeben.

Ts-213 540r[4] Lehre sie uns, dann hast Du sie begründet.

Ts-213 540r[5] Hilbert stellt Regeln eines bestimmten Kalküls als Regeln einer Metamathematik auf.

Ts-213 540r[6] & 541r[1] Es ist ein Unterschied, ob ein System auf ersten Prinzipien *ruht*, oder ob es bloß von ihnen ausgehend entwickelt wird. Es ist ein Unterschied, ob es, wie ein Haus, auf seinen untersten Mauern ruht oder ob es, wie etwa ein Himmelskörper, im Raum frei *schwebt* und wir bloß unten zu bauen angefangen haben, obwohl wir es auch es auch irgendwo anders hätten tun können.

Ts-213 541r[2] Die Logik und die Mathematik *ruht* nicht auf Axiomen; so wenig eine Gruppe auf den sie definierenden Elementen und Operationen ruht. *Hierin liegt der Fehler*, das Einleuchten, die Evidenz, der Grundgesetze als Kriterium der Richtigkeit in der Logik zu betrachten. Ein Fundament, das auf nichts steht, ist ein schlechtes Fundament.

Ts-213 541r[3] $(p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, {\sim}q) \vee ({\sim}p \,\&\, q) \vee ({\sim}p \,\&\, {\sim}q)$: Das wird meine Tautologie, und ich würde dann nur sagen, daß sich jeder "Satz der Logik" nach bestimmten Regeln auf diese Form bringen läßt. Das heißt aber dasselbe, wie: sich von ihr ableiten läßt; und hier wären wir bei der Russell'schen Art der Demonstration angelangt und alles, was wir dazusetzen ist nur, daß diese Ausgangsform selber kein selbständiger Satz ist und daß dieses und alle anderen "Gesetze der Logik" die Eigenschaft haben $p \,\&\, \mathrm{Log} = p$, $p \vee \mathrm{Log} = \mathrm{Log}$.

Ts-213 541r[4] Das Wesen des "logischen Gesetzes" ist es ja, daß es im Produkt mit irgendeinem Satz diesen Satz ergibt. Und man könnte den Kalkül Russells auch mit Erklärungen beginnen von der Art:

$p \supset p : q = q$

$p : p \vee q = p$ etc.

Ts-213 542r[1]

13 *Beweis der Relevanz*

Ts-213 542r[2] Wenn man die Lösbarkeit beweist, so muß in diesem Beweis irgendwie der Begriff 'Lösung' vorhanden sein. (In dem Mechanismus des Beweises muß irgend etwas diesem Begriff entsprechen.) Aber dieser Begriff ist nicht durch eine äußere Beschreibung zu repräsentieren, sondern nun wirklich darzustellen.

Ts-213 542r[3] Der Beweis der Beweisbarkeit eines Satzes wäre der Beweis des Satzes selbst. Dagegen gibt es etwas, was wir den Beweis der Relevanz nennen könnten. Das wäre z.B. der Beweis, der mich davon überzeugt, daß ich die Gleichung 17 × 38 = 456 nachprüfen *kann*, noch ehe ich es getan habe. Woran erkenne ich nun, daß ich 17 × 38 = 456 überprüfen kann, während ich das beim Anblick eines Integralausdrucks vielleicht nicht weiß? Ich erkenne offenbar, daß er nach einer bestimmten Regel gebaut ist und auch, wie die Regel zur Lösung der Aufgabe an dieser Bauart des Satzes *haftet*. Der Beweis der Relevanz ist dann etwa eine Darstellung der allgemeinen Form der Lösungsmethode, etwa der Multiplikationsaufgaben, die die allgemeine Form der Sätze erkennen läßt, deren Kontrolle sie möglich macht. Ich kann dann sagen, ich erkenne, daß diese Methode auch diese Gleichung nachprüft, obwohl ich die Nachprüfung noch nicht vollzogen habe.

Ts-213 542r[4] & 543r[1]

Wenn von Beweisen der Relevanz (und ähnlichen Dingen der Mathematik) geredet wird, so geschieht es immer, als hätten wir, abgesehen von den einzelnen Operationsreihen, die wir Beweise der Relevanz nennen, noch einen ganz scharfen umfassenden Begriff so eines Beweises oder überhaupt eines mathematischen Beweises. Während in Wirklichkeit dieses Wort wieder in vielen, mehr oder weniger verwandten Bedeutungen angewandt wird. (Wie etwa die Wörter "Volk", "König", "Religion", etc.; siehe Spengler.) Denken wir nur an die Rolle, die in der Erklärung so eines Wortes ein Beispiel spielt. Denn, wenn ich erklären will, was ich unter "Beweis" verstehe, werde ich auf Beispiele von Beweisen zeigen müssen, wie ich bei der Erklärung des Wortes "Apfel" auf Äpfel zeigen werde. Mit der Erklärung des Wortes "Beweis" verhält es sich nun wie mit der des Wortes "Zahl": ich kann das Wort "Kardinalzahl" erklären, indem ich auf Beispiele von Kardinalzahlen weise, ja, ich kann geradezu für dieses Wort das Zeichen "1, 2, 3, u.s.w. ad inf." gebrauchen; ich kann anderseits das Wort "Zahl" erklären, indem ich auf verschiedene Zahlenarten hinweise; aber dadurch werde ich den Begriff "Zahl" nun nicht so scharf fassen, wie früher den der Kardinalzahl, es sei denn, daß ich sagen will, daß nur diejenigen Gebilde, die wir heute als Zahlen Bezeichnen, den Begriff "Zahl" konstituieren. Dann aber kann man von keiner neuen Konstruktion sagen, sie sie die Konstruktion einer Zahlenart. Das Wort "Beweis" aber wollen wir ja so gebrauchen, daß es nicht einfach durch eine Disjunktion gerade heute üblicher Beweise definiert wird, sondern in Fällen gebrauchen, von denen wir uns heute "noch gar keine

Vorstellung machen können". Soweit der Begriff des Beweises *scharf* gefaßt ist, ist er es durch einzelne Beweise, oder durch Reihen von Beweisen (den Zahlenreihen analog) und das müssen wir bedenken, wenn wir uns anschicken, mit voller Exaktheit über Beweise der Relevanz, der Widerspruchsfreiheit, etc. etc. zu reden.

Ts-213 543r[2] & 544r[1] Man kann sagen: Ein Beweis der Relevanz wird den Kalkül des Satzes, auf den er sich bezieht, *ändern*. Einen Kalkül mit diesem Satz *rechtfertigen* kann er nicht; in dem Sinn, in welchem die Ausführung der Multiplikation 17×23 das Anschreiben der Gleichung $17 \times 23 = 391$ rechtfertigt. Wir müßten nur dem Wort "rechtfertigen" ausdrücklich jene Bedeutung geben. Dann darf man aber nicht glauben, daß die Mathematik, ohne diese Rechtfertigung, in irgend einem allgemeineren und allgemein feststehenden Sinne unerlaubt, oder mit einem Dolus behaftet sei. (Das wäre ähnlich, als wollte Einer sagen: "der Gebrauch des Wortes 'Steinhaufen' ist im Grunde unerlaubt, ehe wir nicht offiziell festgelegt haben, wieviel Steine einen Haufen machen". Durch so eine Festlegung würde der Gebrauch des Wortes "Haufen" modifiziert, aber nicht in irgend einem allgemein anerkannten Sinne 'gerechtfertigt'. Und wenn eine solche offizielle Definition gegeben würde, so wäre dadurch nicht der Gebrauch, den man früher von dem Wort gemacht hat, als *unrichtig* gekennzeichnet.)

Ts-213 544r[2] Der Beweis der Kontrollierbarkeit von 17 × 23 = 391 ist ‘Beweis’ in einem andern Sinne dieses Worts, als der, der Gleichung selbst. (Der Müller mahlt, der Maler malt: beide ...) Die Kontrollierbarkeit der Gleichung *ersehen* wir aus ihrem Beweis in analoger Weise, wie die Kontrollierbarkeit des Satzes “die Punkte A und B sind nicht durch eine Windung der Spirale getrennt” aus der Figur.

Und man sieht auch schon, daß der Satz, der die Kontrollierbarkeit aussagt, ‘Satz’ in einem andern Sinne ist, als der, dessen Kontrollierbarkeit behauptet wird. Und hier kann man wieder nur sagen: Sieh Dir den Beweis an, dann wirst Du sehen, *was* hier bewiesen wird, was “der bewiesene Satz” genannt wird.

Ts-213 544r[3] & 545r[1] Kann man sagen, daß wir zu jedem Schritt eines Beweises eine frische Intuition brauchen? (Individualität der Zahlen.) Es wäre etwa so: Ist mir eine allgemeine (variable) Regel gegeben, so muß ich immer von neuem erkennen, daß diese Regel auch *hier* angewendet werden kann (daß sie auch für *diesen* Fall gilt). Kein Akt der Voraussicht kann mir diesen Akt der *Einsicht* ersparen. Denn tatsächlich ist die Form, auf die die Regel angewandt wird, bei jedem neuen Schritte eine neue. – Es handelt sich aber hier nicht um einen Akt der *Einsicht*, sondern um einen Akt der *Entscheidung*.

Ts-213 545r[2] Der sogenannte Beweis der Relevanz steigt die Leiter zu *seinem* Satz nicht hinauf, denn dazu *muß* man jede Stufe nehmen, sondern zeigt nur, daß die Leiter in der Richtung zu jenem Satze führt. (In der Logik gibt es kein Surrogat.) Es ist auch der Pfeil, der die Richtung weist, kein Surrogat für das Durchschreiten aller Stufen bis zum bestimmten Ziel.

Ts-213 546r[1] 14 *Beweis der Widerspruchsfreiheit*

Ts-213 546r[2] Irgendetwas sagt mir: eigentlich dürfte ein Widerspruch in den Axiomen eines Systems nicht schaden, als bis er offenbar wird. Man denkt sich einen versteckten Widerspruch wie eine versteckte Krankheit, die schadet, obwohl (und vielleicht gerade deshalb weil) sie sich uns nicht deutlich zeigt. Zwei Spielregeln aber, die einander für einen bestimmten Fall widersprechen, sind vollkommen in Ordnung, bis dieser Fall eintritt und dann erst wird es nötig, durch eine weitere Regel zwischen ihnen zu entscheiden.

Ts-213 546r[3] Der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome, von dem die Mathematiker heute soviel Aufhebens machen. Ich habe das Gefühl: wenn in den Axiomen eines Systems ein Widerspruch wäre, so wäre das gar nicht so ein großes Unglück. Nichts leichter, als ihn zu beseitigen.

Ts-213 546r[4] & 547r[1] “Man darf ein System von Axiomen nicht benützen, ehe seine Widerspruchsfreiheit nachgewiesen ist.” ”In den Spielregeln dürfen keine Widersprüche vorkommen”. Warum nicht? “Weil man dann nicht wüßte, wie man zu spielen hat”? Aber wie kommt es, daß man auf den Widerspruch mit Zweifel reagiert? Auf den Widerspruch reagiert man überhaupt nicht. Man könnte nur sagen: Wenn das wirklich so gemeint ist (wenn der Widerspruch hier stehen *soll*, so versteh’ ich es nicht. *Oder*: ich hab’ es nicht gelernt. Ich verstehe die Zeichen nicht. Ich habe nicht gelernt, was ich daraufhin tun soll, ob es überhaupt ein Befehl ist; etc..

Ts-213 547r[2] Wie wäre es etwa, wenn man in der Arithmetik zu den üblichen *Axiomen* die Gleichung $2 \times 2 = 5$ hinzunehmen wollte? Das hieße natürlich, daß das Gleichheitszeichen nun seine Bedeutung geändert hätte, d.h., daß nun andere Regeln für das Gleichheitszeichen gelte.

Ts-213 547r[3] Wenn ich nun sagte: “also kann ich es nicht als Ersetzungszeichen gebrauchen; so hieße das, daß *seine* Grammatik nun nicht mehr mit der des Wortes “ersetzen” (“Ersetzungszeichen”, etc.) übereinstimmt. Denn das Wort “kann” in diesem Satz deutet nicht auf eine physische (physiologische) *psychologische*) Möglichkeit.

Ts-213 547r[4] Die Regeln dürfen einander nicht widersprechen”, das ist wie: “die Negation darf nicht verdoppelt eine Negation ergeben”. Es liegt nämlich in der Grammatik des Wortes “Regel”, daß “p & non-p” (wenn “p” eine Regel ist) keine Regel ist.

Ts-213 547r[5] & 548r[1] Das heißt, man könnte also *auch* sagen: die Regeln können einander widersprechen, wenn andre Regeln für das Wort “Regel” gelten – wenn das Wort “Regel” eine andere Bedeutung hat.

Ts-213 548r[2] Wir können eben auch hier nicht begründen (außer (*etwa*) biologisch oder historisch) und (*können*) nur beschreiben, wie das Wort “Regel” gebraucht wird.

Ts-213 548r[3] Es läßt sich nicht zeigen, beweisen, daß man gewisse Regeln als Regeln dieser Handlung gebrauchen *kann*. Außer, indem man zeigt, daß die Grammatik der *Bezeichnung* der Handlung mit der jener Regeln übereinstimmt.

Ts-213 548r[4] “In den Regeln *darf* kein Widerspruch sein”, das klingt so, wie eine Vorschrift: “in einer Uhr darf der Zeiger nicht locker auf seiner Welle sitzen”. Man erwartet sich dann eine Begründung: weil sonst ... Im ersten Falle könnte diese Begründung aber nur lauten: weil es sonst kein Regelverzeichnis ist. Es ist eben wieder ein Fall der grammatischen *Struktur*, die sich logisch nicht begründen läßt.

Ts-213 548r[5] & 549r[1] Zum indirekten Beweis, daß eine Gerade über einen Punkt hinaus nur *eine* Fortsetzung hat: Wir nahmen an, es könnte eine Gerade zwei Fortsetzungen haben. – Wenn wir das annehmen, so muß diese Annahme einen Sinn haben –. Was heißt es aber: das annehmen? Es heißt nicht, eine naturgeschichtlich falsche Annahme machen, wie etwa die, daß ein Löwe zwei Schwänze hätte. – Es heißt nicht, etwas annehmen, was gegen die Konstatierung einer Tatsache *spricht*. Es heißt vielmehr, eine Regel annehmen; und gegen die ist weiter nichts zu sagen, außer daß sie etwa einer anderen widerspricht und ich sie darum fallen lasse. Wenn im Beweis nun eine Gerade gezeichnet wird, die sich gabelt, so darf das an und für sich nicht absurd sein, und ich kann nur sagen: so etwas nenne ich keine Gerade.

Ts-213 549r[2] Wenn nachträglich ein Widerspruch gefunden wird, so waren vorher die Regeln noch nicht klar und eindeutig. Der Widerspruch macht also nichts, denn er ist dann durch das Aussprechen einer Regel zu entfernen.

Ts-213 549r[4] Warum dürfen sich Regeln nicht widersprechen? Weil es sonst keine Regeln wären.

Ts-213 550r[1] 15 *Die Begründung der Arithmetik, in der diese auf ihre Anwendungen vorbereitet wird.* (*Russell, Ramsey.*)

Ts-213 550r[2] Man empfindet immer eine Scheu, die Arithmetik zu begründen, indem man etwas über ihre Anwendung ausspricht. Sie scheint fest genug in sich selbst begründet zu sein. Und das kommt natürlich daher, daß die Arithmetik ihre eigene Anwendung ist.

Ts-213 550r[3] Man könnte sagen: Wozu die Anwendung der Arithmetik einschränken, sie sorgt für sich selbst. (Ich kann ein Messer herstellen ohne Rücksicht darauf, welche Klasse von Stoffen ich damit werde schneiden lassen; das wird sich dann schon zeigen.) Gegen die Abgrenzung des Anwendungsgebiets spricht nämlich das Gefühl, daß wir die Arithmetik verstehen können, ohne ein solches Gebiet im Auge zu haben. Oder sagen wir so: Der Instinkt sträubt sich gegen alles, was nicht bloß eine Analyse der schon vorhandenen Gedanken ist.

Ts-213 550r[4] & 551r[1] Man könnte sagen: Die Arithmetik ist eine Art Geometrie; d.h., was in der Geometrie die Konstruktionen auf dem Papier sind, sind in der Arithmetik die Rechnungen (auf dem Papier). – Man könnte sagen, sie ist eine allgemeinere Geometrie.

Ts-213 551r[2] Es handelt sich immer darum, ob und wie es möglich ist, die allgemeinste Form der Anwendung der Arithmetik darzustellen. Und hier ist eben das Seltsame, daß das in gewissem Sinne nicht nötig zu sein scheint. Und wenn es wirklich nicht nötig ist, dann ist es auch unmöglich.

Ts-213 551r[3] Es scheint nämlich die allgemeine Form ihrer Anwendung dadurch dargestellt zu sein, daß *nichts* über sie ausgesagt wird. (Und ist das eine mögliche Darstellung, so ist es auch die *einzig* richtige.)

Ts-213 551r[4] Der Sinn der Bemerkung, daß die Arithmetik eine Art Geometrie sei, ist eben, daß die arithmetischen Konstruktionen autonom sind, wie die geometrischen, und daher sozusagen ihre Anwendbarkeit selbst garantieren. Denn auch von der Geometrie muß man sagen können, sie sei ihre eigene Anwendung.

Ts-213 551r[5] (In dem Sinne von möglichen und wirklich gezogenen Geraden könnten wir auch von möglichen und wirklich dargestellten Zahlen reden.)

Ts-213 551r[6] Das ist eine arithmetische Konstruktion und in *etwas* erweitertem Sinn auch eine geometrische.

Ts-213 551r[7] & 552r[1] Angenommen, mit dieser Rechnung wollte ich folgende Aufgabe lösen: Wenn ich 11 Äpfel habe und Leute mit je 3 Äpfeln beteilen will, wieviele Leute kann ich beteilen? Die Rechnung liefert mir die Lösung 3. Angenommen nun, ich vollzöge alle Handlungen des Beteilens und am Ende hätten 4 Personen je 3 Äpfel in der Hand. Würde ich nun sagen, die Ausrechnung hat ein falsches Resultat ergeben? Natürlich nicht. Und das heißt ja nur, daß die Ausrechnung kein Experiment war. Es könnte scheinen, als berechtigte uns die mathematische Ausrechnung zu einer Vorhersagung, etwa, daß ich 3 Personen werde beteilen können und 2 Äpfel übrigbleiben werden. So ist es aber nicht. Zu dieser Vorhersagung berechtigt uns eine physikalische Hypothese, die außerhalb der Rechnung steht. Die Rechnung ist nur eine Betrachtung der logischen Formen, der Strukturen, und kann an sich nichts Neues liefern.

Ts-213 552r[2] Wenn 3 Striche auf dem Papier das Zeichen für die 3 sind, dann kann man sagen, die 3 ist in unserer Sprache so anzuwenden, wie sich 3 Striche anwenden lassen.

Ts-213 552r[3] Ich sagte: “Eine Schwierigkeit der Frege’schen Theorie ist die Allgemeinheit der Worte ‘Begriff’ und ‘Gegenstand’. Denn, da man Tische, Töne, Schwingungen und Gedanken zählen kann, so ist es schwer, sie alle unter einen Hut zu bringen”. – Aber was heißt es: “man *kann* sie zählen”? Doch, daß es *Sinn hat*, sie zu zählen. Wenn wir aber das wissen, *diese* grammatische Regel wissen, was brauchen wir uns da den Kopf über die andern grammatischen Regeln zu zerbrechen, wenn es sich uns nur um eine Rechtfertigung der Anwendung der Kardinalarithmetik handelt? Es ist nicht schwer “sie alle unter einen Hut zu bringen”, sondern sie sind, soweit das *für diesen Zweck* nötig ist, unter einen Hut gebracht.

Ts-213 552r[4] Die Arithmetik aber kümmert sich (wie wir alle sehr wohl wissen) überhaupt nicht um diese Anwendung. Ihre Anwendbarkeit sorgt für sich selbst.

Ts-213 553r[1] Daher ist alles ängstliche Suchen nach den Unterschieden zwischen Subjekt-Prädikat-Formen, aber auch die Konstruktion von Funktionen ‘in extension’ (Ramsey), zur Begründung der Arithmetik Zeitverschwendung.

Ts-213 553r[2] Die Gleichung 4 Äpfel + 4 Äpfel = 8 Äpfel ist eine Ersetzungsregel, die ich verwende, wenn ich nicht das Zeichen "4 + 4" durch "8", sondern das Zeichen 4 Äpfel + 4 Äpfel" durch "8 Äpfel" ersetze. Man muß sich aber davor hüten zu glauben "4 Äpfel + 4 Äpfel = 8 Äpfel" ist die konkrete Gleichung, dagegen 4 + 4 = 8 der abstrakte Satz, wovon die erste Gleichung nur eine spezielle Anwendung *ist*. So daß zwar die Arithmetik der Äpfel viel weniger allgemein ist, als die eigentliche allgemeine, aber eben in ihrem beschränkten Bereich (für Äpfel) gälte. – Es gibt aber keine "Arithmetik der Äpfel", denn die Gleichung mit den benannten Zahlen ist nicht ein Satz, der von Äpfeln handelt. Man kann sagen, daß in dieser Gleichung das Wort "Äpfel" keine Bedeutung hat. (Wie man es überhaupt von dem Zeichen in einer Zeichenregel sagen kann, die seine Bedeutung bestimmen hilft.)

Ts-213 553r[3] Wie kann man Vorbereitungen zum Empfang von etwas eventuell Existierendem treffen, – in dem Sinn, in welchem Russell und Ramsey das (*immer*) tun wollten? Man bereitet etwa die Logik für die Existenz von vielstelligen Relationen vor, oder für die Existenz einer unendlichen Zahl von Gegenständen. –

Ts-213 553r[4] & 554r[1] Nun kann man doch für die Existenz eines Dinges vorsorgen: Ich mache z.B. ein Kästchen, um den Schmuck hineinzulegen, der vielleicht einmal gemacht werden wird. – Aber hier kann ich doch sagen, was der Fall sein muß, – welcher Fall es ist, für den ich vorsorge. Ich kann diesen Fall jetzt so gut beschreiben, wie, nachdem er schon eingetreten ist; und auch dann, wenn er nie eintritt. (Lösung mathematischer Probleme.) Dagegen sorgen Russell und Ramsey für eine eventuelle Grammatik vor.

Ts-213 554r[2] & 555r[1] Man denkt einerseits, daß es die Mathematik mit der Art der Funktionen zu tun hat und ihren *Gegenständen*, von deren Anzahlen sie handelt. Aber man will sich nicht durch die uns jetzt bekannten Funktionen binden lassen und man weiß nicht, ob jemals eine gefunden werden wird, die 100 Argumentstellen hat; also muß man vorsorgen und eine Funktion konstruieren, die alles für die 100-stellige Relation vorbereitet, wenn sich eine finden sollte. – Was heißt es aber überhaupt: "es findet sich (oder: es gibt) eine 100-stellige Relation"? Welchen Begriff haben wir von ihr? oder auch von einer 2-stelligen? – Als Beispiel einer 2-stelligen Relation gibt man etwa die zwischen Vater und Sohn. Aber welche Bedeutung hat dieses Beispiel für die weitere logische Behandlung der 2-stelligen Relationen? Sollen wir uns jetzt statt jedes "aRb" vorstellen "a ist der Vater des b"? – Wenn aber nicht, ist dann das Beispiel, oder irgend eines überhaupt, essentiell? Spielt dieses Beispiel nicht die gleiche Rolle, wie eines in der Arithmetik, wenn ich jemandem $3 \times 6 = 18$ an 3 Reihen zu je 6 Äpfeln erkläre? Hier handelt es sich um unsern Begriff der *Anwendung*. – Man hat etwa die Vorstellung von einem Motor, der erst leer geht, und dann eine Arbeitsmaschine treibt.

Ts-213 555r[2] Aber was gibt die Anwendung der Rechnung? Fügt sie ihr einen neuen Kalkül zu? dann ist sie ja jetzt eine *andere* Rechnung. Oder gibt sie ihr in irgend einem, der Mathematik (Logik) wesentlichem, Sinne Substanz? Wie kann man dann überhaupt, auch nur zeitweise, von der Anwendung absehen?

Ts-213 555r[3] Nein, die Rechnung mit Äpfeln ist wesentlich dieselbe, wie die mit Strichen oder Ziffern. Die Arbeitsmaschine setzt den Motor fort, aber die Anwendung (in diesem Sinne) nicht die Rechnung.

Ts-213 555r[4] Wenn ich nun sage: "die Liebe ist ein Beispiel einer 2-stelligen Relation", – sage ich hier etwas über die Liebe aus? Natürlich nicht. Ich gebe eine Regel für den Gebrauch des Wortes "Liebe" und will etwa sagen, daß wir *dieses* Wort z.B. so gebrauchen.

Ts-213 556r[1] Nun hat man aber doch das Gefühl, daß mit dem Hinweis auf die 2-stellige Relation 'Liebe' in die Hülse des Relationskalküls Sinn gesteckt wurde. – Denken wir uns eine geometrische Demonstration statt an einer Zeichnung oder an analytischen Symbolen an einem Lampenzylinder vorgenommen. In wiefern ist hier von der Geometrie eine Anwendung gemacht? Tritt denn der Gebrauch des Glaszylinders als Lampenglas in die geometrische Überlegung ein? Und tritt der Gebrauch des Wortes "Liebe" in einer Liebeserklärung in meine Überlegungen über die 2-stelligen Relationen ein?

Ts-213 556r[2] Wir haben es mit verschiedenen Verwendungen, Bedeutungen, des Wortes "Anwendung" zu tun. "Die Multiplikation wird in der Division angewandt"; "der Glaszylinder wird in der Lampe angewandt"; "die Rechnung ist auf diese Äpfel angewandt".

Ts-213 556r[3] Hier kann man nun sagen: Die Arithmetik ist ihre eigene Anwendung. Der Kalkül ist seine eigene Anwendung. Wir können nicht in der Arithmetik für eine grammatische Anwendung vorsorgen. Denn, ist die Arithmetik nur ein Spiel, so ist für sie auch ihre Anwendung nur ein Spiel, und entweder das gleiche Spiel (dann führt es uns nicht weiter), oder ein anderes – und dann konnten wir das schon in der *reinen* Arithmetik betreiben.

Ts-213 556r[4] & 557r[1] Wenn also der Logiker sagt, er habe für eventuell existierende 6-stellige Relationen in der Arithmetik vorgesorgt, so können wir fragen: Was wird denn nun zu dem, was Du vorbereitet hast, hinzukommen, wenn es seine Anwendung findet? Ein neuer Kalkül? – aber den hast Du ja eben nicht vorbereitet. Oder etwas, was den Kalkül nicht tangiert? – dann interessiert uns das nicht, und der Kalkül, den Du uns gezeigt hast, ist uns Anwendung genug.

Ts-213 557r[2] Die unrichtige Idee ist, daß die Anwendung eines Kalküls in der Grammatik der wirklichen Sprache, ihm eine Realität zuordnet, eine Wirklichkeit gibt, die er früher nicht hatte.

Ts-213 557r[3] Aber, wie gewöhnlich in unserem Gebiet, liegt hier der Fehler nicht darin, daß man etwas Falsches glaubt, sondern darin, daß man auf eine irreführende Analogie hinsieht.

Ts-213 557r[4] Was geschieht denn, wenn die 6-stellige Relation gefunden wird? Wird quasi ein Metall gefunden, das nun die gewünschten (vorher beschriebenen) Eigenschaften (das richtige spezifische Gewicht, die Festigkeit etc.) hat? Nein; ein *Wort* wird gefunden, das wir tatsächlich in unsrer Sprache so verwenden, wie wir etwa den Buchstaben R verwendet haben. "Ja, aber dieses Wort hat doch Bedeutung und "R" hatte keine! Wir sehen also jetzt, daß dem "R" etwas entsprechen kann". Aber die Bedeutung des Wortes besteht ja nicht darin, daß ihm etwas entspricht. Außer etwa, wo es sich um Namen und benannten Gegenstand handelt, aber da setzt der Träger des Namens nur den Kalkül fort, also die Sprache. Und es ist *nicht* so, wie wenn man sagt: "diese Geschichte hat sich tatsächlich zugetragen, sie war nicht bloße Fiktion".

Ts-213 557r[5] & 558r[1] Das alles hängt auch mit dem falschen Begriff der logischen Analyse Zusammen, den Russell, Ramsey und ich hatten. So daß man auf eine endliche logische Analyse der Tatsachen wartet, wie auf eine chemische von Verbindungen. Eine Analyse, durch die man dann etwa eine 7-stellige Relation wirklich findet, wie ein Element, das tatsächlich das spezifische Gewicht 7 hat.

Ts-213 558r[2] Die Grammatik ist für uns ein reiner Kalkül. (Nicht die Anwendung eines auf die Realität.)

Ts-213 558r[3] & 559r[1] & 560r[1] & 561r[1]

"Wie kann man Vorbereitungen für etwas eventuell Existierendes treffen" heißt: Wie kann man die Arithmetik auf eine Logik aufbauen, in der man im Speziellen noch Resultate einer Analyse der Sätze erwartet, und dabei für alle eventuellen Resultate durch eine Konstruktion a priori aufkommen wollen? – Man will sagen: "Wir wissen nicht ob es sich nicht herausstellen wird, daß es keine Funktionen mit 4 Argumentstellen gibt, oder, daß es nur 100 Argumente gibt, die in Funktionen *einer* Variablen sinnvoll eingesetzt werden können. Gibt es z.B. (die Annahme scheint immerhin möglich) nur *eine* solche Funktion F und 4 Argumente a, b, c, d, und hat es in diesem Falle Sinn, zu sagen '2 + 2 = 4', da es keine Funktionen gibt, um die Teilung in 2 und 2 zu bewerkstelligen?" Und nun, sagt man sich, werden wir für alle eventuellen Fälle vorbauen. Aber das heißt natürlich nichts: Denn einerseits baut der Kalkül nicht für eine eventuelle Existenz vor, sondern er konstruiert sich die Existenz, die er überhaupt braucht. Anderseits sind die scheinbaren hypothetischen Annahmen über die logischen Elemente (den logischen Aufbau) der Welt nichts andres, als Angaben der Elemente eines Kalküls; und die können freilich auch so getroffen werden, daß es *darin* ein 2 + 2 nicht gibt. Treffen wir etwa Vorbereitungen für die Existenz von 100 Gegenständen, indem wir 100 Namen einführen und einen Kalkül mit ihnen. Und nehmen wir jetzt an, es werden wirklich 100 Gegenstände gefunden. Aber wie ist das, wenn jetzt den Namen Gegenstände zugeordnet werden, die ihnen früher nicht zugeordnet waren? ändert sich jetzt der Kalkül? – was hat diese Zuordnung überhaupt mit ihm zu tun? Erhält er durch sie mehr Wirklichkeit? Oder gehörte er früher bloß zur Mathematik, jetzt aber zur Logik? – Was ist das für eine Frage: “gibt es 3-stellige Relationen”, “gibt es 1000 Gegenstände”? Wie ist das zu entscheiden? – Aber es ist doch Tatsache, daß wir eine 2-stellige Relation angeben können, etwa die Liebe, und eine 3-stellige, etwa die Eifersucht, aber, vielleicht, nicht eine 27-stellige! – Aber was heißt es “eine 2-stellige Relation angeben”? Das klingt (ja) so, als würden wir auf ein Ding hinweisen und sagen “siehst Du, das ist so ein Ding” (wie wir es nämlich vorher beschrieben haben). Aber so etwas findet ja gar nicht statt (der Vergleich von dem Hinweisen ist gänzlich falsch). “Die Beziehung der Eifersucht kann nicht in 2-stellige Beziehungen aufgelöst werden”: das klingt ähnlich wie: “Alkohol kann nicht in Wasser und eine feste Substanz zerlegt werden”. Liegt das nun in der Natur der Eifersucht? (Vergessen wir nicht: der Satz “A ist wegen B auf C eifersüchtig” kann ebenso wenig zerlegt werden wie der: “A ist wegen B auf C nicht eifersüchtig”.) Das, worauf man hinweist, ist etwa die Gruppe der Leute A, B und C. – “Aber wenn nun Lebewesen plötzlich den 3-dimensionalen Raum kennen lernten, nachdem sie bisher nur die Ebene kannten, aber in ihr doch eine 3-dimensionale Geometrie entwickelt hätten?!” Würde diese Geometrie *nun* geändert, würde sie inhaltsreicher? – “Ja, aber ist es denn nicht so, als hätte ich mir z.B. einmal beliebige Regeln gesetzt, die es mir verböten in meinem Zimmer bestimmte Wege zu gehen, die ich, was die physikalischen Hindernisse betrifft, ohne weiteres gehen könnte, – und als würden dann die physikalischen Bedingungen eintreten, etwa Möbel in das Zimmer gestellt, die mich nun zwängen, mich nach den Regeln zu bewegen, die ich mir erst willkürlich gegeben hätte? Wie also der 3-dimensionale Kalkül noch ein Spiel war, da gab es eigentlich noch keine 3 Dimensionen; denn das x, y, z gehorchten nur den Regeln, weil ich es so wollte; jetzt, wo wir sie mit den wirklichen 3 Dimensionen gekuppelt haben, *können* sie sich nicht mehr anders bewegen". Aber das ist eine bloße Fiktion. Denn hier handelt es sich nicht um eine Verbindung mit der Wirklichkeit, die nun die Grammatik in ihrer Bahn hält! Die "Verbindung der Sprache mit der Wirklichkeit", etwa durch die hinweisenden Definitionen, macht die Grammatik nicht zwangsläufig (rechtfertigt die Grammatik nicht). Denn diese bleibt immer nur ein frei im Raume schwebender Kalkül, der nur erweitert, aber nicht gestützt werden kann. Die "Verbindung mit der Wirklichkeit" erweitert nur die Sprache, aber zwingt sie zu nichts. Wir reden von der Auffindung einer 27-stelligen Relation: aber einerseits kann mich keine Entdeckung zwingen, (das *Zeichen und*) den Kalkül der 27-stelligen Relation zu gebrauchen; andrerseits kann ich *diesen Kalkül* selbst mittels dieser Notation beschreiben.

Ts-213 561r[2] Wenn man in der Logik scheinbar mehrere verschiedene Universen betrachtet (wie Ramsey), so betrachtet man in Wirklichkeit verschiedene Spiele. Die Erklärung eines "Universums" würde z.B. in Ramsey's Fall einfach die Definition $(\exists x).fx \overset{\text{def}}{=} fa \vee fb \vee fc \vee fd$ sein.

Ts-213 562r[1]

16 ***Ramsey's Theorie der Identität.***

Ts-213 562r[2] Die Theorie der Identität bei Ramsey macht den Fehler, den man machen würde, wenn man sagte, ein gemaltes Bild könne man auch als Spiegel benutzen, wenn auch nur für eine einzige Stellung, wo dann übersehen wird, daß das Wesentliche am Spiegel gerade das ist, daß man aus ihm die Stellung des Körpers vor dem Spiegel schließen kann, während man im Fall des gemalten Bildes erst wissen muß, daß die Stellungen übereinstimmen, ehe man das Bild als Spiegelbild auffassen kann.

Ts-213 562r[3] Wenn die Dirichlet'sche Auffassung der Funktion einen strengen Sinn hat, so muß sie sich in einer *Definition* ausdrücken, die das Funktionszeichen mit der Tabelle als gleichbedeutend erklärt.

Ts-213 562r[4] & 563r[1] & 564r[1] & 565r[1] Ramsey definiert x = y als $(Fe).Fex \equiv Fe$.

Aber nach den Erklärungen, die er über seine Funktionszeichen "Fe" gibt, ist $(Fe).Fex \equiv Fex$ die Aussage: "jeder Satz ist sich selbst äquivalent" $(Fe).Fex \equiv Fey$ die Aussage: "jeder Satz ist jedem Satz äquivalent".

Er hat also mit seiner Erklärung nichts andres erreicht, als was die zwei Definitionen

$x = x \stackrel{\text{def}}{=} \text{Tautologie}$

$x = y \stackrel{\text{def}}{=} \text{Kontradiktion}$

bestimmen. (Das Wort "Tautologie" kann hier durch jede beliebige Tautologie ersetzt werden und das gleiche gilt für "Kontradiktion".) Soweit ist nichts geschehn, als Erklärungen der zwei verschiedenen Zeichenformen $x = x$ und $x = y$ zu geben. Diese Erklärungen können natürlich durch zwei Klassen von Erklärungen ersetzt werden, z.B.:

a = ab = bc = c | = Taut. | | a = bb = cc = a | = Cont.

Nun aber schreibt Ramsey:

"$(\exists x,y) . x \neq y$", d.h. "$(\exists x,y)$. non $(x = y)$", –

dazu hat er aber gar kein Recht: denn, was bedeutet in diesem Zeichen das "$x = y$"? Es ist ja weder das Zeichen "$x = y$", welches ich in der Definition oben gebraucht habe, noch natürlich das "$x = x$" in der vorhergehenden Definition. Also ist es ein noch ein noch unerklärtes Zeichen. Um übrigens die Müßigkeit jener Definitionen einzusehen, lese man sie (wie sie der Unvoreingenommene lesen würde) so: Ich erlaube, statt des Zeichens "Taut.", dessen Gebrauch wir kennen, das Zeichen "$a = a$" oder "$b = b$", etc. zu setzen; und statt des Zeichens "Cont." ("non-Taut.") die Zeichen "$a = b$", "$a = c$", etc.. Woraus übrigens hervorgeht, daß

$(a = b) = (c = d) = (a \neq a) =$ etc.!

Es braucht wohl nicht gesagt zu werden, daß ein so definiertes Gleichheitszeichen nichts mit demjenigen zu tun hat, welches wir zum Ausdruck einer Ersetzungsregel brauchen. Ich kann nun "$(\exists x,y) . x \neq y$" natürlich wieder erklären; etwa als $a \neq a . \vee . a \neq b . \vee . b \neq c . \vee . a \neq c$; diese Erklärung aber ist eigentlich Humbug und ich sollte unmittelbar schreiben $(\exists x,y) . x \neq y \overset{\text{def}}{=}$ Taut.. (D.h. das Zeichen auf der linken Seite würde mir als ein neues – unnötiges – Zeichen für "Taut." gegeben.) Denn wir dürfen nicht vergessen, daß nach *der* Erklärung "a = a", "a = b", etc. unabhängige Zeichen sind und nur insofern zusammenhängen, als eben die Zeichen "Taut." und "Cont.". Die Frage ist hier die nach der Nützlichkeit der "extensiven" Funktionen, dann die Ramsey'sche Erklärung des Gleichheitszeichens ist ja so eine Bestimmung durch die Extension. Welcher Art ist nun die extensive Bestimmung einer Funktion? Sie ist offenbar eine Gruppe von Definitionen, z.B. die: fa = pfb = qfc = r | DefDefDef Diese Definitionen erteilen uns die Erlaubnis, statt der uns bekannten Sätze "p", "q", "r" die Zeichen "fa", "fb", "fc" zu setzen. Zu sagen, durch diese drei Definitionen werde die Funktion f(x) bestimmt, sagt gar nichts, oder dasselbe, was die drei Definitionen sagen. Denn die Zeichen "fa", "fb", "fc" sind Funktion und Argument nur, sofern es auch die Wörter "Ko(rb)", "Ko(pf)" und "Ko(hl)" sind. (Es macht dabei keinen Unterschied, ob die "Argumente" "rb", "pf", "hl" sonst noch als Wörter gebraucht werden, oder nicht.) (Welchen Zweck also die Definitionen haben können, außer den, uns irrezuführen, ist schwer einzusehen.) Das Zeichen "(∃x). fx" heißt zunächst gar nichts; denn die Regeln für Funktionen im alten Sinn des Wortes gelten ja hier nicht. Für diese wäre eine Definition fa = ... Unsinn. Das Zeichen "(∃x). fx" ist, wenn keine ausdrückliche Erklärung dafür gegeben wird, nur wie ein Rebus zu verstehen, in welchem auch die Zeichen eine Art uneigentliche Bedeutung haben. Jedes der Zeichen "a = a", "a = c", etc. in den Definitionen (a = a) $\overset{\text{def}}{=}$ Taut., etc. ist ein *Wort*. Der Endzweck der Einführung der extensiven Funktionen war übrigens die Analyse von Sätzen über unendliche Extensionen und dieser Zweck ist verfehlt, da eine extensive Funktion durch eine Liste von Definitionen eingeführt wird.

Ts-213 565r[2] Es besteht eine Versuchung, die Form der Gleichung für die Form von Tautologien und Kontradiktionen zu halten, und zwar darum, weil es scheint, als könne man sagen, x = x ist selbstverständlich wahr (und) x = y selbstverständlich falsch. Eher noch kann man natürlich sagen, daß x = x die Rolle einer Tautologie spielt, als x = y die der Kontradiktion, da ja alle richtigen (und "sinnvollen" Gleichungen der Mathematik von der Form x = y sind. Man könnte x = x eine degenerierte Gleichung nennen (Ramsey nannte sehr richtig Tautologien und Kontradiktionen degenerierte Sätze) und zwar eine richtige degenerierte Gleichung (den Grenzfall einer Gleichung). Denn wir gebrauchen Ausdrücke der Form x = x wie richtige Gleichungen, wobei wir uns vollkommen bewußt sind, daß es sich um degenerierte Gleichungen handelt. Im gleichen Fall sind Sätze in geometrischen Beweisen, wie etwa: "der Winkel   ist gleich dem Winkel , der Winkel ist sich selbst gleich ...". Man könnte nun einwenden, daß richtige Gleichungen der Form x = y auch Tautologien, dagegen falsche, Kontradiktionen sein müßten, weil man ja die richtige Gleichung muß beweisen können und das, indem man die beiden Seiten der Gleichung transformiert, bis eine Identität x = x herauskäme. Aber obwohl durch diesen Prozeß die erste Gleichung als richtig erwiesen ist und insofern die Identität x = x das Endziel der Transformationen war, so ist sie nicht das Endziel in dem Sinne, als hätte man durch die Transformationen der Gleichung ihre richtige Form geben wollen, wie man einen krummen Gegenstand zurechtbiegt, und als habe sie nun in der Identität diese vollkommene Form (*endlich*) erreicht. Man kann also nicht sagen: die richtige

Gleichung ist ja *eigentlich* eine Identität. Sie ist eben *keine* Identität.

Ts-213 566r[1] **17** *Der Begriff der Anwendung der Arithmetik (Mathematik).*

Ts-213 566r[2] Wenn man sagt: “es muß der Mathematik wesentlich sein, daß sie angewandt werden kann”, so meint man, daß diese *Anwendbarkeit* nicht die eines Stückes Holz ist, von dem ich sage “das werde ich zu dem und dem anwenden können”.

Ts-213 566r[3] & 567r[1] Die Geometrie ist nicht die Wissenschaft (Naturwissenschaft) von den geometrischen Ebenen, geometrischen Geraden und geometrischen Punkten, im Gegensatz etwa zu einer anderen Wissenschaft, die von den groben, physischen Geraden, Strichen, Flächen etc. handelt und *deren* Eigenschaften angibt. Der Zusammenhang der Geometrie mit Sätzen des praktischen Lebens, die von Strichen, Farbgrenzen, Kanten und Ecken etc. handeln, ist nicht der, daß sie über ähnliche Dinge spricht, wie diese Sätze, wenn auch über *ideale* Kanten, Ecken, etc.; sondern der, zwischen diesen Sätzen und ihrer Grammatik. Die angewandte Geometrie ist die Grammatik der Aussagen über die räumlichen Gegenstände. Die sogenannte geometrische Gerade verhält sich zu einer Farbgrenze nicht wie etwas Feines zu etwas Grobem, sondern wie Möglichkeit zur Wirklichkeit. (Denke an die Auffassung der Möglichkeit als Schatten der Wirklichkeit.)

Ts-213 Man kann eine Kreisfläche beschreiben, die durch
567r[2] Durchmesser in 8 kongruente Teile geteilt ist, aber es ist sinnlos, das von einer elliptischen Fläche zu sagen. Und darin liegt, was die Geometrie *in dieser Beziehung* von der Kreis- und Ellipsenfläche aussagt.

Ts-213 Ein Satz, der auf einer falschen Rechnung beruht (wie etwa “er
567r[3] teilte das 3 m lange Brett in 4 Teile zu je 1 m”) hat keinen Sinn und das wirft ein Licht auf den Sinn der Ausdrücke “Sinn haben” und “etwas mit dem Satz meinen”.

Ts-213 Wie ist es mit dem Satz “die Winkelsumme im Dreieck ist 180
567r[4] Grad”? Dem sieht man es jedenfalls nicht an, daß er ein Satz der Syntax ist. Der Satz “Gegenwinkel sind gleich” heißt, ich werde, wenn sie sich bei der Messung nicht als gleich erweisen, die Messung für falsch erklären und “die Winkelsumme im Dreieck ist 180 Grad” heißt, ich werde, wenn sie sich bei einer Messung nicht als 180 Grad erweist, einen Messungsfehler annehmen. Der Satz ist also ein Postulat über die Art und Weise der Beschreibung der Tatsachen. Also ein Satz der Syntax.

Ts-213 18 ****Über Kardinalzahlen.
568r[1]

Ts-213 ***Kardinalzahlenarten.***
569r[1]

Was die Zahlen sind? – Die Bedeutungen der Zahlzeichen; und
Ts-213 die Untersuchung dieser Bedeutung ist die Untersuchung der
569r[2] Grammatik der Zahlzeichen.

Ts-213 569r[3] Wir suchen nicht nach einer Definition des Zahl-Begriffs, sondern nach einer Klärung der Grammatik des Wortes “Zahl” und der Zahlwörter.

Ts-213 569r[4] Es gibt unendlich viele Kardinalzahlen, weil *wir* dieses unendliche System konstruieren und es das der Kardinalzahlen nennen. Es gibt auch ein Zahlensystem “1, 2, 3, 4, 5, viele” und auch eines: “1, 2, 3, 4, 5,”. Und warum sollte ich das nicht auch ein System von Kardinalzahlen nennen? (und also ein endliches).

Ts-213 569r[5] & 570r[1] Daß das axiom of infinity nicht ist, wofür Russell es gehalten hat, daß es weder ein Satz der Logik, noch auch – wie es da steht – ein Satz der Physik ist, ist klar. Ob der Kalkül damit, in eine ganz andre Umgebung gebracht (in ganz anderer “Interpretation”), irgendwo eine praktische Anwendung finden könnte, weiß ich nicht. Von den logischen Begriffen, z.B. von dem (oder: einem) der Unendlichkeit, könnte man sagen: ihre Essenz beweise ihre Existenz.

Ts-213 570r[2] (Frege hätte noch gesagt: “es gibt vielleicht Völker, die in der Kenntnis der Kardinalzahlenreihe nicht über die 5 hinausgekommen sind (und etwa das Übrige der Reihe nur in unbestimmter Form sehen), aber diese Reihe existiert unabhängig von uns”. Existiert das Schachspiel unabhängig von uns, oder nicht? –)

Ts-213 570r[3] Eine sehr interessante Erwägung über die Stellung des Zahlbegriffs in der Logik ist die: Wie steht es mit dem Zahlbegriff, wenn ein Volk keine Zahlwörter besitzt, sondern sich statt dieser *immer* eines Abakus bedient, etwa einer Russischen Rechenmaschine? (Nichts wäre interessanter, als die Arithmetik dieser Menschen zu untersuchen und man verstünde wirklich, daß es hier keinen Unterschied zwischen 20 und 21 gibt.)

Ts-213 570r[4] & 571r[1] Könnte man auch eine Zahlenart den Kardinalzahlen entgegensetzen, deren Reihe der der Kardinalzahlen ohne der 5 entspräche? Oh ja: nur wäre diese Zahlenart zu *nichts* zu brauchen, wozu die Kardinalzahlen es sind. Und die 5 fehlt diesen Zahlen nicht, wie ein Apfel, den man aus einer Kiste voller Äpfel herausgenommen hat und wieder hineinlegen kann, sondern die 5 fehlt dem Wesen dieser Zahlen; sie *kennen* die 5 nicht (wie die Kardinalzahlen die Zahl ½ nicht kennen). Angewendet würden also diese Zahlen (wenn man sie so nennen will) in einem Fall, in dem die Kardinalzahlen (mit der 5) nicht mit Sinn angewendet werden könnten. (Zeigt sich hier nicht die Unsinnigkeit des Geredes von der "Grundintuition"?)

Ts-213 571r[2] Wenn die Intuitionisten von der "Grundintuition" sprechen, – ist diese ein psychologischer Prozeß? Und wie kommt er dann in die Mathematik? Oder ist, was sie meinen, nicht doch nur ein Urzeichen (im Sinne Freges); ein Bestandteil eines Kalküls?

Ts-213 571r[3] So seltsam es klingt, so ist es möglich, die Primzahlen bis – sagen wir – zur 7 zu kennen und daher ein endliches System von Primzahlen zu besitzen. Und was wir die Erkenntnis nennen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, ist in Wahrheit die Erkenntnis eines neuen, und mit dem andern gleichberechtigten, Systems.

Ts-213 571r[4] Wenn man bei geschlossenen Augen ein Flimmern sieht, unzählige Lichtpünktchen, die kommen und verschwinden – wie man es etwa beschreiben würde – so hat es keinen Sinn, hier von einer 'Anzahl' der zugleich gesehenen Pünktchen zu reden. Und man kann nicht sagen "es sind immer eine bestimmte Anzahl von Lichtpünktchen da, wir wissen sie bloß nicht"; dies entspräche einer Regel, die dort angewandt wird, wo von einer Kontrolle dieser Anzahl gesprochen werden kann.

Ts-213 571r[5] & 572r[1] Es hat Sinn zu sagen: Ich verteile viele unter viele. Aber der Satz "ich konnte die vielen Nüsse nicht unter die vielen Menschen verteilen" kann nicht heißen, daß es logisch unmöglich war. Man kann auch nicht sagen: "in manchen Fällen ist es möglich, viele unter viele zu verteilen und in manchen nicht": denn darauf frage ich: in *welchen* Fällen ist dies möglich und in welchen unmöglich? und darauf könnte nicht mehr im Viele-System geantwortet werden.

Ts-213 572r[2] Von einem Teil meines Gesichtsfeldes zu sagen, er habe keine Farbe, ist Unsinn; ebenso – natürlich auch – zu sagen, er habe Farbe (oder, eine Farbe). Wohl aber hat es Sinn zu sagen, er habe nur *eine* Farbe (sei einfärbig, oder *gleichfärbig*), er habe mindestens zwei Farben, nur zwei Farben, u.s.w.. Ich kann also in dem Satz "dieses Viereck in meinem Gesichtsfeld hat mindestens zwei Farben" statt "zwei" nicht "eine" substituieren. Oder auch: "das Viereck hat nur eine Farbe" heißt nicht – analog $(\exists x).fx \ \& \ \text{non} \ (\exists x,y).fx \ \& \ fy$ – "das Viereck hat eine Farbe, aber nicht zwei Farben".

Ts-213 573r[1] & 574r[1] & 575r[1]

Ich rede hier von dem Fall, in dem es sinnlos ist zu sagen, "der Teil des Raumes habe keine Farbe". Wenn ich die gleichfärbigen (einfärbigen) Flecke in dem Viereck zähle, so hat es übrigens Sinn zu sagen, es seien keine solchen vorhanden, wenn die Farbe des Vierecks sich kontinuierlich ändert. Es hat dann natürlich auch Sinn zu sagen, in dem Viereck sei "ein gleichfärbiger Fleck oder mehrere" und auch, das Viereck habe eine Farbe aber nicht zwei Farben. – Von diesem Gebrauch aber des Satzes "das Viereck hat keine Farbe" sehe ich jetzt ab und spreche von einem System, in welchem, daß eine *Fläche* eine Farbe hat, selbstverständlich ist also, richtig ausgedrückt, in welchem dieser Satz Unsinn ist. Wenn man den Satz selbstverständlich nennt, so meint man eigentlich das, was eine grammatische Regel ausdrückt, die die Form der Sätze über den Gesichtsraum, z.B., beschreibt. Wenn man nun die Zahlangabe der Farben im Viereck mit dem Satz "in dem Viereck ist eine Farbe" beginnt, dann darf das natürlich nicht der Satz der Grammatik über die "Färbigkeit" des Raumes sein. Was meint man, wenn man sagt "der Raum ist färbig"? (Und, eine sehr interessante Frage: welcher Art ist diese Frage?) Nun, man sieht etwa zur Bestätigung herum und blickt auf die verschiedenen Farben um sich her und möchte etwa sagen: wohin ich schaue, ist eine Farbe. *Oder*: Es ist doch alles färbig, alles sozusagen angestrichen. Man denkt sich hier die Farben im Gegensatz zu einer Art (von) Farblosigkeit, die aber bei näheren Zusehen wieder zur Farbe wird. Wenn man übrigens zur Bestätigung sich umsieht, so schaut man vor allem auf ruhige und einfärbige Teile des Raumes und lieber nicht auf bewegte, unklar gefärbte (fließendes Wasser, Schatten, etc.). Muß man sich dann gestehen, daß man eben alles Farbe nennt, was man sieht, so will man es nun als eine Eigenschaft des Raumes an und für sich (nicht mehr der Raumteile) aussagen, daß er färbig sei. Das heißt aber, vom Schachspiel zu sagen, daß es das Schachspiel sei und es kann nun nur auf eine Beschreibung des Spiels hinauslaufen. Und nun kommen wir zu einer Beschreibung der räumlichen Sätze; aber ohne (eine) Begründung, und als müßte man sie mit einer andern Wirklichkeit in Übereinstimmung bringen. Zur Bestätigung des Satzes "der Gesichtsraum ist färbig" sieht man sich (*etwa*) um und sagt: das hier ist schwarz, und schwarz ist eine Farbe; das ist weiß, und weiß ist eine Farbe; u.s.w.. "Schwarz ist eine Farbe" aber faßt man so auf, wie "Eisen ist ein Metall" (oder vielleicht besser "Gips ist eine Schwefelverbindung"). Mache ich es sinnlos zu sagen, ein Teil des Gesichtsraumes habe keine Farbe, so wird die (*Frage nach der*) Analyse der Angabe der Zahl der Farben in einem Teil des Gesichtsraumes ganz ähnlich der, der Angabe der Zahl der Teile eines Vierecks, etwa, das ich durch Striche in begrenzte Flächenteile teile. Auch hier kann ich es als sinnlos ansehen, zu sagen, das Viereck "bestehe aus 0 Teilen". Man kann daher nicht sagen, es bestehe "aus einem oder mehreren Teilen", oder es "habe mindestens *einen* Teil". Denken wir uns den speziellen Fall eines Vierecks, das durch parallele Striche geteilt ist. Daß dieser Fall sehr *speziell ist*, macht (*uns*) nichts, denn wir halten ein Spiel nicht für weniger bemerkenswert, weil es nur eine sehr beschränkte Anwendung hat. Ich kann hier die Teile entweder so zählen, wie es gewöhnlich geschieht, und dann heißt es nichts, zu sagen, es seien 0 Teile vorhanden. Ich könnte aber auch eine Zählung denken, die den ersten Teil sozusagen als selbstverständlich ansieht und ihn nicht zählt oder als 0, und die nur die Teile hinzuzählt, die hinzugeteilt wurden. Anderseits könnte man sich ein Herkommen denken, nach dem, etwa, Soldaten in Reih und Glied immer mit der Anzahl *von Soldaten* gezählt werden, welche über *einen* Soldaten angetreten sind (etwa, indem die Anzahl der möglichen Kombinationen des Flügelmanns und eines andern Soldaten der Reihe angegeben werden soll). Aber auch ein Herkommen könnte existieren, wonach die Anzahl der Soldaten immer um 1 größer als die wirkliche angegeben wird. Das wäre etwa ursprünglich geschehen, um einen bestimmten Vorgesetzten über die wirkliche Zahl zu täuschen, dann aber habe es sich als Zählweise für Soldaten eingebürgert. (Akademisches Viertel.) Die Anzahl der verschiedenen Farben in einer Fläche könne auch durch die Anzahl der möglichen Kombinationen zu zwei Gliedern angegeben werden. Und dann kämen für diese Anzahl nur die Zahlen $n.(n-1)2$ in Betracht und es wäre dann sinnlos, von 2 oder 4 Farben in einer Fläche zu reden, wie jetzt von $\sqrt{2}$ oder i Farben. Ich will sagen, daß nicht die Kardinalzahlen wesentlich primär und die – nennen wir's – Kombinationszahlen 1, 3, 6, 10, etc. sekundär sind. Man könnte auch eine Arithmetik der Kombinationszahlen konstruieren und diese wäre in sich so geschlossen, wie die Arithmetik der Kardinalzahlen. Aber ebenso natürlich kann es eine Arithmetik der geraden Zahlen oder der Zahlen 1, 3, 4, 5, 6, 7 … geben. Es ist natürlich das Dezimalsystem zur Schreibung dieser Zahlenarten ungeeignet.

Ts-213 575r[2] & 576r[1] Denken wir uns eine Rechenmaschine, die, anstatt mit Kugeln, mit Farben in einem Streifen rechnet. Und während wir jetzt auf unserm Abakus mit Kugeln, oder den Fingern, die Farben in einem Streifen zählen, so würden wir dann die Kugeln auf einer Stange, oder die Finger an unserer Hand, mit Farben in einem Streifen zählen. Wie aber müßte diese Farbenrechenmaschine konstruiert sein, um funktionieren zu können? Wir brauchten ein Zeichen dafür, daß keine Kugeln an der Stange sitzen. Man muß sich den Abakus als ein Gebrauchsinstrument denken und als Mittel der Sprache. Und, so wie man etwa 5 durch die fünf Finger einer Hand darstellen kann (man denke an einer Gebärdensprache), so würde man es durch den Streifen mit 5 Farben darstellen. Aber für die 0 brauche ich ein Zeichen, sonst habe ich die nötige Multiplizität nicht. Nun, da kann ich entweder die Bestimmung treffen, daß die Farbe schwarz die 0 bezeichnen soll (dies ist natürlich willkürlich und die einfärbige rote Fläche täte es ebensogut); oder aber die einfärbige Fläche soll 0 *bezeichnen*, die zweifärbige 1, etc.. Es ist ganz gleichgültig, welche Bezeichnungsweise ich wähle. Und man sieht hier, wie sich die Mannigfaltigkeit der Kugeln auf die Mannigfaltigkeit der Farben in einer Fläche projiziert.

Ts-213 576r[2] Es hat keinen Sinn, von einem schwarzen Zweieck in weißen Kreis zu reden; und dieser Fall ist analog dem: es ist sinnlos zu sagen, das Viereck bestehe aus 0 Teilen (keinem Teil). Hier haben wir etwas, wie eine untere Grenze des Zählens, noch ehe wir die Eins erreichen.

Ts-213 576r[3] & 577r[1]

Ist Teile Zählen in I das Gleiche, wie Punkte Zählen in IV? Und worin besteht der Unterschied? Man kann das Zählen der Teile in I auffassen als ein Zählen von Vierecken. Dann kann man aber auch sagen "in dieser Zeile ist *kein* Viereck"; und dann zählt man nicht *Teile*. Es beunruhigt uns die Analogie zwischen dem Zählen der Punkte und der Teile, und das Versagen dieser Analogie. Darin, die ungeteilte Fläche als "Eins" zu zählen, ist etwas Seltsames; dagegen finden wir keine Schwierigkeit darin, die einmal geteilte als Bild der 2 zu sehen. Man möchte hier viel lieber zählen "0, 2, 3, etc.". Und dies entspricht der Satzreihe: "das Viereck ist ungeteilt", "das Viereck ist in 2 Teile geteilt", etc.

Ms-113 37v[2]

Wenn es sich um verschiedene Farben handelt dann kann man sich den Standpunkt denken auf dem man nicht sagt, wir haben hier zwei Farben sondern, es ist hier ein Unterschied der Farben; die Betrachtungsweise die in rot, grün, gelb überhaupt nicht 3 sieht. Und die zwar eine Reihe, etwa: rot; blau, grün; gelb, schwarz, weiß; etc. als solche erkennt, sie aber nicht mit der Reihe |; ||; |||; etc. in Verbindung bringt, oder nicht so, daß sie | dem Glied rot zuordnet.

Ms-113 37v[3] & 38r[1] Von dem Standpunkt von dem es ‚seltsam' ist die ungeteilte Fläche als 1 zu zählen ist es aber auch nicht natürlich die einmal geteilte als 2 zu zählen. Denn das tut man wenn man sie als zwei Vierecke auffaßt also von dem Standpunkt, von welchem man die ungeteilte sehr wohl als ein Viereck zählen konnte. Faßt man aber das erste Viereck in I als die ungeteilte Fläche auf, so erscheint das zweite als Ganzes mit einer Teilung (einem Unterschied); & Teilung heißt hier nicht notwendigerweise Teilungsstrich. Sondern das worauf ich mein Augenmerk richte sind die Unterschiede & hier gibt es eben eine Reihe von weniger zu mehr Unterschieden oder Übergängen. Ich werde dann die Vierecke in I numerieren „0, 1, 2, etc.".

Ms-113 38r[2] & 38v[1] Das geht nun, wo die Farben in einem Streifen an einander grenzen wie etwa im Schema

.

Anders ist es aber wenn die Anordnung

ist; oder

.

Freilich könnte ich auch jedes dieser beiden Schemata einem Schema

zuordnen; Schemata wie

einem Schema

.

etc.; & das ist eine korrekte Betrachtungsweise, aber doch eine künstliche. Das Natürlichste ist die Reihe der Schemata ⋎ aufzufassen als |||A||A||B|A||B||CA||B||C||D|||etc.. Und hier kann man nun das erste Schema mit ‚0' bezeichnen das zweite mit ‚1' das dritte aber etwa mit 3, wenn man an alle möglichen Unterschiede denkt, & das vierte dann mit 6. Oder man nennt das dritte Schema 2 (wenn man sich bloß um eine Anordnung kümmert) & das vierte 3.

Ts-213 577r[3] Man kann die *Teiligkeit* des Vierecks beschreiben, indem man sagt: es ist in fünf Teile geteilt, oder: es sind 4 Teile davon abgetrennt worden, oder: es hat das Teilungsschema ABCDE, oder: man kommt durch alle Teile, indem man 4 Grenzen passiert, oder: das Viereck ist geteilt (d.h. in 2 Teile), der eine Teil wieder geteilt und beide Teile *dieser* Teilung geteilt, – etc.. Ich will zeigen, daß nicht nur *eine* Methode besteht, die *Teiligkeit* zu beschreiben.

Ts-213 578r[1] Man wird sich aber vielleicht auch enthalten, den Unterschied überhaupt mit einer Zahl zu bezeichnen, sondern sich ganz an die Schemata A, AB, ABC, etc. halten. Oder es auch so beschreiben:

1, 12, 123, etc., oder, was auf das Gleiche hinauskommt: 0, 01, 012, etc.. Diese kann man sehr wohl auch Zahlzeichen nennen.

Ts-213 578r[2] Die Schemata: A, AB, ABC, etc.: 1, 12, 123, etc.; !|, !!||, !!!|||, etc.; ! |.!|, !|..!|, !|...!|, etc.; 0, 1, 2, 3, etc.; 1, 2, 3, etc.; 1, 12, 121323, etc.; etc. – sind alle gleich fundamental.

Ts-213 578r[3] Man wundert sich nun darüber, daß das Zahlenschema, mit welchem man Soldaten in einer Kaserne zählt, nicht auch für die Teile eines Vierecks gelten soll. Aber das Schema der Soldaten in der Kaserne ist , das der Teile des Vierecks . Keines ist im Vergleich zum andern primär.

Ts-213 578r[4] Ich kann die Reihe der Teilungsschemata sowohl mit der Reihe 1, 2, 3, etc. als auch mit der Reihe 0, 1, 2, 3, etc. vergleichen. Zähle ich die Teile, so gibt es in meiner Zahlenreihe keine 0, denn die Reihe | | | A

| A | | B

A | | B | | C

| | etc. fängt mit *einem* Buchstaben an, während die Reihe !|

!|, !|.!|, !|..!|, etc. nicht mit *einem* Punkt anfängt. Ich kann dagegen auch mit dieser Reihe alle Tatsachen der Teilung darstellen, nur “zähle ich dann nicht die Teile”.

Ts-213 578r[5] & 579r[1] Unrichtig ausgedrückt, aber so, wie man es zunächst ausdrücken würde, lautet das Problem: “warum kann man sagen ‘es gibt 2 Farben auf dieser Fläche’ und nicht ‘es gibt *eine* Farbe auf dieser Fläche’?” Oder: wie muß ich die grammatische Regel ausdrücken, daß ich nicht mehr versucht bin Unsinniges zu sagen, und daß sie mir selbstverständlich ist? Wo liegt der falsche Gedanke, die falsche Analogie, durch die ich verführt werde, die Sprache unrichtig zu gebrauchen? Wie muß ich die Grammatik darstellen, daß diese Versuchung wegfällt? Ich glaube, daß die Darstellung durch die Reihen | | | A

| A | | B

A | | B | | C

| | u.s.w. und | | | |
| | . | |

| | . . | |

u.s.w. | | die Unklarheit hebt. Es kommt alles darauf an, ob ich mit einer Zahlenreihe zähle, die mit 0 anfängt, oder mit einer, die mit 1 anfängt. So ist es auch, wenn ich die Längen von Stäben, oder die Größen von Hüten zähle. Wenn ich mit Zählstrichen zähle, so könnte ich sie *dann* so schreiben: , um zu zeigen, daß es auf den Richtungs**unterschied** ankommt und der einfache Strich der 0 entspricht (d.h. der Anfang ist).

Ts-213 579r[2] Es hat hier übrigens mit den Zahlzeichen (1), ((1) + 1), etc. eine gewisse Schwierigkeit: Nämlich die, daß wir sie nach einer gewissen Länge nicht mehr unterscheiden können, ohne die Striche zu zählen, also ohne die Zeichen in *andere* zu übersetzen. “!!!!!!!!!|||||||||” und “!!!!!!!!!!||||||||||” kann man nicht in dem Sinne unterscheiden – sie sind also nicht in demselben Sinn verschiedene Zeichen – wie “10” und “11”. Übrigens würde dasselbe natürlich auch im Dezimalsystem geschehen (denken wir an die Zahlen 1111111111 und 11111111111), aber das ist nicht ohne Bedeutung. –

Ts-213 579r[3] & 580r[1] Denken wir uns den Fall, es gäbe uns Einer eine Rechenaufgabe in der Strichnotation, etwa: !!!!!!!!!!|||||||||||

+ !!!!!!!!!!|||||||||| und während wir rechneten machte er sich den Spaß, Striche, ohne daß wir es bemerkten, wegzuwischen und dazuzugeben. Er würde uns dann immer sagen “die Rechnung stimmt ja nicht” und wir würden sie immer von Neuem durchlaufen, stets zum Narren gehalten. – Ja, streng genommen, ohne den Begriff eines Kriteriums der Richtigkeit der Rechnung. – Hier könnte man nun Fragen aufwerfen, wie die: Ist es nun nur *sehr wahrscheinlich*, daß 464 + 272 = 736 ist? Und ist also nicht auch 2 + 3 = 5 nur sehr wahrscheinlich? Und was ist denn die objektive Wahrheit, der sich diese Wahrscheinlichkeit nähert? D.h., wie bekommen wir denn einen Begriff davon, daß 2 + 3 eine gewisse Zahl wirklich *ist*, abgesehen von dem, was sie uns zu sein *scheint*? –

Ts-213 580r[2] Wenn man nämlich fragen würde: was ist das Kriterium in der Strichnotation, daß wir zweimal das gleiche Zahlzeichen vor uns haben? – Die Antwort könnte sein: "wenn es beidemale gleich aussieht", oder "wenn es beidemale die gleiche Anzahl von Strichen enthält." Oder soll es heißen: wenn eine eins-zu-eins Zuordnung etc. möglich ist?

Ts-213 580r[3] Wie kann ich wissen, daß !!!!!!!!|||||||| und !!!!!!!!|||||||| *dasselbe* Zeichen sind? Es genügt doch nicht, daß sie *ähnlich* ausschauen. Denn es ist nicht die ungefähre Gleichheit der Gestalt, was die Identität der Zeichen ausmachen darf, sondern gerade eben die Zahlengleichheit.

Ts-213 580r[4] Das Problem der Unterscheidung von 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 und 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 ist viel wichtiger, als es auf den ersten Blick scheint. Es handelt sich um den Unterschied zwischen physikalischer und visueller Zahl.

Ts-213 581r[1] 19 *2 + 2 = 4.*

Ts-213 581r[2] Die Kardinalzahl ist eine interne Eigenschaft einer Liste.

Ts-213 581r[3] & 582r[1]

Hat die Anzahl wesentlich etwas mit einem Begriff zu tun? Ich glaube, das kommt darauf hinaus, zu fragen, ob es einen Sinn hat, von einer Anzahl von Gegenständen zu reden, die nicht unter einen Begriff gebracht sind. Hat es z.B. Sinn zu sagen "a, b und c sind drei Gegenstände"? – Es ist allerdings ein Gefühl vorhanden, das uns sagt: Wozu von Begriffen reden, die Zahl hängt ja nur vom *Umfang* des Begriffes ab, und wenn der einmal bestimmt ist, so kann der Begriff sozusagen abtreten. Der Begriff ist *nur eine Methode*, um einen Umfang zu bestimmen, der Umfang aber ist selbständig und in seinem Wesen unabhängig vom Begriff; denn es kommt ja auch nicht darauf an, durch welchen Begriff wir den Umfang bestimmt haben. Das ist das Argument für die extensive Auffassung. Dagegen kann man zuerst sagen: Wenn der Begriff wirklich nur ein Hilfsmittel ist, um zum Umfang zu gelangen, dann hat der Begriff in der Arithmetik nichts zu suchen; dann muß man eben die Klasse gänzlich von dem zufällig mit ihr verknüpften Begriff scheiden. Im entgegengesetzten Fall aber ist der vom Begriff unabhängige Umfang nur eine Chimaire und dann ist es besser, von ihm überhaupt nicht zu reden, sondern nur vom Begriff. Das Zeichen für den Umfang eines Begriffes ist eine Liste. Man könnte – beiläufig – sagen: die Zahl ist die externe Eigenschaft eines Begriffs und die interne seines Umfangs (der Liste der Gegenstände, die unter ihn fallen). Die Anzahl ist das Schema eines Begriffsumfangs. D.h.: die Zahlangabe ist, wie Frege sagte, die Aussage über einen Begriff (ein Prädikat). Sie bezieht sich nicht auf einen Begriffsumfang, d.i. auf eine Liste, die etwa der Umfang eines Begriffes sein kann. Aber die Zahlangabe über einen Begriff ist ähnlich dem Satz, welcher aussagt, daß eine bestimmte Liste der Umfang dieses Begriffs sei. Von so einer Liste wird Gebrauch gemacht, wenn ich sage: “a, b, c, d fallen unter den Begriff F(x)”. “a, b, c, d” ist die Liste. Natürlich sagt der Satz nichts anderes, als Fa & Fb & Fc & Fd; aber er zeigt, mit Hilfe der Liste geschrieben, seine Verwandtschaft mit “(∃x,y,z,u). Fx & Fy & Fz & Fu”, welches wir kurz “(E∃

!!!!|||| ||||x).F(x)” schreiben können. Die Arithmetik hat es mit dem Schema !!!!|||| zu tun. – Aber redet denn die Arithmetik von Strichen, die ich mit Bleistift auf Papier mache? – Die Arithmetik redet nicht von den Strichen, sie *operiert* mit ihnen.

Ts-213 582r[2] Die Zahlangabe enthält nicht immer eine Verallgemeinerung oder Unbestimmtheit: “Die Strecke A B ist in zwei (3, 4, etc.) gleiche Teile geteilt”.

Ts-213 583r[1] Wenn man wissen will, was “2 + 2 = 4” heißt, muß man fragen, wie wir es (*erhalten*), es ausrechnen. Wir betrachten dann den Vorgang der Berechnung als das Wesentliche, und diese Betrachtungsweise ist die des gewöhnlichen Lebens, wenigstens, was die Zahlen anbelangt, für die wir eine Ausrechnung bedürfen. Wir dürfen uns ja nicht schämen, die Zahlen und Rechnungen so aufzufassen, wie sie die alltägliche Arithmetik jedes Kaufmanns auffaßt. Wir rechnen dann 2 + 2 = 4 und überhaupt die Regeln des kleinen Einmaleins gar nicht aus, sondern nehmen sie – sozusagen als Axiome – an und rechnen nur *mit ihrer Hilfe*. Wir könnten aber natürlich auch 2 + 2 = 4 ausrechnen und die Kinder tun es auch durch Abzählen. Gegeben die Ziffernfolge 1 2 3 4 5 6, ist die Ausrechnung: 11 | **2**2 | 13 | *24*.

Ts-213 583r[2] & 584r[1] *Definitionen zur Abkürzung:*

$(\exists x).\ fx\ .\ \&\ .\ \text{non}\ (\exists x,y).\ fx\ \&\ fy \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon x).\ fx$

$(\exists x,y).\ fx\ \&\ fy\ .\ \&\ .\ \text{non}\ (\exists x,y,z).\ fx\ \&\ fy\ \&\ fz \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon x,y).\ fx\ \&\ fy$ u.s.w.

$(\varepsilon x).\ fx \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon\ 1x)fx$

$(\varepsilon x,y).\ fx\ \&\ fy \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon\ ||x)fx \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon\ 2x)fx$ u.s.w..

Man kann zeigen daß

$(E||x)fx\ \&\ (E|||x)Fx\ \&\ [\text{non-}(\ E\ \exists\ x).$

fx

& Fx Ind.] :⊃: (E|||||x).fx ⌄ Fx eine Tautologie ist. Hat man damit den arithmetischen Satz 2 + 3 = 5 demonstriert? Natürlich nicht. Man hat auch nicht gezeigt, daß

(éE!!||x)fx & (éE!!!|||x)Fx &

Ind. :C⊃:

(éE

!!|| + !!!|||x) fx & Fx

(éE||x).fx & (éE

|||x)Fx.Ind..:C⊃:.(éE

|| + |||x).fx & ⌄

Fx tautologisch ist, denn von einer Summe "!!|| + !!!||| || + |||" war in unseren Definitionen *noch* gar keine Rede. (Ich werde die Tautologie zur Abkürzung in der Form "éE!!|| & éE!!!|||

C⊃ C

éE!!!!!||||| éE||.éE|||

.C⊃.éE|||||" schreiben.) Wenn nun die Frage ist, welche Anzahl von Strichen rechts von "⊃" bei gegebener linker Seite das Ganze zu einer Tautologie machen, so kann man diese Zahl finden, man kann auch finden, daß sie im vorigen Fall !!|| + !!!||| || + ||| ist, aber genau so gut, daß sie !| + !!!!|||| | + |||| oder !| + !!!||| +

!| | + ||| + | ist, denn sie ist dies alles. Man kann aber auch eine Induktion finden, die zeigt, daß – algebraisch ausgedrückt – En & Em.⊃.E(n + m) tautologisch wird. Dann habe ich z.B. ein Recht ε17.ε28.⊃. ε(17 + 28) als Tautologie anzusehen. Aber ist nun dadurch die Gleichung 17 + 28 = 45 gegeben? Durchaus nicht! Dies muß ich mir vielmehr nun erst ausrechnen. Es hat nun auch Sinn, nach dieser allgemeinen Regel E2 & E3 ⊃ E5 als Tautologie hinzuschreiben; wenn ich, (*sozusagen*), noch nicht weiß, was 2 + 3 ergeben wird; denn 2 + 3 hat nur sofern Sinn, als es noch ausgerechnet werden muß. Daher hat die Gleichung !!|| + !!!||| =

!!!!!||||| || + ||| =

||||| nur dann einen Witz, wenn das Zeichen "!!!!!||||| |||||" so wiedererkannt wird, wie das Zeichen "5"; nämlich unabhängig von der Gleichung.

Ts-213 584r[2] & 585r[1] Mein Standpunkt unterscheidet sich dadurch von dem der Leute, die heute über die Grundlagen der Arithmetik schreiben, daß ich es nicht nötig habe, einen bestimmten Kalkül, z.B. den des Dezimalsystems, zu verachten. Einer ist für mich so gut wie der andere. Einen besondern Kalkül gering zu achten ist so, als wollte man Schach spielen ohne wirkliche Figuren, weil das zu wenig abstrakt, zu speziell sei. Soweit es auf die Figuren *nicht* ankommt, sind eben die einen so gut wie die andern. Und soweit ein Spiel sich von dem andern doch unterscheidet, ist eben ein Spiel so gut, *d.h. so interessant*, wie das andere. Keines aber ist sublimer als das andre.

Ts-213 585r[2] Welches ist der Beweis von éE!!|| & éE!!!|||

C⊃ éE!!!!!||||| éE||.éE||| .C⊃.

éE|||||, der der Ausdruck unseres Wissens ist, daß dies ein richtiger logischer Satz ist? Er macht offenbar davon Gebrauch, daß man (∃x) ... als logische Summe behandeln kann. Wir übersetzen etwa von dem Symbolismus ("wenn in jedem Quadrat ein Stern ist, so sind zwei im ganzen Rechteck") in den Russell'schen. Und es ist nicht, als gäben wir mit der Tautologie in dieser Schreibweise einer Meinung Ausdruck, die uns plausibel erscheint und (die) der Beweis dann bestätigt; sondern, was uns plausibel erscheint ist, daß dieser Ausdruck eine Tautologie (ein Gesetz der Logik) ist.

Ts-213 585r[3] & 586r[1] & 587r[1] *Die Reihe von Sätzen*

(∃x):aRx & xRb (∃x,y):aRx & xRy & yRb (∃x,y,z):aRx & xRy & yRz & zRb u.s.f. kann man sehr wohl so ausdrücken: "es gibt ein Glied zwischen a und b" "es gibt zwei Glieder zwischen a und b" u.s.w. und kann das etwa Schreiben (∃1x).aRxRb, (∃2x). aRxRb, etc.. Es ist aber klar, daß zum Verständnis dieser Ausdrücke die obere Erklärung nötig ist, weil man sonst nach Analogie von (∃2x). fx = (∃x,y)fx & fy glauben könnte (∃2x). aRxRb sei gleichbedeutend einem Ausdruck (∃x,y).aRxRb & aRyRb. Ich könnte natürlich auch statt "(∃x,y).F(x,y)" schreiben "(∃2x,y).F(x,y)". Aber die Frage wäre nun: was habe ich dann unter "(∃3x,y).F(x,y)" zu verstehen? Aber hier läßt sich eine Regel geben; und zwar brauchen wir eine, die uns in der Zahlenreihe beliebig weiterführt. Z.B. die (∃3 x,y).F(x,y) =

(∃x,y,z): F(x,y) & F(x,z) & F(y,z) (∃4 x,y).F(x,y) = (∃x,y,z,u): F(x,y) & F(x,z) & ... es folgen die Kombinationen zu zwei Elementen. U.s.f.. Es könnte aber auch definiert werden: (∃3 x,y).F(x,y) = (∃x,y,z).F(x,y) & F(y,x) & F(x,z) & F(z,x) & F(y,z) & F(z,y) u.s.f.. "(∃3x).F(x,y)" entspräche etwa dem Satz der Wortsprache "F(x,y) wird von 3 Dingen befriedigt" und auch dieser Satz bedürfte einer Erklärung um eindeutig zu werden. Soll ich sagen, daß in den verschiedenen Fällen das Zeichen "3" eine andere Bedeutung hat? Drückt nicht vielmehr das Zeichen "3" das aus, was den verschiedenen Interpretationen gemeinsam ist? Warum hätte ich es sonst gewählt. Es gelten ja auch die gleichen Regeln von dem Zeichen "3" in dieser wie in jener Verwendung. Es ist nach wie vor durch 2 + 1 zu ersetzen; etc.. Allerdings aber ist ein Satz nach dem Vorbild von éE!!|| & éE!!!|||

C⊃ éE!!!!!|||||

éE|| &

éE||| C⊃ éE|||| nun keine Tautologie. Zwei Menschen, die miteinander in Frieden leben und drei weitere Menschen, die miteinander in Frieden leben geben nicht fünf Menschen, die miteinander in Frieden leben. Aber das heißt nicht, daß nun 2 + 3 nicht 5 ist. Vielmehr läßt sich die Addition nur nicht so anwenden. Denn man könnte sagen: 2 Menschen, die ... und 3 Menschen, die ... und von denen jeder mit jedem der ersten Gruppe in Frieden lebt = 5 Menschen die ... Mit andern Worten die Zeichen von der Form (∃1 x,y).F(x,y), (∃2 x,y).F(x,y), etc. haben die Multiplizität der Kardinalzahlen, wie die Zeichen

($\exists$lx).fx, ($\exists$2x). fx, etc. und wie auch die Zeichen (E1x).fx, (E2x).fx, etc..

Ts-213 587r[2] "Es gibt nur 4 rote Dinge, aber die bestehen nicht aus 2 und 2, weil es keine Funktion gibt, die sie zu je zweien unter einen Hut bringt". Das hieße, den Satz $2 + 2 = 4$ so auffassen: Wenn auf einer Fläche 4 Kreise zu sehen sind, so haben je 2 von ihnen immer eine bestimmte Eigentümlichkeit miteinander gemein; sagen wir etwa ein Zeichen innerhalb des Kreises. (Dann sollen natürlich auch je 3 der Kreise ein Zeichen gemeinsam haben, etc..) Denn, wenn ich überhaupt etwas über die Wirklichkeit annehme, warum nicht *das*? Das "axiom of reducibility" ist wesentlich von keiner andern Art. In diesem Sinne könnte man sagen, daß zwar 2 und 2 immer 4 ergeben, aber 4 nicht immer aus 2 und 2 besteht. (Nur durch die gänzliche Vagheit und Allgemeinheit des Reduktionsaxioms werden wir zu dem Glauben verleitet, als handle es sich hier – wenn überhaupt um einen sinnvollen Satz – um mehr, als eine willkürliche Annahme, zu der kein Grund vorhanden ist. Drum ist es hier und in allen ähnlichen Fällen äußerst klärend, diese Allgemeinheit, die die Sache ja doch nicht mathematischer macht, ganz fallen zu lassen und statt ihrer ganz spezialisierte Annahmen zu machen).

Ts-213 587r[3] & 588r[1]

Man möchte sagen: 4 muß nicht immer aus 2 und 2 bestehen, aber es kann, wenn es wirklich aus Gruppen besteht, aus 2 und 2 wie aus 3 und 1, etc., bestehen; aber nicht aus 2 und 1, oder 3 und 2, etc.; und so bereiten wir eben alles für den Fall vor, daß 4 in Gruppen zerlegbar ist. Aber dann hat es eben die Arithmetik gar nicht mit der wirklichen Zerlegung zu tun, sondern nur mit jener Möglichkeit der Zerlegung. Die Behauptung könnte ja auch die sein, daß von einer Gruppe von 4 Punkten auf dem Papier immer je 2 durch einen Strich verbunden sind. Oder: um je 2 solche Gruppen von 2 Punkten sei in der Welt immer ein Kreis gezogen.

Ts-213 588r[2]

Dazu kommt nun, daß, z.B., die Aussage, daß in einem weißen Viereck 2 schwarze Kreise zu sehen sind, nicht die Form "$(\exists x,y).$ etc." hat. Denn, gebe ich den Kreisen Namen, dann beziehen sich diese Namen gerade auf die Orte der Kreise und ich kann nicht von ihnen sagen, sie seien entweder in dem einen oder dem andern Viereck. Ich kann wohl sagen: "in beiden Vierecken zusammen sind 4 Kreise", aber das heißt nicht, daß ich von jedem einzeln sagen kann, daß er im einen oder andern Viereck sei. Denn der Satz "dieser Kreis ist in diesem Viereck", ist im angenommenen Fall sinnlos.

Ts-213 588r[3] & 589r[1] Was bedeutet nun der Satz "in den 2 Vierecken *zusammen* sind 4 Kreise"? Wie konstatiere ich das? Indem ich die Zahlen in beiden addiere? Die Zahl der Kreise in beiden Vierecken zusammen *bedeutet* also dann das Resultate der Addition der beiden Zahlen. – Oder ist es etwa das Resultat einer *besondern* Zählung, die durch beide Vierecke geht; oder die Zahl von Strichen, die ich erhalte, wenn ich einen Strich einem Kreis zuordne, ob er nun in einem *oder* im andern Viereck ist. Man kann nämlich sagen: "jeder Strich ist entweder einem Kreis zugeordnet, der in dem einen, oder einem Kreis, der in dem andern Viereck steht"; aber nicht: "dieser Kreis steht entweder in diesem oder im andern Viereck", wenn "dieser Kreis" eben durch seine Lage charakterisiert ist. *Dies* kann nur dann *hier* sein, wenn "dies" und "hier" nicht dasselbe bedeuten. Dagegen kann *dieser* Strich einem Kreis in diesem Viereck zugeordnet sein, denn er bleibt dieser Strich, auch wenn er einem Kreis im andern Viereck zugeordnet ist.

Ts-213 589r[2] Sind in diesen beiden Kreisen zusammen 9 Punkte oder 7? Wie man es gewöhnlich versteht, 7. Aber muß ich es so verstehen? Warum soll ich nicht die Punkte, die beiden Kreisen gemeinsam angehören, doppelt zählen:

Ts-213 589r[3] Anders ist es, wenn man fragt: "wieviel Punkte sind innerhalb der stark ausgezogenen Grenze?" Denn hier kann ich sagen: es sind 7, in dem Sinne, in welchem in den Kreisen 5 und 4 sind.

Ts-213 589r[4] & 590r[1] Man könnte nun sagen: die Summe von 4 und 5 nenne ich die Zahl, welche die unter den Begriff fx $\vee$ Fx fallenden Gegenstände haben, wenn $(\exists n4x).fx\&(\exists n5x).Fx\&Ind.$ der Fall ist. Und zwar heißt das (nun) nicht, daß die Summe von 4 und 5 nur in der Verbindung mit Sätzen von der Art $(\exists 4x).fx$ etc. verwendet werden darf, sondern es heißt: Wenn Du die Summe von n und m bilden willst, setze die Zahlen links von ".⊃." in die Form $(\exists nx).fx$ & $(\exists mx).Fx$ etc. ein, und die Zahl, die rechts stehen muß, um aus dem ganzen Satz eine Tautologie zu machen, ist die Summe von m und n. Dies ist also eine Additionsmethode, und zwar eine äußerst umständliche.

Ts-213 590r[2] Vergleiche: "Wasserstoff und Sauerstoff geben zusammen Wasser" – "2 Punkte und 3 Punkte geben zusammen 5 Punkte".

Ts-213 590r[3] Bestehen denn z.B. 4 Punkte in meinem Gesichtsfeld, die ich "als 4", nicht "als 2 und 2 sehe", aus 2 und 2? Ja, was heißt das? Soll es heißen, ob sie in irgendeinem Sinne in Gruppen von je 2 Punkten geteilt waren? Gewiß nicht. (Denn dann müßten sie ja wohl auch in allen andern denkbaren Weisen geteilt sein.) Heißt es, daß sie sich in Gruppen von 2 und 2 teilen *lassen*? also, daß es *Sinn hat*, von solchen Gruppen in den vieren zu reden? – Jedenfalls entspricht doch das dem Satz "2 + 2 = 4", daß ich nicht sagen kann, die Gruppe der 4 Punkte, die ich gesehen habe, habe aus getrennten Gruppen von 2 und 3 Punkten bestanden. Jeder wird sagen: das ist unmöglich, *denn* 3 + 2 = 5. (Und "unmöglich" heißt hier "unsinnig".)

Ts-213 “Bestehen 4 Punkte aus 2 und 2” kann eine Frage nach einer
590r[4] physikalischen oder *optischen* Tatsache sein; dann ist es nicht die Frage der Arithmetik. Die arithmetische Frage könnte aber allerdings in der Form gestellt werden: “*Kann* eine Gruppe von 4 Punkten aus getrennten Gruppen von je 2 Punkten bestehen”.

Ts-213 “Angenommen, ich glaubte, es gäbe überhaupt nur eine
590r[5] & Funktion und die 4 Gegenstände, die sie befriedigen. Später
591r[1] komme ich darauf, daß sie noch von einem fünften Ding befriedigt wird; ist jetzt das Zeichen ‘4’ sinnlos geworden?” – Ja, wenn *im Kalkül* die 4 nicht existiert, dann ist ‘4’ sinnlos.

Ts-213 Wenn man sagt, es wäre möglich, mit Hilfe der Tautologie
591r[2]

$(\exists n2x).fx \& (\exists n3x).Fx \& Ind.. \supset .(\exists n5x).fx \vee Fx....A)$ zu addieren, so wäre das folgendermaßen zu verstehen: Zuerst ist es möglich, nach gewissen Regeln herauszufinden, daß $(\exists nx).fx \& (\exists nx).Fx \& Ind..$ $\supset .(\exists nx,y):fx \vee Fx.\&.fy \vee Fy$ tautologisch ist. $(\exists nx).fx$ ist eine Abkürzung für $(\exists x).fx$ & non $(\exists x,y)$. fx & fy. Ich werde ferner Tautologien der Art A zur Abkürzung so schreiben: (E) & (E) $\supset$ (E) So geht also aus den Regeln hervor, daß (Ex) & (Ex) $\supset$ (Ex,y), (Ex,y) & (Ex) $\supset$ (Ex,y,z) und andere Tautologien. Ich schreibe “und andere” und nicht “u.s.w. ad inf.”, weil man mit diesem Begriff noch

Ts-213 591r[3] Als die Zahlen im Dezimalsystem hingeschrieben waren, gab es Regeln, nämlich die der Addition für je zwei Zahlen von 0 bis 9, und die reichten mir, entsprechend angewandt, für Additionen aller Zahlen aus. Welche Regel entspricht nun diesen Elementarregeln? Es ist offenbar, daß wir uns in einer Rechnung wie t weniger Regeln merken brauchen als in 17 + 28. Ja, wohl nur *eine* allgemeine und gar keine der Art 3 + 2 = 5. Im Gegenteil, wieviel 3 + 2 ist, scheinen wir jetzt *ableiten*, ausrechnen zu können.

Ts-213 591r[4] Die Aufgabe ist 2 + 3 = ? und man schreibt 1,2,3,4,5,6,7 1,2;1,2,3

So rechnen Kinder tatsächlich, wenn sie "abzählen". (Und dieser Kalkül muß so gut sein wie ein anderer.)

Ts-213 592r[1] Es ist übrigens klar, daß das Problem, ob 5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3 ist, sich *so* lösen läßt:

denn diese Konstruktion hat genau die Multiplizität jedes andern Beweises dieses Satzes.

Ts-213 592r[2] AAAA AA | BB | CC | DD | EE, E, | FA AAA | GB B | HC C | IDI, D, | J A A | K B B | L CLCGGL | M | N | O Wenn ich die Zahl nach ihrem letzten Buchstaben nenne, so beweist das, daß (E + D) + C = E + (D + C) = L. Diese Form des Beweises ist gut, weil sie deutlich zeigt, daß das Ergebnis wirklich errechnet ist und weil man aus ihr doch auch wieder den allgemeinen Beweis herauslesen kann.

Ts-213 592r[3] Es ist hier eine gute Mahnung – so seltsam sie klingt –: treibe hier nicht Philosophie, sondern Mathematik.

Ts-213 593r[1] & 594r[1] Unser Kalkül braucht überhaupt noch nichts von der Bildung einer Reihe '(Ex)', '(Ex,y)', '(Ex,y,z)', *etc.* zu wissen, sondern kann einfach einige, etwa 3, dieser Zeichen einführen, ohne das "u.s.w.". Wir können nun einen Kalkül mit einer endlichen Reihe von Zeichen einführen, indem wir eine Reihenfolge gewisser Zeichen festsetzen, etwa die der Buchstaben des Alphabets, und schreiben:

(Ea) & (Ea) ⊃ (Ea,b)

(Ea,b) & (Ea) ⊃ (Ea,b,c)

(Ea,b) & (Ea,b) ⊃ (Ea,b,c,d)

u.s.w. bis zum z.

Die rechte Seite (rechts vom "⊃") kann man dann aus der linken durch einen Kalkül der Art finden: abcdef.....zab-----abc_B)abcde

Dieser Kalkül ergäbe sich aus den Regeln zur Bildung der Tautologien als eine Vereinfachung. – Dieses Gesetz der Bildung eines Reihenstückes aus zwei andern vorausgesetzt, kann ich für das erste nun die Bezeichnung "Summe der beiden andern" einführen und also definieren: a + a $\stackrel{\text{def}}{=}$ ab

a + ab $\stackrel{\text{def}}{=}$ abc

u.s.w. bis z.

Hätte man an einigen Beispielen die Regel des Kalküls B erklärt, so könnte man auch diese Definitionen als Spezialfälle einer allgemeinen Regel betrachten und nun Aufgaben stellen von der Art: “abc + ab = ?”. Es liegt nun nahe, die Tautologie s) (Ea,b) & (Ea,b) ⊃ (Ea,b,c,d) mit der Gleichung t) ab + ab = abcd zu verwechseln. – Aber diese ist eine Ersetzungsregel, jene ist keine Regel, sondern eben eine Tautologie. Das Zeichen “⊃” in s entspricht in keiner Weise dem “ = ” in t. Man vergißt, daß das Zeichen “⊃” in s ja nicht sagt, daß die beiden Zeichen rechts und links von ihm eine Tautologie ergeben. Dagegen könnte man einen Kalkül konstruieren, in welchem die Gleichung x + y = z als eine Transformation erhalten wird (aus) der Gleichung: u) (Ex) & (Ey) ⊃ (Ez) = Taut..

So, daß ich also sozusagen z = x + y erhalte, wenn ich z aus der Gleichung u herausrechne.

Ts-213 594r[2] Wie tritt der Begriff der Summe in diese Überlegungen ein? – Im ursprünglichen Kalkül, der (*etwa*) feststellt, daß die Form (Ex) & (Ey) ⊃ (Ez)

v)

(z.B.) tautologisch wird für x = ij, y = i und z = ijk, ist von Summierung nicht die Rede. – Dann bringen wir ein Zahlensystem in den Kalkül (etwa das System a b c d ... z). Und endlich definieren wir die Summe zweier Zahlen als diejenige Zahl z, welche die Gleichung u löst.

Ts-213 594r[3] & 595r[1]

(Wenn wir statt "(Ex) & (Ex) ⊃ (Ex,y)" schrieben: "(Ex) & (Ex) ⊃ (Ex + x)", so hätte das keinen Sinn; es sei denn, daß die Notation von vornherein nicht I) "(Ex) etc.", "(Ex,y) etc.", "(Ex,y,z) etc." lautet, sondern:

1. "(Ex) etc.", "(E x + x) etc.", "(E x + x + x) etc.". Denn warum sollten wir plötzlich statt "(Ex,y) & (Ex) ⊃ (Ex,y,z)" schreiben: "(Ex,y) & (Ex) ⊃ (Exy + x)"? das wäre nur eine Verwirrung der Notation. – Nun sagt man: Es vereinfacht doch das Hinschreiben der Tautologie sehr, wenn man in der rechten Klammer gleich die Ausdrücke der beiden linken hinschreiben kann. Aber diese Schreibweise ist ja noch gar nicht erklärt; ich weiß ja nicht, was (Exy + z) bedeutet, daß nämlich (Exy + x) = (Ex,y,z) ist. Wenn man aber von vornherein die Notation "(Ex)", "(Ex + x)", "(Ex + x + x)", so hätte vorerst nur der Ausdruck "(Ex + x + x + x)" Sinn, aber nicht "(E(x + x) + (x + x))". Die Notation K ist *auf einer Stufe mit* I. Daß sich in der Form v eine Tautologie ergibt, kann man etwa kurz durch das Ziehen von Verbindungslinien kalkulieren, also

(Ex,y) & (Ex,y) ⊃ (Ex,y,z,u) und analog

(Ex + x) & (Ex + x) ⊃ (Ex + x + x + x).

Die Bögen entsprechen *nur* der Regel, die in jedem Fall für die Kontrolle der Tautologie gegeben sein muß. Von einer Addition ist hier noch keine Rede. Die tritt erst ein, wenn ich mich entschließe – z.B. – statt "x, y, z, u" "xy + xy" zu schreiben, und zwar in Verbindung mit einem Kalkül, der nach Regeln die Ableitung einer Ersetzungsregel “xy + xy = xyzu” erlaubt. Addition liegt auch dann nicht vor, wenn ich in der Notation K schreibe “(Ex) & (Ex) ⊃ (Ex + x)”, sondern erst, wenn ich zwischen “x + x” und “(x) + (x)” unterscheide und schreibe: (x) + (x) = (x + x).

Ts-213 595r[2] Ich kann “die Summe von x und y” (“x + y”) als die Zahl z definieren (oder: “den Ausdruck” – wenn wir uns scheuen, das *Wort* Zahl zu gebrauchen) – ich kann “x + y” als die Zahl z definieren, die den Ausdruck v tautologisch macht; – man kann aber auch “x + y”, z.B., durch den Kalkül B definieren (unabhängig von dem der Tautologien) und nun die Gleichung (Ex) & (Ey) ⊃ (Ex + y) = Taut. *beweisen*.

Ts-213 595r[3] & 596r[1] Eine Frage, die sich leicht einstellt, ist die: müssen wir die Kardinalzahlen in Verbindung mit der Notation (∃x,y,...). fx & fy & ... einführen? Ist der Kalkül der Kardinalzahlen irgendwie an den mit den Zeichen "(∃x,y...). fx & fy ..." gebunden? Ist etwa der letztere die einzige, und vielleicht wesentlich einzige, Anwendung der Kardinalzahlen? Was die "Anwendung der Kardinalarithmetik auf die Grammatik" betrifft, so kann man auf das verweisen, was wir über den Begriff der Anwendung eines Kalküls gesagt haben. – Man könnte nun unsere Frage auch so stellen: Kommen die Kardinalzahlen in den Sätzen unserer Sprache immer hinter dem Zeichen "∃" vor: wenn wir uns nämlich die Sprache in die Russell'sche Notation übersetzt denken? Diese Frage hängt unmittelbar mit der zusammen: Wird das Zahlzeichen in der Sprache immer als Charakterisierung eines Begriffes – einer Funktion – gebraucht? Die Antwort darauf ist, daß unsere Sprache die Zahlzeichen immer *in Verbindung mit* Begriffswörtern gebraucht – daß aber diese Begriffswörter unter sich gänzlich verschiedenen grammatischen Systemen angehören (was man daraus sieht, daß das eine in Verbindungen Bedeutung hat, in denen das andre *sinnlos* ist), so daß die Norm, die sie zu Begriffswörtern macht, für uns uninteressant wird. Eine ebensolche Norm aber ist die Schreibweise "(∃x,y,...) etc."; sie ist die direkte Übersetzung einer Norm unserer Wortsprachen, nämlich des Ausdruckes "es gibt ...", eines Sprachschemas, in das unzählige logische Formen gepreßt sind.

Ts-213 596r[2] Übrigens ist das Zahlzeichen, jetzt in einem andern Sinne, nicht mit "∃" verbunden: insofern nämlich "(∃3x)..." nicht in "(∃2 + 3 x)..." enthalten ist.

Ts-213 596r[3] & 597r[1] & 598r[1]

Wenn wir von den, mittels " = " konstruierten Funktionen ($x = a \vee x = b$ etc.) absehen, so wird nach Russells Theorie 5 = 1, wenn es keine Funktion gibt, die nur von *einem* Argument, oder nur von 5 Argumenten befriedigt wird. Dieser Satz scheint natürlich auf den ersten Blick unsinnig; denn, wie kann man dann sinnvoll sagen, daß es keine solchen Funktionen gibt. Russell müßte sagen, daß man die beiden Aussagen, daß es Fünfer- und Einserfunktionen gibt, nur dann *getrennt* machen kann, wenn wir in unserem Symbolismus eine Fünfer- und eine Einserklasse haben. Er könnte etwa sagen, daß seine Auffassung richtig sei, weil ich, ohne das Paradigma der Klasse 5 im Symbolismus, gar nicht sagen könne, eine Funktionen werde von 5 Argumenten befriedigt. – D.h., daß aus der Existenz des Satzes "$(\exists f)$: $(E1x).fx$" seine Wahrheit schon hervorgeht. – Man scheint also sagen zu können: schau' auf diesen Satz, dann wirst Du sehen, daß er wahr ist. Und in einem, für uns irrelevanten, Sinn ist das auch möglich: Denken wir uns etwa auf die Wand eines Zimmers mit roter Farbe geschrieben: "in diesem Zimmer befindet sich etwas Rotes". Dieses Problem hängt damit zusammen, daß ich in der hinweisenden Definition von dem Paradigma (Muster) nichts aussage, sondern nur mit seiner Hilfe Aussagen mache; daß es zum Symbolismus gehört und nicht einer der Gegenstände ist, auf den ich ihn anwende. Ist z.B. "1 Fuß" definiert als die Länge eines bestimmten Stabes in meinem Zimmer, und ich würde etwa statt "diese Tür ist 6 Fuß hoch" sagen: "diese Tür hat sechsmal *diese* Länge (wobei ich auf den Einheitsstab zeige)", – dann könnte man nicht (*etwa*) sagen: "der Satz 'es gibt einen Gegenstand von 1 Fuß Länge' beweist sich selbst, denn ich könnte diesen Satz gar nicht aussprechen, wenn es keinen Gegenstand von dieser Länge gäbe”; denn vom Einheitsstab kann ich nicht aussagen, daß er 1 Fuß lang sei. (Wenn ich nämlich statt “1 Fuß” das Zeichen “*diese* Länge” einführe, so hieße die Aussage, daß der Einheitsstab die Länge 1 Fuß hat: “dieser Stab hat diese Länge (wobei ich beide Male auf den gleichen Stab zeige).) So kann man von der Gruppe der Striche, welche etwa als Paradigma der 3 steht nicht sagen, es bestehe aus 3 Strichen. “Wenn jener Satz nicht wahr ist, so gibt es diesen Satz gar nicht” – das heißt: “wenn es diesen Satz nicht gibt, so gibt es ihn nicht”. Und ein Satz kann das Paradigma im andern nie beschreiben, sonst ist es eben nicht Paradigma. Wenn die Länge des Einheitsstabes durch *die* Längenangabe “*1 Fuß*” beschrieben werden kann, dann ist er nicht das Paradigma der Längeneinheit, denn sonst müßte jede Längenangabe mit seiner Hilfe gemacht werden.

Ts-213 598r[2] Ein Satz, “non $(\exists f):(Ex).fx$” muß, wenn wir ihm überhaupt einen Sinn geben, von der Art *dessen* sein: “es gibt keinen Kreis auf dieser Fläche, der nur *einen* schwarzen Fleck enthält”. (Ich meine: er muß einen ähnlich *bestimmten* Sinn haben; und nicht vague bleiben, wie er in der Russell’schen Logik und in meiner der Abhandlung wäre.) Wenn nun aus den Sätzen “non $(\exists f):(Ex).fx$” ...R)

und “non $(\exists f):(Ex,y).\ fx\ \&\ fy$ ... S)

folgt, daß $1 = 2$ ist, so ist hier mit “1” und “2” nicht das gemeint, was wir sonst damit meinen, dann die Sätze R und S würden in der Wortsprache lauten: “es gibt keine Funktion, die nur von einem Ding befriedigt wird" und "es gibt keine Funktion, die nur von 2 Dingen befriedigt wird". Und dies sind nach den Regeln unserer Sprache Sätze mit verschiedenem Sinn.

Ts-213 598r[3] & 599r[1] Man ist versucht zu sagen: "Um '(∃x,y).fx & fy' ausdrücken zu können, brauchen wir 2 Zeichen 'x' und 'y'." Aber das heißt nichts. Was wir dazu *brauchen*, ist vielleicht Papier und Feder; und der Satz so wenig, wie: "um 'p' auszudrücken, brauchen wir 'p'".

Ts-213 599r[2] Wenn man fragt: "was heißt denn dann '5 + 7 = 12' – was für ein Sinn oder Zweck bleibt denn noch für diesen Ausdruck, nachdem man die Tautologien etc. aus dem arithmetischen Kalkül ausgeschaltet hat", – so ist die Antwort: Diese Gleichung ist eine Ersetzungsregel, die sich auf bestimmte allgemeine Ersetzungsregeln, die Regeln der Addition, stützt. Der Inhalt von 5 + 7 = 12 ist (wenn einer es nicht wüßte) genau das, was den Kindern Schwierigkeiten macht, wenn sie diesen Satz im Rechenunterricht lernen.

Ts-213 599r[3] Keine Untersuchung der Begriffe, nur die Einsicht in den Zahlenkalkül kann vermitteln, daß 3 + 2 = 5 ist. Das ist es, was sich in uns auflehnt gegen den Gedanken, daß (E3x).fx & (E2x).gx & Ind. .⊃. (E5x).fx ⌄ gx"

der Satz 3 + 2 = 5 sein könnte. Denn das, wodurch wir diesen Ausdruck als Tautologie erkennen, kann ich selbst nicht aus einer Betrachtung von Begriffen ergeben, sondern muß aus dem Kalkül zu ersehen sein. Denn die Grammatik ist ein Kalkül. D.h., was im Tautologien-Kalkül noch außer dem

Zahlenkalkül *da ist*, rechtfertigt diesen nicht und ist, wenn wir uns für ihn interessieren, nur Beiwerk.

Ts-213 Die Kinder lernen in der Schule wohl 2 × 2 = 4, aber nicht 2 =
599r[4] 2.

Ts-213
600r[1]

20 *Zahlangaben innerhalb der Mathematik.*

Ts-213
600r[2] Worin liegt der Unterschied zwischen der Zahlangabe über einen Begriff und der Zahlangabe, die sich auf eine Variable bezieht? Die Erste ist ein Satz, der von dem Begriff handelt, die zweite eine grammatische Regel die Variable betreffend. Kann ich aber nicht eine Variable dadurch bestimmen, daß ich sage, ihre Werte sollen alle Gegenstände sein, die eine bestimmte Funktion befriedigen? – Dadurch *bestimme* ich ja die Variable nicht, außer wenn ich *weiß*, welche Gegenstände die Funktion befriedigen, d.h. wenn mir diese Gegenstände auch auf andre Weise (etwa durch eine Liste) gegeben sind; und dann wird die Angabe der Funktion überflüssig. Wissen wir nicht, ob ein Gegenstand die Funktion befriedigt, so wissen wir nicht, ob er ein Wert der Variablen sein soll und die Grammatik der Variablen ist dann in dieser Beziehung einfach nicht bestimmt.

Ts-213 Zahlangaben *in* der Mathematik (z.B. "die Gleichung $x^2 = 1$ hat
600r[3] & 2 Wurzeln") sind daher von ganz anderer Art, als Zahlangaben
601r[1] außerhalb der Mathematik ("auf dem Tisch liegen 2 Äpfel".)

Ts-213 601r[2] & 602r[1] Wenn man sagt, A B lasse 2 Permutationen zu, so klingt das, als mache man eine *allgemeine* Aussage, analog der “in dem Zimmer sind 2 Menschen”, wobei über die Menschen noch nichts weiter gesagt ist und bekannt sein braucht. Das ist aber im Falle A B nicht so. Ich kann A B, B A nicht allgemeiner beschreiben und daher kann der Satz, es seien 2 Permutationen möglich, nicht weniger sagen, als, es sind die Permutationen A B und B A möglich. Zu sagen, es sind 6 Permutationen von 3 Elementen möglich kann nicht weniger, d.h. etwas allgemeineres sagen, als das Schema zeigt:

ABC

ACB

BAC

BCA

CAB

CBA

Denn es ist *unmöglich*, die Zahl der möglichen Permutationen zu kennen, ohne diese selbst zu kennen. Und wäre das nicht so, so könnte die Kombinatorik nicht zu ihren allgemeinen Formeln kommen. Das Gesetz, welches wir in der Bildung der Permutationen erkennen, ist durch die Gleichung p = n! dargestellt. Ich glaube, in demselben Sinn, wie der Kreis durch die Kreisgleichung. – Ich kann freilich die Zahl 2 den Permutationen A B, B A zuordnen, sowie die 6 den ausgeführten Permutationen von A, B, C, aber das gibt mir nicht den Satz der Kombinationslehre. – Das was ich in A B, B A sehe, ist eine interne Relation, die sich daher nicht beschreiben läßt. D.h. *das* läßt sich nicht beschreiben, was diese Klasse von Permutationen komplett macht. – Zählen kann ich nur, was tatsächlich da ist, nicht die Möglichkeiten. Ich kann aber z.B. berechnen, wieviele Zeilen ein Mensch schreiben muß, wenn er in jede Zeile eine Permutation von 3 Elementen setzt und solange permutiert, bis er ohne Wiederholung nicht weiter kann. Und das heißt, er braucht 6 Zeilen, um auf diese Weise die Permutationen A B C, A C B etc. hinzuschreiben, denn dies sind eben "*die* Permutationen von A, B, C". Es hat aber keinen Sinn zu sagen, dies seien alle Permutationen von A B C.

Ts-213 602r[2] Eine Kombinationsrechenmaschine ist denkbar ganz analog der Russischen.

Ts-213 602r[3] Es ist klar, daß es eine mathematische Frage gibt: "wieviele Permutationen von – z.B. – 4 Elementen gibt es", eine Frage von genau derselben Art, wie die "wieviel ist 25 × 18". Denn es gibt eine allgemeine Methode zur Lösung beider. Aber die Frage gibt es auch nur mit Bezug auf diese Methode.

Ts-213 602r[4] Der Satz, es gibt 6 Permutationen von 3 Elementen, ist identisch mit dem Permutationsschema und darum gibt es hier keinen Satz "es gibt 7 Permutationen von 3 Elementen", denn dem entspricht kein solches Schema.

Ts-213 602r[5] Man könnte die Zahl 6 in diesem Falle auch als eine andere Art von Anzahl, die Permutationszahl von A, B, C auffassen. Das Permutieren als eine andere Art des Zählens.

Ts-213 602r[6] Wenn man wissen will, was ein Satz bedeutet, so kann man immer fragen "wie weiß ich das". Weiß ich, daß es 6 Permutationen von 3 Elementen gibt, auf die gleiche Weise wie, daß 6 Personen im Zimmer sind? Nein. Darum ist jener Satz von anderer *Art* als dieser.

Ts-213 602r[7] Man kann auch sagen, der Satz "es gibt 6 Permutationen von 3 Elementen" verhält sich genau so zum Satz "es sind 6 Leute im Zimmer", wie der Satz $3 + 3 = 6$, den man auch in der Form "es gibt 6 Einheiten in $3 + 3$" aussprechen könnte. Und wie ich in dem einen Fall die Reihen im Permutationsschema zähle, so kann ich im andern die Striche in | | | | | | | | zählen.

Ts-213 603r[1] Wie ich $4 \times 3 = 12$ durch das Schema beweisen kann: o o o o | o o o o | o o o o, so kann ich $3! = 6$ durch das Permutationsschema beweisen.

Ts-213 603r[2] Der Satz "die Relation R verbindet zwei Gegenstände miteinander", wenn das soviel heißen soll, wie "R ist eine zweistellige Relation" ist ein Satz der Grammatik.

Ts-213 604r[2] & 605r[1] & 606r[1]

21 Wie soll man nun den Satz auffassen "diese Hüte haben die gleiche Größe", oder "diese Stäbe haben die gleiche Länge", oder "diese Flecke haben die gleiche Farbe"? Soll man sie in der Form schreiben: "$(\exists L).\ La\ \&\ Lb$"? Aber wenn das in der gewöhnlichen Weise gemeint wird, also mit den gewöhnlichen Regeln gebraucht wird, so müßte es ja dann Sinn haben zu schreiben "$(\exists L).\ La$" also "der Fleck a hat eine Farbe", "der Stab hat eine Länge". Ich kann freilich "$(\exists L).\ La\ \&\ Lb$" für "a und b sind gleichlang" schreiben, wenn ich nur weiß und berücksichtige, daß "$(\exists L).\ La$" sinnlos ist; aber dann wird die Notation irreführend und verwirrend. ("eine Länge haben", "einen Vater haben".) – Wir haben hier den Fall, den wir in der gewöhnlichen Sprache oft so ausdrücken: "Wenn a die Länge L hat, so hat b auch L"; aber hier hätte der Satz "a hat die Länge L" gar keinen Sinn, oder doch nicht als Aussage über a; und der Satz lautet richtiger "nennen wir die Länge von a 'L', so ist die Länge von b auch L" und 'L' ist eben hier wesentlich eine Variable. Der Satz hat übrigens die Form eines Beispiels, eines Satzes, der als Beispiel zum allgemeinen Satz dienen kann und man würde etwa auch fortfahren: "wenn z.B. a 5 m lang ist, so hat b auch 5 m, u.s.w.". – Zu sagen "die Stäbe a und b haben die gleiche Länge" sagt nämlich gar nichts über die Länge jedes Stabes; denn es sagt auch nicht, "daß jeder der beiden eine Länge hat". Der Fall hat also gar keine Ähnlichkeit mit dem: "A und B haben den gleichen Vater" und "der Name des Vaters von A und B ist 'N'", wo ich einfach für die allgemeine Bezeichnung den Eigennamen einsetze. '5 m' ist aber nicht der Name der *betreffenden* Länge, von der zuerst nur gesagt wurde, daß a und b sie beide besäßen. Wenn es sich um Längen im

Gesichtsfeld handelt, können wir zwar sagen, die beiden Längen seien gleich, aber wir können sie im allgemeinen nicht mit einer Zahl “benennen”. – Der Satz “ist L die Länge von a, so hat auch b die Länge L” schreibt seine Form nur als eine von der Form eines Beispiels derivierte hin. Und man könnte den allgemeinen Satz auch wirklich durch eine *Anführung* von Beispielen mit einem “u.s.w.” ausdrücken. Und es ist eine Wiederholung desselben Satzes, wenn ich sage: “a und b sind gleichlang; ist die Länge von a L, so ist die Länge von b auch L; ist a 5 m lang, so ist auch b 5 m lang, ist a 7 m, so ist b 7 m, u.s.w.”. Die dritte Fassung zeigt schon, daß in dem Satz nicht das “und” zwischen zwei Formen steht, wie in “$(\exists x).\ fx\ \&\ Fx$”, so daß man auch $(\exists x).\ fx$” und $(\exists x).\ Fx$” schreiben dürfte. Nehmen wir als Beispiel *auch* den Satz “in den beiden Kisten sind gleichviel Äpfel”. Wenn man diesen Satz in der Form schreibt” es gibt eine Zahl, die die Zahl der Äpfel in beiden Kisten ist”, so kann man auch hier nicht die Form bilden: “es gibt eine Zahl, die die Zahl der Äpfel in dieser Kiste ist”, oder “die Äpfel in dieser Kiste haben eine Zahl”. Schreibe ich:

$(\exists x).fx.\&.\mathrm{non}(\exists x,y).fx\&fy.=.(\exists n1x).fx.=.f1$ etc., so könnte man den Satz “die Anzahl der Äpfel in den beiden Kisten ist die gleiche” schreiben:

“$(\exists n).\ fn\ \&\ Fn$”. “$(\exists n).\ fn$” aber wäre kein Satz.

Ts-213 ***Zahlengleichheit.***

604r[1]

Längengleichheit.

Ts-213 606r[2] & 607r[1]

Will man den Satz “unter f und F fallen gleichviele Gegenstände” in übersichtlicher Notation schreiben, so ist man vor allem versucht, ihn in der Form “fn & Fn” *zu schreiben*. Und ferner empfindet man das nicht als logisches Produkt von fn und Fn, so daß es also auch Sinn hätte zu schreiben fn & F5 – sondern es ist wesentlich, daß nach ‘f’ und ‘F’ der gleiche Buchstabe folgt und fn & Fn ist eine Abstraktion aus logischen Produkten f4 & F4, f5 & F5 etc., nicht selbst ein logisches Produkt. (Es würde also auch nicht aus fn & Fn fn folgen. ‘fn & Fn’ verhält sich vielmehr zu einem logischen Produkt ähnlich wie der Differenzialquotient zu einem Quotienten.) Es ist so wenig ein Logisches Produkt, wie die Photographie einer Familiengruppe eine Gruppe von Photographien ist. Darum kann uns also die Form “fn & Fn” irreführen und es wäre vielleicht eine Schreibweise der Art “ + —— + fn & Fn” vorzuziehen; aber auch “(∃n). fn & Fn”, wenn die Grammatik dieses Zeichens festgelegt ist. Man kann dann festlegen: (∃n). fn = Taut., was soviel heißt wie (∃n). fn & p = p. Also (∃n). fn ⌵ Fn = Taut., (∃n). fn ⊃ Fn = Taut., (∃n). fn | Fn = Cont., etc. f1 & F1 & (∃n). fn & Fn = f1 & (∃n). fn & Fn f2 & F2 & (∃n). fn & Fn = f2 & (∃n). fn & Fn etc. ad inf..

Und überhaupt sind die Rechnungsregeln für (∃n). fn & Fn daraus abzuleiten, daß man schreiben kann: (∃n). fn & Fn = f0 & F0 .⌵. f1 & F1 .⌵. f2 & F2 u.s.w. ad inf.. Es ist klar, daß dies keine logische Summe ist, da “u.s.w. ad inf.” kein Satz ist. Die Notation (∃n) fn & Fn ist aber auch nicht unmißverständlich; denn man könnte sich wundern, warum man hier statt fn & Fn nicht Φn sollte setzen können und dann sollte ja “(∃n). Φn” nichtssagend werden. Das klärt sich natürlich auf, wenn man auf die Notation non $(\exists x).fx$ für $f0$, $(\exists x).fx$ & non $(\exists x,y).fx$ & fy für $f1$, etc. zurückgeht, beziehungsweise auf $(\exists n0x).fx$ für $f0$ $(\exists n1x).fx$ für $f1$, etc.. Denn dann ist zu unterscheiden zwischen $(\exists n1x).fx\&(\exists n1x).Fx$ und $(\exists n1x).fx\&Fx$. Und geht man auf $(\exists n).fn$ & Fn über, so bedeutet das $(\exists n):(\exists nnx).fx\&(\exists nnx).Fx$ (welches nicht nichtssagend ist) und nicht $(\exists n):(\exists nnx).fx\&Fx$, welches nichtssagend ist.

Ts-213 608r[1] Die Worte "gleichzahlig", "längengleich", "gleichfärbig", etc. haben ähnliche aber verschiedene Grammatik. – In allen Fällen liegt die Auffassung des Satzes als eine endlose logische Summe nahe, deren Glieder die Form fn & Fn haben. Außerdem hat jedes dieser Worte mehrere verschiedene Bedeutungen, d.h., könnte selbst wieder durch mehrere Wörter mit verschiedener Grammatik ersetzt werden. Denn "gleichzahlig" heißt etwas anderes, wenn es auf Striche angewandt wird, die gleichzeitig im Gesichtsraum sind, als wenn es sich auf die Äpfel in zwei Kisten bezieht; und "gleichlang" auf den Gesichtsraum angewandt ist verschieden von "gleichlang" im euklidischen Raum; und die Bedeutung von "gleichfärbig" hängt von dem Kriterium ab, das wir für die Gleichfärbigkeit annehmen.

Ts-213 608r[2] Wenn es sich um Flecke im Gesichtsraum handelt, die wir zu gleicher Zeit sehen, so hat das Wort "gleichlang" verschiedene Bedeutung, je nachdem die Strecken unmittelbar angrenzend oder von einander entfernt sind. In der Wortsprache hilft man sich da oft mit dem Wort "es scheint".

Ts-213 608r[3] Die Gleichzahligkeit, wenn es sich um eine Anzahl von Strichen handelt, “die man übersehen kann”, ist eine andere als die, welche nur durch Zählen der Striche festgestellt werden kann. Verschiedene Kriterien der Gleichzahligkeit: I und II die Zahl, die man unmittelbar erkennt; III das Kriterium der Zuordnung; IV hier muß man beide Klassen zählen; V man erkennt das gleiche Muster. (Das sind natürlich nicht die einzigen Fälle.)

Ts-213 609r[1] Im Fall der Längengleichheit im euklidischen Raum mag man sagen, sie bestehe darin, daß beide Strecken die gleiche Zahl von cm messen, beide 5 cm, beide 10 cm, etc.. Wenn es sich aber um die Längengleichheit zweier Strecken im Gesichtsraum handelt, so gibt es hier nicht eine Länge L die beide haben.

Ts-213 609r[2] Man möchte sagen: zwei Stäbe müssen immer entweder gleichlang oder verschieden lang sein. Aber was heißt das? Es ist natürlich eine Regel der Ausdrucksweise. “In den zwei Kisten müssen entweder gleichviel Äpfel oder verschiedene Anzahlen sein”. Das Anlegen zweier Maßstäbe an je eine Strecke soll die Methode sein, wie ich herausfinde, ob die beiden Strecken gleichlang sind: sind sie aber gleich lang, wenn die beiden Maßstäbe gerade nicht angelegt sind? Wir würden in diesem Fall sagen, wir wissen nicht, ob die beiden während dieser Zeit gleich oder verschieden lang sind. Aber man könnte auch sagen, sie haben während dieser Zeit keine Längen, oder etwa keine numerischen Längen.

Ts-213 609r[3] Ähnliches, wenn auch nicht das Gleiche, gilt von der Zahlengleichheit.

Ts-213 609r[4] Es gibt hier die Erfahrung, daß wir eine Anzahl Punkte sehen, deren Anzahl wir nicht unmittelbar sehen können, die wir aber während des Zählens überblicken können, so daß es Sinn hat zu sagen, sie haben sich während des Zählens nicht verändert. Anderseits aber gibt es auch den Fall einer Gruppe von Körpern oder Flecken, die wir nicht übersehen können, während wir sie zählen, so daß es hier das frühere Kriterium, dafür, daß die Gruppe sich während des Zählens nicht verändert, nicht gibt.

Ts-213 610r[1] & 611r[1] & 612r[1] Russells Erklärung der Gleichzahligkeit ist aus verschiedenen Gründen ungenügend. Aber die Wahrheit ist, daß man in der Mathematik keine solche Erklärung der Gleichzahligkeit braucht. Hier ist überhaupt alles falsch aufgezäumt. Was uns verführt die Russell'sche, oder Frege'sche, Erklärung anzunehmen, ist der Gedanke, zwei Klassen von Gegenständen (Äpfeln in zwei Kisten) seien gleichzahlig, wenn man sie einander 1 zu 1 zuordnen *könne*. Man denkt sich die Zuordnung als eine Kontrolle der Gleichzahligkeit. Und hier macht man in Gedanken wohl noch eine Unterscheidung zwischen Zuordnung und Verbindung durch eine Relation; und zwar wird die Zuordnung zur Verbindung, was die "geometrische Gerade" zu einer wirklichen ist, eine Art idealer Verbindung; einer Verbindung, die quasi von der Logik vorgezeichnet ist und durch die Wirklichkeit nun nachgezogen werden kann. Es ist die Möglichkeit, aufgefaßt als eine schattenhafte Wirklichkeit. Dies hängt dann wieder mit der Auffassung von "(∃x). fx" als Ausdruck der Möglichkeit von fx zusammen. "f und F sind gleichzahlig" (ich werde dies schreiben "S(f,F)", oder auch einfach "S") soll ja aus "f5 & F5" folgen; aber aus f5 & F5 folgt nicht, daß f und F durch eine 1–1 Relation R verbunden sind (dies werde ich "P(f,F)" oder "P" schreiben). Man hilft sich, indem man sagt, es bestehe dann eine Relation der Art "x = a & y = b .⌄. x = c & y = d .⌄. u.s.w.".

Aber, erstens, warum definiert man dann nicht gleich S als das Bestehen einer *solchen* Relation. Und wenn man darauf antwortet, diese Definition würde die Gleichzahligkeit bei unendlichen Anzahlen nicht einschließen, so ist zu sagen, daß dies nur auf eine Frage der “Eleganz” hinausläuft, da ich letzten Endes für endliche Zahlen meine Zuflucht doch zu den “extensiven” Beziehungen nehmen müßte. Aber diese führen uns auch zu nichts; denn, zu sagen, zwischen f und F bestehe eine Beziehung – z.B. – der Form x = a & y = b .⌄. x = c & y = d sagt nichts andres, als (∃x,y). fx & fy . & . non (∃x,y,z). fx & fy & fz : & : : & : (∃x,y). Fx & Fy . & . non (∃x,y,z). Fx & Fy & Fz.

(Was ich in der Form schreibe

(∃n2x).fx&(∃n2x).Fx.

Und, zu sagen, zwischen f und F bestehe *eine* der Beziehungen

x = a & y = b ; x = a & y = d .⌄. x = c & y = d ; etc. etc., heißt nichts andres als, es bestehe eine der Tatsachen f1 & F1 ; f2 & F2; etc. etc. Nun hilft man sich mit der größeren Allgemeinheit, indem man sagt, zwischen f und F bestehe irgend eine 1–1 Relation und vergißt, daß man dann doch für die Bezeichnung dieser Allgemeinheit die Regel festlegen muß, nach welcher “irgend eine Relation” auch die Relationen der Form x = a & y = b etc. einschließt. Dadurch, daß man mehr sagt, kommt man nicht darum herum, das *Engere* zu sagen, das in dem Mehr vorhanden sein soll. (Die Logik läßt sich nicht betrügen.) In dem Sinne von S also, in welchem S aus f5 & F5 folgt, wird es durch die Russell’sche Erklärung nicht erklärt. Vielmehr braucht man da eine Reihe von Erklärungen

ϕ0 • S = ϕ0 • ψ0 = ψ0 • S

$\phi 1 \bullet S = \phi 1 \bullet \psi 1 = \psi 1 \bullet S$

} – – – α

etc. ad inf.

Dagegen wird P als Kriterium der Gleichzahligkeit gebraucht und kann natürlich *in einem andern Sinne von* S auch S gleichgesetzt werden. (Und man kann dann nur sagen: Wenn in Deiner Notation S = P ist, dann bedeutet S nichts andres als P.) Es folgt zwar nicht P aus f5 & F5, wohl aber f5 & F5 aus P & f5.

P & f5 = P & f5 & F5 = P & F5

u.s.w..

Also kann man schreiben:

$\pi \bullet \phi 0 = \pi \bullet \phi 0 \bullet \psi 0 = \pi \bullet \phi 0 \bullet S$

$\pi \bullet \phi 1 = \pi \bullet \phi 1 \bullet \psi 1 = \pi \bullet \phi 1 \bullet S$

} – – – β

$\pi \bullet \phi 2 = \pi \bullet \phi 2 \bullet \psi 2 = \pi \bullet \phi 2 \bullet S$

u.s.w. ad inf. .

Und dies kann man dadurch ausdrücken, daß man sagt, die Gleichzahligkeit folge aus Π. Und man kann auch die Regel geben Π & S = Π, die mit den Regeln, oder *der* Regel, B und der Regel A übereinstimmt.

Ts-213 612r[2] Die Regel “aus Π folgt S” also $\Pi \,\&\, S = \Pi$ könnte man auch ganz gut weglassen: die Regel B tut denselben Dienst. Schreibt man S in der Form $f0 \,\&\, F0 \,.\!\vee\!.\, f1 \,\&\, F1 \,.\!\vee\!.\, f2 \,\&\, F2 \,.\!\vee\!. \,.\!\vee\!. \ldots$ ad inf., so kann man mit grammatischen Regeln, die der gewohnten Sprache entsprechen, leicht $\Pi \,\&\, S = \Pi$ ableiten. Denn ($f0 \,\&\, F0 \,.\!\vee\!.\, f1 \,\&\, F1$ etc. ad inf.) $\&\, \Pi = f0 \,\&\, F0 \,\&\, \Pi \,.\!\vee\!.\, f1 \,\&\, F1 \,\&\, \Pi \,.\!\vee\!. \,.\!\vee\!.$ etc. ad inf. $= f0 \,\&\, P \,.\!\vee\!.\, f1 \,\&\, P \,.\!\vee\!.\, f2 \,\&\, P \,.\!\vee\!.$ etc. ad inf. $= = \Pi \,\&\, (f0 \vee f1 \vee f2 \vee$ etc. ad inf.$) = P$. Der Satz

“$f0 \vee f1 \vee f2 \vee$ etc. ad inf.” muß als Tautologie behandelt werden.

Ts-213 612r[3] & 613r[1] Man kann den Begriff der Gleichzahligkeit so auffassen, daß es keinen Sinn hat, von zwei Gruppen von Punkten Gleichzahligkeit oder das Gegenteil auszusagen, wenn es sich nicht um zwei Reihen handelt, deren eine zum mindesten einem Teil der andern 1–1 zugeordnet ist. Zwischen solchen Reihen kann dann nur von einseitiger oder gegenseitiger Inklusion die Rede sein. Und diese hat eigentlich mit besondern Zahlen so wenig zu tun, wie die Längengleichheit oder Ungleichheit im Gesichtsraum mit Maßzahlen. Die Verbindung mit den Zahlen *kann* gemacht werden, muß aber nicht gemacht werden. Wird die Verbindung mit der Zahlenreihe gemacht, so wird die Beziehung der gegenseitigen Inklusion oder Längengleichheit der Reihen zur Beziehung der Zahlengleichheit. Aber nun folgt nicht nur $F5$ aus $\Pi \,\&\, f5$ sondern auch Π aus $f5 \,\&\, F5$. Das heißt, hier ist $S = P$.

Ts-213 614r[1] **22** *****Mathematischer Beweis*.

Ts-213 615r[1] *Wenn ich sonst etwas suche, so kann ich das Finden beschreiben, auch wenn es nicht eingetreten ist; anders, wenn ich die Lösung eines mathematischen Problems suche.*

Mathematische Expedition und Polarexpedition.

Ts-213 615r[2] Wie kann es in der Mathematik Vermutungen geben? Oder vielmehr: Welcher Natur ist das, was in der Mathematik wie eine Vermutung aussieht? Wenn ich also etwa Vermutungen über die Verteilung der Primzahlen anstelle. Ich könnte mir z.B. denken, daß jemand in meiner Gegenwart Primzahlen der Reihe nach hinschriebe, ich wüßte nicht, daß es die Primzahlen sind – ich könnte etwa glauben, es seien Zahlen, wie sie ihm eben einfielen – und nun versuchte ich irgendein Gesetz in ihnen zu finden. Ich könnte nun geradezu eine Hypothese über diese Zahlenfolge aufstellen, wie über jede andere, die ein physikalisches Experiment ergibt. In welchem Sinne habe ich nun hiedurch eine Hypothese über die Verteilung der Primzahlen aufgestellt?

Ts-213 616r[1] Man könnte sagen, eine Hypothese in der Mathematik hat den Wert, daß sie die Gedanken an einen bestimmten Gegenstand – ich meine ein bestimmtes Gebiet – heftet und man könnte sagen "wir werden gewiß etwas Interessantes über diese Dinge herausfinden".

Ts-213 616r[2] Das Unglück ist, daß unsere Sprache so grundverschiedene Dinge mit jedem der Worte "Frage", "Problem", "Untersuchung", "Entdeckung" bezeichnet. Ebenso mit den Worten "Schluß", "Satz", "Beweis".

Ts-213 616r[3] Es frägt sich wieder, welche Art der Verifikation lasse ich für meine Hypothese gelten? Oder kann ich vorläufig – faute de mieux – die empirische gelten lassen, solange ich noch keinen "strengen Beweis" habe? Nein. Solange ein solcher Beweis nicht besteht, besteht gar keine Verbindung zwischen meiner Hypothese und dem "Begriff" der Primzahl.

Ts-213 616r[4] Erst der sogenannte Beweis verbindet die Hypothese überhaupt mit den Primzahlen *als solchen*. Und das zeigt sich daran, daß – wie gesagt – bis dahin die Hypothese als eine rein physikalische aufgefaßt werden kann. – Ist andererseits der Beweis geliefert, so beweist er gar nicht, was vermutet worden war, denn in die Unendlichkeit hinein kann ich nicht vermuten. Ich kann nur vermuten, was bestätigt werden kann, aber durch die Erfahrung kann nur eine endliche Zahl von Vermutungen bestätigt werden, und den Beweis kann man nicht vermuten, solange man ihn nicht hat, und dann auch nicht.

Ts-213 616r[5] & 617r[1] Angenommen, es hätte Einer den pythagoräischen Lehrsatz zwar nicht bewiesen, wäre aber durch Messungen der Katheten und Hypotenusen zur “Vermutung” dieses Satzes geführt worden. Und nun fände er den Beweis und sagt, er habe nun bewiesen, was er früher vermutet hatte: so ist doch wenigstens das eine merkwürdige Frage: An welchem Punkt des Beweises kommt denn nun das heraus, was er früher durch die einzelnen Versuche bestätigt fand? denn der Beweis ist doch wesensverschieden von der früheren Methode. – Wo berühren sich diese Methoden, da sie angeblich in irgendeinem Sinne das Gleiche ergeben? D.h.: Wenn der Beweis und die Versuche nur verschiedene Ansichten Desselben (derselben Allgemeinheit) sind. (Ich sagte “aus der gleichen Quelle fließt nur Eines” und man könnte sagen, es wäre doch zu *sonderbar*, wenn aus *so* verschiedenen Quellen dasselbe fließen sollte. Der Gedanke, daß aus verschiedenen Quellen dasselbe fließen kann ist und von der Physik, d.h. von den Hypothesen so geläufig. Dort schließen wir immer von Symptomen auf die Krankheiten und wissen, daß die verschiedensten Symptome, Symptome Desselben sein können.)

Ts-213 617r[2] Wie konnte man nach der Statistik *das* vermuten, was dann der Beweis zeigte?

Ts-213 617r[3] Wo soll aus dem Beweis dieselbe Allgemeinheit hervorspringen, die die früheren Versuche wahrscheinlich machten?

Ts-213 617r[4] Ich hatte die Allgemeinheit vermutet, ohne den Beweis zu vermuten (nehme ich an) und nun beweist der Beweis *gerade* die Allgemeinheit, die ich vermutete!?

Ts-213 617r[5] & 618r[1] Angenommen, jemand untersuchte gerade Zahlen auf das Stimmen des Goldbach'schen Satzes hin. Er würde nun die Vermutung aussprechen – und die läßt sich aussprechen – daß, wenn er mit dieser Untersuchung fortfährt, er solange er lebt keinen widersprechenden Fall antreffen werde. Angenommen, es werde nun ein Beweis des Satzes gefunden, – beweist der dann auch die Vermutung des Mannes? Wie ist das möglich?

Ts-213 618r[2] Nichts ist verhängnisvoller für das *philosophische* Verständnis, als die Auffassung von Beweis und Erfahrung als zweier verschiedener, also doch vergleichbarer Verifikationsmethoden.

Ts-213 618r[3] Welcher Art war Scheffers Entdeckung, daß p .⌄. q und non-p sich durch p | q ausdrücken lassen? – Man hatte keine Methode, nach p | q zu suchen und wenn man heute eine fände, so könnte das keinen Unterschied machen. Was war es, was wir vor der Entdeckung nicht wußten? (Es war nichts, was wir nicht wußten, sondern etwas, was wir nicht kannten.) Das sieht man sehr deutlich, wenn man sich den Einspruch erhoben denkt, p | p sei gar nicht das, was non-p sagt. Die Antwort ist natürlich, daß es sich nur darum handelt, daß das System p | q etc. die nötige Multiplizität hat. Scheffer hat also ein symbolisches System gefunden, das die nötige Multiplizität hat. Ist es ein Suchen, wenn ich das System Scheffers nicht kenne und sage, ich möchte ein System mit nur *einer* logischen Konstanten konstruieren. Nein! Die Systeme sind ja nicht in *einem* Raum, so daß ich sagen könnte: Es gibt Systeme mit 3 und 2 logischen Konstanten und nun suche ich die Zahl der Konstanten *in der selben Weise* zu vermindern. Es gibt hier keine *selbe Weise*.

Ts-213 618r[4] & 619r[1] Wenn auf die Lösung – etwa – des Fermat'schen Problems Preise ausgesetzt sind, so könnte *man mir vorhalten*: Wie kannst Du behaupten, daß es dieses Problem nicht gebe; wenn Preise auf die Lösung ausgesetzt sind, so muß es das Problem wohl geben. Ich müßte sagen: Gewiß, nur mißverstehen die, die darüber reden, die Grammatik des Wortes "mathematisches Problem" und des Wortes "Lösung". Der Preis ist eigentlich auf die Lösung einer naturwissenschaftlichen Aufgabe gesetzt; (*gleichsam*) auf das *Äußere* der Lösung (darum spricht man z.B. auch von einer Riemann'schen *Hypothese*). Die Bedingungen der Aufgabe sind äußerliche; und wenn die Aufgabe gelöst ist, so entspricht, was geschehen ist, der gestellten Aufgabe, wie die Lösung einer physikalischen Aufgabe dieser Aufgabe.

Ts-213 619r[2] Wäre die Aufgabe, eine Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks zu finden, so ist die Konstruktion in dieser Aufgabestellung durch das physikalische Merkmal charakterisiert, daß sie tatsächlich *ein durch Messung definiertes* regelmäßiges Fünfeck liefern soll. Denn den Begriff der *konstruktiven Fünfteilung* (oder des *konstruktiven Fünfecks*) haben wir ja noch gar nicht.

Ts-213 619r[3] Ebenso im Fermat'schen Satz haben wir ein empirisches Gebilde, das wir als *Hypothese* deuten, also – natürlich – nicht als Ende einer Konstruktion. Die Aufgabe fragt also, in gewissem Sinne, nach etwas Anderem, als was die Lösung gibt.

Ts-213 619r[4] Natürlich steht auch der Beweis des Gegenteils des Fermat'schen Satzes, z.B., – im gleichen Verhältnis zur Aufgabe, wie der Beweis des Satzes. (Beweis der Unmöglichkeit einer Konstruktion.)

Ts-213 620r[1] Sofern man die Unmöglichkeit der 3-Teilung als eine physische Unmöglichkeit darstellen kann, indem man z.B. sagt: "versuch' nicht, den Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, es ist hoffnungslos!", insofern beweist der "Beweis der Unmöglichkeit" diese *nicht*. Daß es *hoffnungslos* ist, die Teilung zu versuchen, das hängt mit physikalischen Tatsachen zusammen.

Ts-213 620r[2] Denken wir uns, jemand stellte sich *folgendes* Problem: Es ist ein Spiel zu erfinden: das Spiel soll auf einem Schachbrett gespielt werden; jeder Spieler soll 8 Steine haben; von den weißen Steinen sollen 2 (die "Konsulen"), die an den Enden der Anfangsposition stehen, durch die Regeln irgendwie ausgezeichnet sein; sie sollen eine größere Bewegungsfreiheit haben als die andern; von den schwarzen Steinen soll einer (der "Feldherr") ein ausgezeichneter sein; ein weißer Stein nimmt einen schwarzen (und umgekehrt), indem er sich an dessen Stelle setzt; das ganze Spiel soll eine gewisse Analogie mit den Punischen Kriegen haben. Das sind die Bedingungen, denen das Spiel zu genügen hat. – Das ist gewiß eine Aufgabe, und eine Aufgabe ganz andrer Art, als die, herauszufinden, wie Weiß im Schachspiel unter gewissen Bedingungen gewinnen könne. – Denken wir uns nun aber die Frage: "Wie kann Weiß in unserm Kriegsspiel, dessen Regeln wir noch nicht genau kennen, in 20 Zügen gewinnen?" – Dieses Problem wäre ganz analog den Problemen der Mathematik (nicht ihren Rechenaufgaben).

Ts-213 620r[3] Was versteckt ist, muß gefunden werden können. (Versteckter Widerspruch.)

Ts-213 621r[1] Was versteckt ist, muß sich auch, ehe es gefunden wurde, ganz beschreiben lassen, als wäre es (schon) gefunden.

Ts-213 621r[2] Wenn man sagt, der Gegenstand ist so versteckt, daß es unmöglich ist, ihn zu finden, so hat das guten Sinn und die Unmöglichkeit ist hier natürlich keine logische; d.h., es hat *Sinn*, von dem Finden des Gegenstandes zu reden und auch, es zu beschreiben; und wir leugnen nur, daß *das* geschehen wird.

Ts-213 621r[3] & 622r[1]

Man könnte so sagen: Wenn ich etwas suche – ich meine, den Nordpol, oder ein Haus in London – so kann ich das, was ich suche, *vollständig* beschreiben, ehe ich es gefunden habe (oder gefunden habe, daß es nicht da ist) und diese Beschreibung wird in jedem Fall logisch einwandfrei sein. Während ich im Falle des "*Suchens*" in der Mathematik, wo es nicht *in* einem System geschieht, das was ich suche, nicht beschreiben kann, oder nur scheinbar; denn, könnte ich es in allen Einzelheiten beschreiben, so *hätte* ich es eben schon, und ehe es *vollständig* beschrieben ist, kann ich nicht sicher sein, ob *das* was ich suche, logisch einwandfrei ist, sich also überhaupt beschreiben läßt; d.h. diese unvollkommene Beschreibung läßt gerade das aus, was notwendig wäre, damit etwas gesucht werden könnte. Sie ist also nur eine Scheinbeschreibung des "Gesuchten". Irregeführt wird man hier leicht durch die Rechtmäßigkeit einer unvollkommenen Beschreibung im Falle des Suchens eines wirklichen Gegenstandes, und hier spielt wieder eine Unklarheit über die Begriffe 'Beschreibung' und 'Gegenstand' hinein. Wenn man sagt, ich gehe auf den Nordpol und erwarte mir dort eine Flagge zu finden, so hieße das in der Russell'schen Auffassung: ich erwarte mir Etwas (ein X) zu finden, das eine Flagge – etwa von dieser und dieser Farbe und Größe – ist. Und es scheint dann, als bezöge sich die Erwartung (das Suchen) auch hier nur auf eine *Beschreibung* und nicht auf den Gegenstand selbst, den ich erst dann direkt kenne (knowledge by acquaintance), wenn ich ihn vor mir habe (während ich früher nur indirekt mit ihm bekannt bin). Aber das ist Unsinn. Was immer ich dort wahrnehmen kann – soweit es eine Bestätigung meiner Erwartung ist – kann ich auch schon vorher beschreiben. Und “beschreiben” heißt hier nicht, etwas darüber aussagen, sondern es aussprechen, d.h.: Was ich suche, muß ich *vollständig* beschreiben *können*.

Ts-213 622r[2] Die Frage ist: Kann man sagen, daß die Mathematik heute gleichsam ausgezackt – oder ausgefranst – ist und daß man sie deshalb wird abrunden können. Ich glaube, man kann das erstere nicht sagen, ebensowenig wie man sagen kann, die Realität sei *struppig*, weil es 4 primäre Farben, sieben Töne in einer Oktav, drei Dimensionen im Sehraum etc. gäbe.

Ts-213 622r[3] Die Mathematik “abrunden” kann man so wenig, wie man sagen kann “runden wir die vier primären Farben auf fünf oder zehn ab”, oder “runden wir die acht Töne einer Oktav auf zehn ab”.

Ts-213 622r[4] Vergleich zwischen einer mathematischen Expedition und einer Polarexpedition. Diesen Vergleich anzustellen hat Sinn und ist sehr nützlich.

Ts-213 622r[5] & 623r[1] Wie seltsam wäre es, wenn eine geographische Expedition nicht sicher wüßte, ob sie ein Ziel, also auch ob sie überhaupt einen Weg hat. Das können wir uns nicht denken, es gibt Unsinn. Aber in der mathematischen Expedition verhält es sich geradeso. Also wird es vielleicht am besten sein, den Vergleich ganz fallen zu lassen. Es wäre wie eine Expedition, die *des Raumes* nicht ganz sicher wäre!

Ts-213 623r[2] Könnte man sagen, daß die arithmetischen oder geometrischen Probleme immer so ausschauen, oder fälschlich so aufgefaßt werden können, als bezögen sie sich auf Gegenstände im Raum, während sie sich auf den Raum selbst beziehen?

Ts-213 623r[3] Raum nenne ich das, dessen man beim Suchen *gewiß* sein kann.

Ts-213 624r[1]

23 *Beweis, und Wahrheit und Falschheit eines mathematischen Satzes.*

Ts-213 624r[2] Der bewiesene mathematische Satz hat in seiner Grammatik zur Wahrheit hin ein Übergewicht. Ich kann, um den Satz von $25 \times 25 = 625$ zu verstehen, fragen: wie wird dieser Satz bewiesen. Aber ich kann nicht fragen: wie wird – oder würde – sein Gegenteil bewiesen; denn es hat keinen Sinn, vom Beweis des Gegenteils von $25 \times 25 = 625$ zu reden. Will ich also *eine Frage stellen*, die von der Wahrheit des Satzes unabhängig ist, so muß ich von der *Kontrolle* seiner Wahrheit, nicht von ihrem Beweis, oder *Gegenbeweis*, reden. Die Methode der Kontrolle entspricht dem, was man den Sinn des mathematischen Satzes nennen kann. Die Beschreibung dieser Methode ist allgemein und bezieht sich auf ein System von Sätzen, etwa den Sätzen der Form $a \times b = c$.

Ts-213 624r[3] Man kann nicht sagen: “ich werde ausrechnen, *daß* es so ist”, sondern “*ob* es so ist”. Also, ob *so*, oder anders.

Ts-213 624r[4] & 625r[1] Die Methode der Kontrolle der Wahrheit entspricht dem Sinn des mathematischen Satzes. Kann von so einer Kontrolle nicht die Rede sein, dann bricht die Analogie der "mathematischen Sätze" mit dem, was wir sonst Satz nennen, zusammen. So gibt es eine Kontrolle für die Sätze der Form "$(\exists k)nm|nm\ldots$" und "non$(\exists k)nm|nm\ldots$", die sich auf Intervalle beziehen.

Ts-213 625r[2] Denken wir nun an die Frage: "hat die Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ eine reelle Lösung". Hier gibt es wieder eine Kontrolle und die Kontrolle scheidet zwischen den Fällen $(\exists\ldots)$ etc. und non $(\exists\ldots)$ etc.. Kann ich aber in demselben Sinne auch fragen und kontrollieren "ob die Gleichung eine Lösung hat"? es sei denn, daß ich diesen Fall wieder mit andern in ein System bringe.

Ts-213 625r[3] (In Wirklichkeit konstruiert der "Beweis des Hauptsatzes der Algebra" eine neue Art von Zahlen.)

Ts-213 625r[4] Gleichungen sind eine Art von Zahlen. (D.h. sie können den Zahlen ähnlich behandelt werden.)

Ts-213 625r[5] & 626r[1]

Der “Satz der Mathematik”, welcher durch eine Induktion bewiesen ist –, so aber, daß man nach dieser Induktion nicht in einem System von Kontrollen suchen kann, – ist nicht ‘Satz’ in dem Sinne, in welchem es die Antwort auf eine mathematische Frage ist. “Jede Gleichung G hat eine Wurzel”. Und wie, wenn sie keine hat? können wir diesen Fall beschreiben, wie den, daß sie keine rationale Lösung hat? Was ist das Kriterium dafür, daß eine Gleichung keine Lösung hat? Denn dieses Kriterium muß gegeben sein, wenn die mathematische *Frage* einen Sinn haben soll und wenn das, was die Form eines Existenzsatzes hat, “Satz” im Sinne der Antwort auf eine Frage sein soll. (Worin besteht die Beschreibung des Gegenteils; worauf stützt sie sich; auf welche Beispiele, und wie sind diese Beispiele mit einem besonderen Fall des bewiesenen Gegenteils verwandt? Diese Fragen sind nicht etwa nebensächlich, sondern absolut wesentlich.) (Die Philosophie der Mathematik besteht in einer *genauen* Untersuchung der mathematischen Beweise – nicht darin, daß man die Mathematik mit einem Dunst umgibt.)

Ts-213 626r[2] & 627r[1] Wenn in den Diskussionen über die Beweisbarkeit der mathematischen Sätze gesagt wird, es gäbe wesentlich Sätze der Mathematik, deren Wahrheit oder Falschheit unentschieden bleiben müsse, so bedenken, die es sagen, nicht, daß solche Sätze, *wenn* wir sie gebrauchen können und "Sätze" nennen wollen, ganz andere Gebilde sind, als was sonst "Satz" genannt wird: denn der Beweis ändert die Grammatik des Satzes. Man kann wohl ein und dasselbe Brett einmal als Windfahne, ein andermal als Wegweiser verwenden; aber das feststehende nicht als Windfahne und das bewegliche nicht als Wegweiser. Wollte jemand sagen "es gibt auch bewegliche Wegweiser", so würde ich ihm antworten: "Du willst wohl sagen, 'es gibt auch bewegliche *Bretter*'; und ich sage nicht, daß das bewegliche Brett unmöglich irgendwie verwendet werden kann, – nur nicht als Wegweiser". Das Wort "Satz", wenn es hier überhaupt Bedeutung haben soll, ist äquivalent einem Kalkül und zwar jedenfalls den, in welchem p.⌄. non-p = Taut. ist (das "Gesetz des ausgeschlossenen Dritten" gilt). Soll es nicht gelten, so haben wir den Begriff des Satzes geändert. Aber wir haben damit keine Entdeckung gemacht (etwas gefunden, das ein Satz ist, und dem und dem Gesetz nicht gehorcht); sondern eine neue Festsetzung getroffen, ein neues Spiel angegeben.

Ts-213 628r[1] 24 *Wenn Du wissen willst, **was** bewiesen wurde, schau den Beweis an.*

Ts-213 628r[2] Die Mathematiker verirren sich nur dann, wenn sie über Kalküle im Allgemeinen reden wollen; und zwar darum, weil sie dann die besondern Bestimmungen vergessen, die jedem besonderen Kalkül als Grundlage dienen.

Ts-213 628r[3] Der Grund, warum alle Philosophen der Mathematik fehlgehen, ist der, daß man in der Logik nicht allgemeine Dikta durch Beispiele begründen kann, wie in der Naturgeschichte. Sondern jeder besondere Fall hat die größtmögliche Bedeutung, und anderseits ist mit ihm alles erschöpft, und man kann keinen allgemeinen Schluß aus ihm ziehen (also *keinen* Schluß).

Ts-213 628r[4] Eine logische Fiktion gibt es nicht und darum kann man nicht mit logischen Fiktionen arbeiten; und muß jedes Beispiel ganz ausführen.

Ts-213 629r[1] In der Mathematik kann es nur mathematische Schwierigkeiten geben, nicht philosophische.

Ts-213 629r[2] Der Philosoph notiert eigentlich nur das, was der Mathematiker so gelegentlich über seine *Tätigkeit* hinwirft.

Ts-213 629r[3] Der Philosoph kommt leicht in die Lage eines ungeschickten Direktors, der, statt *seine* Arbeit zu tun und nur darauf zu schauen, daß seine Angestellten ihre Arbeit richtig machen, ihnen ihre Arbeit abnimmt und sich so eines Tages mit fremder Arbeit überladen sieht, während die Angestellten zuschaun und ihn kritisieren. Besonders ist er geneigt, sich die Arbeit des Mathematikers aufzuhalsen.

Ts-213 629r[4] Wenn Du wissen willst, was der Ausdruck “Stetigkeit einer Funktion” bedeutet, schau’ den Beweis der Stetigkeit an; der wird ja zeigen, was er beweist. Aber sieh nicht das Resultat an, wie es in Prosa hingeschrieben ist und auch nicht, wie es in der Russell’schen Notation lautet, die ja bloß eine Übersetzung des Prosaausdrucks ist; sondern richte Deinen Blick dorthin, wo im Beweis noch gerechnet wird. Denn der Wortausdruck des angeblich bewiesenen Satzes ist meist irreführend, denn er verschleiert das eigentliche Ziel des Beweises, das in diesem mit voller Klarheit zu sehen ist.

Ts-213 629r[5] & 630r[1] “Wird die Gleichung von irgend welchen Zahlen befriedigt?”; “sie wird von Zahlen befriedigt”; “sie wird von allen Zahlen (von keiner Zahl) befriedigt”. Hat Dein Kalkül Beweise? und welche? daraus erst wird man den Sinn dieser Sätze und Fragen entnehmen können.

Ts-213 630r[2] Sage mir *wie* Du suchst und ich werde Dir sagen *was* Du suchst.

Ts-213 630r[3] & 631r[1]

Wir werden uns zuerst fragen müssen: Ist der mathematische Satz bewiesen? und wie? Denn der Beweis gehört zur Grammatik des Satzes! – Daß das so oft nicht eingesehen wird, kommt daher, daß wir hier wieder auf der Bahn einer uns irreführenden Analogie denken. Es ist, wie gewöhnlich in diesen Fällen, eine Analogie aus unserm naturwissenschaftlichen Denken. Wir sagen z.B. "dieser Mann ist vor 2 Stunden gestorben", und wenn man uns fragt "wie läßt sich das feststellen", so können wir eine Reihe von Anzeigen (Symptomen) dafür angeben. Wir lassen aber auch die Möglichkeit dafür offen, daß etwa die Medizin bis jetzt unbekannte Methoden entdeckt, *die Zeit* des Todes festzustellen und das heißt: Wir können solche mögliche Methoden auch jetzt schon beschreiben, denn nicht ihre Beschreibung wird entdeckt, sondern, es wird nur experimentell festgestellt, ob die Beschreibung den Tatsachen entspricht. So kann ich z.B. sagen: eine Methode besteht darin, die Quantität des Hämoglobins im Blut zu finden, denn diese nehme mit der Zeit nach dem Tode, nach dem und dem Gesetz, ab. Das stimmt natürlich nicht, aber, wenn es stimmte, so würde sich dadurch an der von mir erdichteten Beschreibung nichts ändern. Nennt man nun die medizinische Entdeckung "die Entdeckung eines Beweises dafür, daß der Mann vor 2 Stunden gestorben ist", so muß man sagen, daß diese Entdeckung an der Grammatik des Satzes "der Mann ist vor 2 Stunden gestorben", nichts ändert. Die Entdeckung ist die Entdeckung, daß eine bestimmte Hypothese wahr ist (oder: mit den Tatsachen übereinstimmt). Diese Denkweise sind wir nun so gewöhnt, daß wir den Fall der Entdeckung eines Beweises in der Mathematik unbesehen für den gleichen oder einen ähnlichen halten. Mit Unrecht: denn, kurz gesagt, den mathematischen Beweis konnte man nicht beschreiben, ehe er gefunden war. Der ‘medizinische Beweis’ hat die Hypothese, die er bewiesen hat, nicht in einen neuen Kalkül eingegliedert und ihm *also* keinen neuen Sinn gegeben; der mathematische Beweis gliedert den mathematischen Satz in einen neuen Kalkül ein, er verändert seine Stellung in der Mathematik. Der Satz mit seinem Beweis gehört einer andern Kategorie an, als der Satz ohne den Beweis. (Der unbewiesene mathematische Satz – Wegweiser der mathematischen Forschung, Anregung zu mathematischen Konstruktionen.)

Ts-213 631r[2] Sind die Variablen von *derselben* Art in den Gleichungen: $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$ $x^2 + 3x + 2 = 0$ $x^2 + ax + b = 0$ $x^2 + xy + z = 0$?

Das kommt auf die Verwendung dieser Gleichungen an. – Aber der Unterschied zwischen № 1 und № 2 (wie sie gewöhnlich gebraucht werden) ist nicht einer der Extension der Werte, die sie befriedigen. Wie beweist Du den Satz “№ 1 gilt für alle Werte von x und y” und wie den Satz “es gibt Werte von x, die № 2 befriedigen”? So viel Analogie in diesen Beweisen ist, soviel Analogie ist im Sinn der beiden Sätze.

Ts-213 631r[3] & 632[1]

Aber kann ich nicht von einer Gleichung sagen: "Ich weiß, sie stimmt für einige Substitutionen nicht – ich erinnere mich nicht, für *welche* –; ob sie aber allgemein nicht stimmt, das weiß ich nicht"? – Aber was meinst Du damit, wenn Du sagst, Du weißt das? Wie weißt Du es? Hinter den Worten "ich weiß …" ist ja nicht ein bestimmter Geisteszustand, der der Sinn dieser Worte wäre. Was kannst Du mit diesem Wissen anfangen? denn das wird zeigen, worin dieses Wissen besteht. Kennst Du eine Methode, um festzustellen, daß die Gleichung allgemein ungiltig ist? Erinnerst Du Dich daran, daß die Gleichung für einige Werte von x zwischen 0 und 1000 nicht stimmt? Hat Dir jemand bloß die Gleichung gezeigt und gesagt, er habe Werte für x gefunden, die die Gleichung nicht befriedigen, und weißt Du vielleicht selbst nicht, wie man dies für einen gegebenen Wert konstatiert? etc. etc.

Ts-213 632r[2]

"Ich habe ausgerechnet, daß es keine Zahl gibt, welche …". – In welchem Rechnungssystem kommt diese Rechnung vor? – Dies wird uns zeigen, in welchem Satzsystem der errechnete Satz ist. (Man fragt auch: "wie rechnet man *so etwas* aus?")

Ts-213 632r[3] & 633r[1] & 634r[1]

"Ich habe gefunden, daß es so eine Zahl gibt". "Ich habe ausgerechnet, daß es keine solche Zahl gibt". Im ersten Satz darf ich nicht "keine" statt "eine" einsetzen. – Und wie, wenn ich im zweiten statt "keine" "eine" setze? Nehmen wir an, die Rechnung ergibt nicht den Satz "non $(\exists n)$ etc.", sondern "$(\exists n)$ etc.". Hat es dann etwa Sinn zu sagen: "nur Mut! jetzt mußt Du *einmal* auf eine solche Zahl kommen, wenn Du nur lang genug probierst"? *Das* hat nur Sinn, wenn der Beweis nicht "$(\exists n)$ etc." ergeben, sondern dem Probieren Grenzen gesteckt hat, also etwas ganz anderes geleistet hat. D.h., das, was wir den Existenzsatz nennen, der uns eine Zahl suchen lehrt, hat zum Gegenteil nicht den Satz "$(n).$ etc.", sondern einen Satz, der sagt, daß in dem und dem Intervall keine Zahl ist, die .... Was ist das Gegenteil des Bewiesenen? – Dazu muß man auf den Beweis schauen. Man kann sagen: das Gegenteil des bewiesenen Satzes ist das, was statt seiner durch einen bestimmten Rechnungsfehler im Beweis bewiesen worden wäre. Wenn nun z.B. der Beweis, daß non $(\exists n).$ etc. der Fall ist, eine Induktion ist die zeigt, daß, soweit ich auch gehe, eine solche Zahl nicht vorkommen kann, so ist das Gegenteil dieses Beweises (ich will einmal diesen Ausdruck gebrauchen) nicht der Existenzbeweis in unserem Sinne. – Es ist hier nicht, wie im Fall des Beweises, daß keine oder eine der Zahlen a, b, c, d die Eigenschaft P hat; und diesen Fall hat man immer als Vorbild vor Augen. Hier könnte ein Irrtum darin bestehen, daß ich glaube c hätte die Eigenschaft und, nachdem ich den Irrtum eingesehen hätte, wüßte ich, daß *keine* der Zahlen die Eigenschaft hat. Die Analogie bricht eben hier zusammen. (Das hängt damit zusammen, daß ich nicht in jedem Kalkül, in dem ich Gleichungen gebrauchen, eo ipso auch die Verneinungen von Gleichungen gebrauchen darf. Denn $2 \times 3 = 7$ heißt nicht, daß die Gleichung "$2 \times 3 = 7$" nicht vorkommen soll, wie etwa die Gleichung "$2 \times 3 =$ Sinus", sondern die Verneinung ist eine Ausschließung innerhalb eines von vornherein bestimmten Systems. Eine Definition kann ich nicht verneinen, wie eine nach Regeln abgeleitete Gleichung.) Sagt man, das Intervall im Existenzbeweis sei nicht wesentlich, da ein andres Intervall es auch getan hätte, so heißt das natürlich nicht, daß das Fehlen einer Intervallangabe es auch getan hätte. – Der Beweis der Nichtexistenz hat zum Beweis der Existenz nicht das Verhältnis eines Beweises von p zum Beweis des Gegenteils. Man sollte glauben, in dem Beweis des Gegenteils von "$(\exists n)$. etc." müßte sich eine Negation einschleichen können, durch die irrtümlicherweise "non $(\exists n)$ etc." bewiesen wird. Gehen wir doch einmal, umgekehrt, von den Beweisen aus und nehmen wir an, sie wären uns ursprünglich gezeigt worden und man hätte uns dann gefragt: was beweisen diese Rechnungen? Sieh auf die Beweise und entscheide *dann*, was sie beweisen.

Ts-213 634r[2] Ich brauche nicht zu *behaupten*, man müsse die n Wurzeln der Gleichung n-ten Grades konstruieren können, sondern ich sage nur, daß der Satz "diese Gleichung hat n Wurzeln" etwas *anderes heißt*, wenn ich ihn durch Abzählen der konstruierten Wurzeln, und wenn ich ihn anderswie bewiesen habe. Finde ich aber eine Formel für die Wurzeln einer Gleichung, so habe ich einen neuen Kalkül konstruiert und keine Lücke eines alten ausgefüllt.

Ts-213 634r[3] Es ist daher Unsinn zu sagen, der Satz ist erst bewiesen, wenn man eine solche Konstruktion aufzeigt. Denn dann haben wir eben etwas Neues konstruiert, und was wir jetzt unter dem Hauptsatz der Algebra verstehen, ist eben, was der gegenwärtige 'Beweis' uns zeigt.

Ts-213 634r[4] & 635r[1] "Jeder Existenzbeweis muß eine Konstruktion dessen enthalten, dessen Existenz er beweist". Man kann nur sagen "ich nenne 'Existenzbeweis' nur einen, der eine solche Konstruktion enthält". Der Fehler ist, daß man glaubt einen klaren *Begriff* des Existenzbeweises zu besitzen. Man glaubt, ein Etwas, die Existenz, beweisen zu können, sodaß man nun *unabhängig vom Beweis* von ihr überzeugt ist. (Die Idee der, voneinander – und daher wohl auch vom Bewiesenen – unabhängigen Beweise!) In Wirklichkeit ist Existenz das, was man mit *dem* beweist, was man "Existenzbeweis" nennt. Wenn die Intuitionisten und Andere darüber reden, *so sagen sie*: "Dieser Sachverhalt, die Existenz, kann man nur so, und nicht so, beweisen". Und sehen nicht, daß sie damit einfach das definiert haben, was *sie* Existenz nennen. Denn die Sache verhält sich eben nicht so, wie wenn man sagt: "daß ein Mann in dem Zimmer ist, kann man nur dadurch beweisen, daß man hineinschaut, aber nicht, indem man an der Türe horcht".

Ts-213 635r[2] Wir haben keinen Begriff der Existenz unabhängig von unserm Begriff des Existenzbeweises.

Ts-213 635r[3] Warum ich sage, daß wir einen Satz, wie den Hauptsatz der Algebra, nicht finden, sondern konstruieren? – Weil wir ihm beim Beweis einen neuen Sinn geben, den er früher gar nicht gehabt hat. Für diesen Sinn gab es vor dem sogenannten Beweis nur eine beiläufige Vorlage in der Wortsprache.

Ts-213 635r[4] Denken wir, Einer würde sagen: das Schachspiel mußte nur *entdeckt* werden, es war immer da! Oder das *reine* Schachspiel war immer da, nur das materielle, von Materie verunreinigte, haben wir gemacht.

Ts-213 635r[5] Wenn durch Entdeckungen ein Kalkül der Mathematik geändert wird, – können wir den alten Kalkül nicht behalten (aufheben)? (D.h., müssen wir ihn wegwerfen?) Das ist ein sehr interessanter Aspekt. Wir haben nach der Entdeckung des Nordpols nicht zwei Erden: eine mit, und eine ohne den Nordpol. Aber nach der Entdeckung des Gesetzes der Verteilung der Primzahlen, zwei Arten von Primzahlen.

Ts-213 635r[6] & 636r[1]

Die mathematische Frage muß so exakt sein, wie der mathematische Satz. Wie irreführend die Ausdrucksweise der Wortsprache den Sinn der mathematischen Sätze darstellt, sieht man, wenn man sich die Multiplizität eines mathematischen Beweises vor Augen stellt und bedenkt, daß der Beweis zum *Sinn* des bewiesenen Satzes gehört, d.h. den Sinn bestimmt. Also nicht etwas ist, was bewirkt, daß wir einen bestimmten Satz glauben, sondern etwas, was uns zeigt, *was* wir glauben, – wenn hier von glauben eine Rede sein kann. Begriffswörter in der Mathematik: Primzahl, Kardinalzahl, etc.. Es scheint darum unmittelbar Sinn zu haben, wenn gefragt wird: "Wieviel Primzahlen gibt es?" ("Es glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört, ...".) In Wirklichkeit ist diese Wortzusammenstellung einstweilen Unsinn; bis für sie eine besondere Syntax gegeben wurde. Sieh' den Beweis dafür an, "daß es unendlich viele Primzahlen gibt" und dann die Frage, die er zu beantworten scheint. Das Resultat eines intrikaten Beweises kann nur insofern einen einfachen Wortausdruck haben, als das System von Ausdrücken, dem dieser Ausdruck angehört, in seiner Multiplizität einem System solcher Beweise entspricht. – Die Konfusionen in diesen Dingen sind ganz darauf zurückzuführen, daß man die Mathematik als eine Art Naturwissenschaft behandelt. Und das wieder hängt damit zusammen, daß sich die Mathematik von der Naturwissenschaft abgelöst hat. Denn, solange sie in unmittelbarer Verbindung mit der Physik betrieben wird, ist es klar, daß *sie* keine Naturwissenschaft ist. (Etwa, wie man einen Besen nicht für ein Einrichtungsstück des Zimmers halten kann, solange man ihn dazu benützt, die Einrichtungsgegenstände zu säubern.)

Ts-213 636r[2] Ist nicht die Hauptgefahr die, daß uns der Prosa-Ausdruck des Ergebnisses einer mathematischen *Operation* einen Kalkül vortäuscht, der gar nicht vorhanden ist. Indem er seiner äußern Form nach einem System anzugehören scheint, das es hier gar nicht gibt.

Ts-213 636r[3] & 637r[1] Ein Beweis ist Beweis eines (bestimmten) Satzes, wenn er es nach einer Regel ist, nach der dieser Satz diesem Beweis zugeordnet ist. D.h., der Satz muß einem System von Sätzen angehören und der Beweis einem System von Beweisen. Und jeder Satz der Mathematik muß einem Kalkül der Mathematik angehören. (Und kann nicht in Einsamkeit thronen und sich sozusagen nicht unter andere Sätze mischen.) Also ist auch der Satz "jede Gleichung n-ten Grades hat n Lösungen" nur ein Satz der Mathematik, sofern er einem System von Sätzen, und sein Beweis einem korrespondierenden System von Beweisen, entspricht. Denn welchen guten Grund habe ich, dieser Kette von Gleichungen etc. (dem sogenannten Beweis) *diesen* Prosasatz zuzuordnen. Es muß doch aus dem Beweis – nach einer Regel – hervorgehen, von welchem Satz er der Beweis ist.

Ts-213 637r[2] Nun liegt es aber im Wesen dessen, *was wir als Satz bezeichnen*, daß es sich verneinen lassen muß. Und auch die Verneinung des bewiesenen Satzes muß mit dem Beweis zusammenhängen; so nämlich, daß sich zeigen läßt, unter welchen andern, entgegengesetzten, Bedingungen sie herausgekommen wäre.

Ts-213 638r[1] **25** ***Das mathematische Problem.***

Arten der Probleme.

Suchen.

"Aufgaben" in der Mathematik.

Ts-213 638r[2] Wo man fragen kann, kann man auch suchen, und wo man nicht suchen kann, kann man auch nicht fragen. Und auch nicht antworten.

Ts-213 638r[3] Wo es keine Methode des Suchens gibt, da kann auch die Frage keinen Sinn haben. – Nur wo eine Methode der Lösung ist, ist eine Frage (d.h. natürlich nicht: "nur wo die Lösung gefunden ist, ist eine Frage"). – D.h.: dort wo die Lösung des Problems nur von einer Art Offenbarung erwartet werden kann, ist auch keine Frage. Einer Offenbarung entspricht keine Frage. –

Ts-213 638r[4] & 639r[1] Die Annahme der Unentscheidbarkeit setzt voraus, daß zwischen den beiden Seiten einer Gleichung, sozusagen, eine unterirdische Verbindung besteht; daß die Brücke nicht in Symbolen geschlagen werden kann. Aber dennoch besteht; denn sonst wäre die Gleichung sinnlos. – Aber die Verbindung besteht nur, wenn *wir* sie durch *Symbole* gemacht haben. Der Übergang ist nicht durch eine dunkle Spekulation hergestellt, von andrer Art als das was er verbindet. (Wie ein dunkler Gang zwischen zwei lichten Orten.)

Ts-213 639r[2] Ich kann den Ausdruck “die Gleichung G ergibt die Lösung L” nicht *eindeutig* anwenden, solange ich keine Methode der Lösung besitze; weil “ergibt” eine Struktur bedeutet, die ich, ohne sie zu kennen, nicht bezeichnen kann. Denn das heißt das Wort “ergibt” zu verwenden, ohne seine Grammatik zu kennen. Ich könnte aber auch sagen: Das Wort “ergibt” hat andere Bedeutung, wenn ich es so verwende, daß es sich auf eine Methode der Lösung bezieht, und eine andere, wenn dies nicht der Fall ist. Es verhält sich hier mit “ergibt” ähnlich, wie mit dem Wort “gewinnen” (oder “verlieren”), wenn das Kriterium des “Gewinnens” einmal ein bestimmter Verlauf der Partie ist (hier muß ich die Spielregeln kennen, um sagen zu können, ob Einer gewonnen hat), oder ob ich mit “gewinnen” etwas meine, was sich etwa durch “zahlen müssen” ausdrücken ließe. Wenn wir “ergibt” im ersten Sinne anwenden, so heißt “die Gleichung ergibt L”; wenn ich die Gleichung nach gewissen Regeln transformiere, so erhalte ich L. So wie die Gleichung $25 \times 25 = 620$ besagt, daß ich 620 erhalte, wenn ich auf 25×25 die Multiplikationsregeln anwende. Aber diese Regeln müssen mir *nun* schon gegeben sein, ehe das Wort “ergibt” Bedeutung hat, und ehe die Frage einen Sinn hat, ob die Gleichung L ergibt.

Ts-213 639r[3] & 640r[1] Es genügt also nicht zu sagen "p ist beweisbar", sondern es muß heißen: beweisbar nach einem bestimmten System. Und zwar behauptet der Satz nicht, p sei beweisbar nach dem System S, sondern nach *seinem* System, dem System von p. Daß p dem System S angehört, das läßt sich nicht behaupten (das muß sich zeigen). – Man kann nicht sagen, p gehört zum System S; man kann nicht fragen, zu welchem System p gehört; man kann nicht das System von p suchen. "p verstehen" heißt, sein System kennen. Tritt p scheinbar von einem System in das andere über, so hat in Wirklichkeit p seinen Sinn gewechselt.

Ts-213 640r[2] Es ist unmöglich, Entdeckungen neuartiger Regeln zu machen, die von einer uns bekannten Form (etwa dem Sinus eines Winkels) gelten. Sind es neue Regeln, so ist es nicht die alte Form.

Ts-213 640r[3] Kenne ich die Regeln der elementaren Trigonometrie, so kann ich den Satz sin 2x = 2 sin x.cos x kontrollieren, aber nicht den Satz $\mathrm{sin}x=x-x^{3}3!+x^{5}5!-\dots.$ Das heißt aber, daß der Sinus der elementaren Trigonometrie und der Sinus der höheren Trigonometrie verschiedene Begriffe sind. Die beiden Sätze stehen gleichsam auf zwei verschiedenen Ebenen. In der ersten kann ich mich bewegen, soweit ich will, ich werde nie zu dem Satz auf der höheren Ebene kommen. Der Schüler, dem das Rüstzeug der elementaren Trigonometrie zur Verfügung stünde und von dem die Überprüfung der Gleichung $\mathrm{sin}x=x-x^{3}3!\dots$ verlangt würde, fände das, was er zur Bewältigung dieser Aufgabe braucht, eben nicht vor. Er kann die Frage nicht nur nicht beantworten, sondern er kann sie auch nicht verstehen. (Sie wäre wie die Aufgabe, die der Fürst im Märchen dem Schmied stellt: ihm einen "Klamank" zu bringen. Busch, Volksmärchen.)

Ts-213 640r[4] & 641r[1] Man nennt es eine Aufgabe, wenn gefragt wird "wieviel ist 25 × 16", aber auch eine Aufgabe: was ist das $\int \sin^2 x \, dx$? Die erste hält man zwar für viel leichter als die zweite, sieht aber nicht, daß sie in verschiedenem Sinn 'Aufgaben' sind. Der Unterschied ist *natürlich* kein psychologischer; und es handelt sich nicht drum, ob der Schüler die Aufgabe lösen kann, sondern ob der Kalkül sie lösen kann, oder, welcher Kalkül sie lösen kann.

Ts-213 641r[2] Die Unterschiede, auf die ich aufmerksam machen kann, sind solche, wie sie jeder Bub in der Schule wohl kennt. Aber man verachtet diese Unterschiede später, wie die Russische Rechenmaschine (und den zeichnerischen Beweis in der Geometrie) und sieht sie als unwesentlich an, statt als wesentlich und fundamental.

Ts-213 641r[3] Es ist uninteressant, ob *man eine Regel weiß*, nach der man $\int \sin^2 x.dx$ gewiß lösen kann, aber nicht, ob der *Kalkül*, den wir vor uns haben (und den er zufälligerweise benützt) eine solche Regel enthält. Nicht, ob der Schüler es kann, sondern ob der Kalkül es kann und *wie er* es tut, interessiert uns.

Ts-213 641r[4] Im Falle 25 × 16 = 370 nun, schreibt der Kalkül, den wir benützen, jeden Schritt zur Prüfung dieser Gleichung vor.

Ts-213 641r[5] Ein merkwürdiges Wort: “Es ist mir *gelungen*, das zu beweisen”. (Das ist es, was im Falle 25 × 16 = 400 niemand sagen würde.)

Ts-213 641r[6] & 642r[1] Man könnte erklären: “Was man anfassen kann, ist ein Problem. – Nur wo ein Problem sein kann, kann etwas behauptet werden.” Würde denn aus dem Allen nicht das Paradox folgen: daß es in der Mathematik keine schweren Probleme gibt; weil, was schwer ist, kein Problem ist? Was folgt, ist, daß das “schwere mathematische Problem”, d.h. das Problem der mathematischen Forschung, zur Aufgabe “25 × 25 = ?” nicht in dem Verhältnis steht, wie etwa ein akrobatisches Kunststück zu einem einfachen Purzelbaum (also einfach in dem Verhältnis: sehr leicht zu sehr schwer), sondern daß es ‘Probleme’ in verschiedenen Bedeutungen des Wortes sind.

Ts-213 642r[2] “Du sagst ‘wo eine Frage ist, da ist auch ein Weg zu ihrer Beantwortung’, aber in der Mathematik gibt es doch Fragen, zu deren Beantwortung wir keinen Weg sehen”. – Ganz richtig, und daraus folgt nur, daß wir in diesem Fall das Wort ‘Frage’ in anderem Sinn gebrauchen, als im oberen Fall. Und ich hätte vielleicht sagen sollen “es sind hier zwei verschiedene Formen und nur für die erste möchte ich das Wort ‘Frage’ gebrauchen”. Aber dieses Letztere ist nebensächlich. Wichtig ist, daß wir es hier mit zwei verschiedenen Formen zu tun haben. (Und daß Du Dich in der Grammatik des Wortes ‘Art’ nicht auskennst, wenn Du nun sagen willst, es seien eben nur zwei verschiedene *Arten* von Fragen.)

Ts-213 642r[3] “Ich weiß, daß es für diese Aufgabe eine Lösung gibt, obwohl ich die Lösung noch nicht habe”. – In welchem Symbolismus *weiß* ich es?

Ts-213 642r[4] “Ich weiß, daß es da ein Gesetz geben muß”. Ist dieses Wissen ein amorphes, das Aussprechen des Satzes begleitendes Gefühl? Dann interessiert es uns nicht. Und ist es ein symbolischer Prozeß – nun, dann ist die Aufgabe, ihn in einem *klaren* Symbolismus *auszudrücken*.

Ts-213 643r[1] Was heißt es: den Goldbach'schen Satz *glauben*? Worin besteht dieser Glaube? In einem Gefühl der Sicherheit, wenn wir den Satz aussprechen, oder hören? Das interessiert uns nicht. Ich weiß ja auch nicht, wie weit dieses Gefühl durch den Satz selbst hervorgerufen sein mag. Wie greift der Glaube in diesen Satz ein? Sehen wir nach, welche Konsequenzen er hat, wozu er uns bringt. "Er bringt mich zum Suchen nach einem Beweis dieses Satzes". – Gut, jetzt sehen wir noch nach, worin Dein Suchen eigentlich besteht; dann werden wir wissen, wie es sich mit Deinem Glauben an den Satz verhält.

Ts-213 643r[2] Man darf nicht an einem Unterschied der Formen vorbeigehen – wie man wohl an einem Unterschied zwischen Anzügen vorbeigehen kann, wenn er etwa sehr gering ist. In gewissem Sinne gibt es für uns – nämlich in der Grammatik – nicht 'geringe Unterschiede'. Und überhaupt bedeutet ja das Wort Unterschied etwas ganz anderes, als dort wo es sich um einen Unterschied zweier Dinge handelt.

Ts-213 643r[3] Der Philosoph spürt Wechsel im Stil einer Ableitung, an denen der Mathematiker von heute, mit seinem stumpfen Gesicht ruhig vorübergeht. – Eine höhere Sensitivität ist es eigentlich, was den Mathematikern der Zukunft von dem heutigen unterscheiden wird; und *die* wird die Mathematik – gleichsam – stutzen; weil man dann mehr auf die absolute Klarheit, als auf *ein* Erfinden neuer Spiele bedacht sein wird.

Ts-213 643r[4] Die philosophische Klarheit wird auf das Wachstum der Mathematik den gleichen Einfluß haben, wie das Sonnenlicht auf das Wachsen der Kartoffeltriebe. (Im dunklen Keller wachsen sie meterlang.)

Ts-213 644r[1] Den Mathematiker muß es bei meinen mathematischen Ausführungen grausen, denn seine Schulung hat ihn immer davon abgelenkt, sich Gedanken und Zweifeln, wie ich sie aufrolle, hinzugeben. Er hat sie als etwas Verächtliches ansehen lernen und hat, um eine Analogie aus der Psychoanalyse (dieser Absatz erinnert an Freud) zu gebrauchen, einen Ekel vor diesen Dingen erhalten, wie vor etwas Infantilem. D.h., ich rolle alle jene Probleme auf, die etwa ein Knabe beim Lernen der Arithmetik, etc. als Schwierigkeiten empfindet und die der Unterricht unterdrückt, ohne sie zu lösen. Ich sage also zu diesen unterdrückten Zweifeln: ihr habt ganz recht, fragt nur, und verlangt nach Aufklärung!

Ts-213 645r[1] **26** ***Eulerscher Beweis.***

Ts-213 645r[2] Kann man aus der Ungleichung:

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\neq(1+\frac{1}{2}+12^2+12^3+\ldots)\times(1+\frac{1}{3}+13^2+\ldots)$

eine Zahl n ableiten, die jedenfalls in den Kombinationen der rechten Seite noch fehlt? Der Euler'sche Beweis dafür, daß es "unendlich viele Primzahlen gibt" soll ja ein Existenzbeweis sein, und wie ist der ohne Konstruktion möglich?

Ts-213 645r[3] &

non $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = (1 + \frac{1}{2} + 1\ 2^2 + \ldots) \times (1 + \frac{1}{3} + 1\ 3^2 + \ldots)$

646r[1] & 647r[1] das Argument läuft so: Das rechte Produkt ist eine Reihe von Brüchen 1n, in deren Nenner alle Kombinationen 2n3m vorkommen; wären das alle Zahlen, so müßte diese Reihe die gleiche sein, wie die 1 + ½ + ⅓ … und dann müßten auch die Summen gleich sein. Die linke ist aber unendlich und die rechte nur eine endliche Zahl 21×32=3, also fehlen in der rechten Reihe unendlich viele Brüche, d.h. *es gibt* in der rechten Reihe Brüche, die in der linken nicht vorkommen. Und nun handelt es sich darum: ist dieses Argument richtig? Wenn es sich hier um endliche Reihen handelte, so wäre alles *klar*. Denn dann könnte man aus der Methode der Summation eben herausfinden, welche Glieder der linken Reihe auf die rechte Reihe fehlen. Man könnte nun fragen: wie kommt es, daß die rechte Reihe unendlich gibt, was muß sie außer den Gliedern der linken enthalten, daß es so wird? Ja es frägt sich: hat eine Gleichung, wie die obere 1 + ½ + ⅓ + … = 3 überhaupt einen Sinn? Ich kann ja aus ihr nicht herausfinden, *welche* Glieder links zuviel sind. Wie wissen wir, daß alle Glieder der rechten auch in der linken Seite vorkommen? Im Fall endlicher Reihen kann ich es erst sagen, wenn ich mich Glied für Glied davon überzeugt habe;– und dann sehe ich zugleich, welche übrigbleiben. – Es fehlt uns hier die Verbindung zwischen dem Resultat der Summe und den Gliedern, die einzige, die den Beweis *erbringen* könnte. – Am klarsten wird alles, wenn man sich die Sache mit einer endlichen Gleichung ausgeführt denkt:

1 + ½ + ⅓ + ¼ + ⅕ + ⅙ ≠ (1 + ½) × (1 + ⅓) = 1 + ½ + ⅓ + ⅙. Wir haben hier wieder das Merkwürdige, was man etwa einen Indizienbeweis in der Mathematik nennen könnte – der

ewig unerlaubt ist. Oder, einen Beweis durch *Symptome*. Das Ergebnis der Summation ist ein Symptom dessen (oder wird als eines aufgefaßt), daß rechts Glieder sind, die links fehlen. Die Verbindung des Symptoms, mit dem, was man beweisen möchte, ist *lose*. D.h. es ist eine Brücke nicht geschlagen, aber man gibt sich damit zufrieden, daß man das andere Ufer *sieht*. Alle Glieder der rechten Seite kommen in der linken Seite vor, aber die Summe links gibt unendlich und die rechte nur einen endlichen Wert – *also müssen* ... aber in der Mathematik *muß* garnichts, außer was *ist*. Die Brücke muß geschlagen werden. In der Mathematik gibt es kein Symptom, das kann es nur im psychologischen Sinne für den Mathematiker geben. Man könnte auch so sagen: Es kann sich in der Mathematik nicht auf etwas schließen lassen, was sich nicht *sehen* läßt.

Ts-213 647r[2] Das ganze lose Wesen jener Beweisführung beruht wohl auf der Verwechslung der Summe und des Grenzwerts der Summe. Das sieht man klar: *wie weit immer* man die rechte Reihe fortsetzt, immer kann man die linke auch so weit bringen, daß sie alle Glieder der rechten einschließt. (Dabei bleibt noch *offen*, ob die dann auch noch andre Glieder enthält.)

Ts-213 647r[3] Man könnte auch so fragen: Wenn du nur diesen Beweis hättest, was könntest Du nun daraufhin wagen? Wenn wir etwa die Primzahlen bis N gefunden hätten, könnten wir nun daraufhin ins Unendliche auf die Suche nach einer weiteren Primzahl gehen – da uns der Beweis verbürgt, daß wir eine finden werden? Das ist doch Unsinn. – Denn das “wenn wir nur lange genug suchen” heißt garnichts. (Bezieht sich auf Existenzbeweise im Allgemeinen.)

Ts-213 647r[4] & 648r[1] Könnte ich auf diesen Beweis hin weitere Primzahlen links hinzufügen? Gewiß nicht, denn ich weiß ja garnicht, wie ich welche finden kann und das heißt: ich habe ja gar keinen Begriff der Primzahl, der Beweis hat mir keinen gegeben. Ich könnte nur beliebige Zahlen (bezw. Reihen) hinzufügen.

Ts-213 648r[2] (Die Mathematik ist angezogen mit falschen Deutungen.)

Ts-213 648r[3] ("Es *muß* noch eine *Primzahl* kommen" heißt in der Mathematik nichts. Das hängt unmittelbar damit zusammen, daß es "in der Logik nichts Allgemeineres und Spezielleres gibt".)

Ts-213 648r[4] Wenn die Zahlen alle Kombinationen von 2 und 3 wären, so müßte (lim(n=inf)r=nΣr=012r)×(lim(n=inf)r=nΣr=013r) den lim(m = inf) r = mΣr = 1 1n ergeben, – sie ergibt ihn aber nicht … Was folgt daraus? (Satz des ausgeschlossenen Dritten.) Daraus folgt nichts, als daß die Grenzwerte der Summen verschieden sind; also nichts (*Neues*). Nun könnte man aber untersuchen, woran das liegt. Dabei wird man vielleicht auf Zahlen stoßen, die durch 2r×3s nicht darstellbar sind, also auf größere Primzahlen, nie aber wird man sehen, daß *keine* Anzahl solcher ursprünglicher Zahlen zur Darstellung aller Zahlen genügt.

Ts-213 648r[5] & 649r[1]

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots \neq 1+\frac{1}{2}+12^2+12^3+\ldots$ Wieviel Glieder der Form $12r$ ich auch zusammennehmen mag, nie ergibt es mehr als 2, während die ersten vier Glieder der linken Reihe schon mehr als 2 ergeben. (*Hierin* muß also schon der Beweis liegen.) Und hierin liegt er auch und zugleich die Konstruktion einer Zahl, die keine Potenz von 2 ist, denn die Regel heißt nun: finde den Abschnitt der Reihe, der jedenfalls 2 übertrifft, dieser muß eine Zahl enthalten, die keine Potenz von 2 ist. $(1+\frac{1}{2}+12^2\ldots)\times(1+\frac{1}{3}+13^2;\ldots)\ldots(1+1n+1n^2+\ldots)=n$. Wenn ich nun die Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ so weit ausdehne, bis sie n überschreitet, dann muß dieser Teil ein Glied enthalten, das in der rechten Reihe nicht gefunden werden kann, denn enthielte die rechte Reihe alle diese Glieder, dann müßte sie eine größere und keine kleinere Summe ergeben.

Ts-213 649r[2]

Die Bedingung, unter der ein Teil der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, etwa $1n+1(n+1)+1(n+2)+\ldots1(n+r)$, gleich oder größer als 1 wird, ist folgende:

Es soll werden:

$1n+1(n+1)+1(n+2)+\ldots1(n+r)$gleichodergrößer1.

Formen wir die linke Seite um in:

[(1

+ n (n + 1) +

n (n + 2) +

... +

n (n + r))

n] =

= [(1 +

(1 − 1 n + 1) +

(1 − 2 n + 2) + ...

(1 − n − 1 n + (n − 1)) +

n 2n +

n 2n + 1 +

•

n 2n + 2

•

... + n n + r)

n] ⇒ [(n −

1 2 n • (n − 1) • 1 n + 1 + (r − n + 1) n n + r

)

n] =

= 1 − n−12n+2 + r−n+1n+r gleich oder größer 1

Daher: $2nr + 2r - 2n^2 - 2n + 2n + 2 - n^2 - nr + n + r$ = oder größer 0

$nr + 3r - 3n^2 + 2 + n =$ oder größer 0

$r =$ oder größer $3n^2 - (n+2)n + 3$ | kleiner als $3n - 1$.

Ts-213 650r[1]

27 *Dreiteilung des Winkels.*

etc.

Ts-213 650r[2] Man könnte sagen: In der Geometrie der euklidischen Ebene kann man nach der 3-Teilung des Winkels nicht suchen, weil es sie nicht gibt – und nach der 2-Teilung nicht, weil es sie gibt.

Ts-213 650r[3] In der Welt der euklidischen Elemente kann ich ebensowenig nach der 3-Teilung des Winkels fragen, wie ich nach ihr suchen kann. Es ist von ihr einfach nicht die Rede.

Ts-213 650r[4] & 651r[1] (Ich kann der Aufgabe der 3-Teilung des Winkels in einem größern System ihren Platz bestimmen, aber nicht im System der euklidischen Geometrie nach der Möglichkeit der 3-Teilung fragen. In welcher *Sprache* sollte ich denn danach fragen? in der euklidischen? – Und ebensowenig kann ich in der euklidischen Sprache nach der Möglichkeit der 2-Teilung des Winkels im euklidischen System fragen. Denn das würde in dieser Sprache auf eine Frage nach der Möglichkeit schlechthin hinauslaufen, welche immer Unsinn ist.)

Ts-213 651r[2] Wir müssen übrigens hier eine Unterscheidung zwischen gewissen Arten von Fragen machen, eine Unterscheidung, die wieder zeigt, daß, was wir in der Mathematik "Frage" nennen, von dem verschieden ist, was wir im *alltäglichen Leben* so nennen. Wir müssen unterscheiden zwischen einer Frage "wie teilt man den Winkel in 2 gleiche Teile" und der Frage "ist *diese* Konstruktion die Halbierung des Winkels". Die Frage hat nur Sinn in einem Kalkül, der uns eine Methode zu ihrer Lösung gibt; nun kann uns ein Kalkül sehr wohl eine Methode zur Beantwortung der einen Frage geben, aber nicht zur Beantwortung der andern. Euklid z.B. lehrt uns nicht nach der Lösung seiner Probleme suchen, sondern gibt sie uns und beweist, daß es die Lösungen sind. Das ist aber keine psychologische oder pädagogische Angelegenheit, sondern eine mathematische. D.h. der *Kalkül* (den er uns gibt) ermöglicht es uns nicht, nach der Konstruktion zu suchen. Und ein Kalkül, der es ermöglicht, ist eben ein *anderer*. (Vergleiche auch Methoden des Integrierens mit denen des Differenzierens; etc..)

Ts-213 651r[3] Es gibt eben in der Mathematik sehr Verschiedenes, was alles Beweis genannt wird und diese Verschiedenheiten sind *logische*. Was also 'Beweis' genannt wird, hat nicht mehr miteinander zu tun, als was '*Zahl*' genannt wird.

Ts-213 651r[4] & 652r[1]

Welcher Art ist der *Satz* “die 3-Teilung des Winkels mit Zirkel und Lineal ist unmöglich”? Doch wohl von derselben, wie: “in der Reihe der Winkelteilungen F(n) kommt keine F(3) vor, wie in der Reihe der Kombinationszahlen $n(n-1)2$ keine 4”. Aber welcher Art ist *dieser* Satz? Von der des Satzes: “in der Reihe der Kardinalzahlen kommt ½ nicht vor”. Das ist offenbar eine (überflüssige) Spielregel, etwa wie die: im Damespiel kommt keine Figur vor, die “König” genannt wird. Und die Frage, ob eine 3-Teilung möglich ist, ist dann die, ob es eine 3-Teilung im Spiel gibt, ob es eine Figur im Damespiel gibt, die “König” genannt wird, und etwa eine ähnliche Rolle spielt, wie der Schachkönig. Diese Frage wäre natürlich einfach durch eine Bestimmung zu beantworten, aber sie würde kein Problem, keine Rechenaufgabe stellen. Hätte also einen andern Sinn, als eine, deren Antwort lautete: ich werde ausrechnen, ob es so etwas gibt. (Etwa: “ich werde ausrechnen, ob es unter den Zahlen 5, 7, 18, 25, eine gibt, die durch 3 teilbar ist”.) Ist nun die Frage nach der Möglichkeit der 3-Teilung des Winkels von dieser Art? Ja, – wenn man im Kalkül ein allgemeines System hat, um, etwa, die Möglichkeit der n-Teilung zu berechnen. Warum nennt man *diesen* Beweis den Beweis *dieses* Satzes? Der Satz ist ja kein Name, sondern gehört (*als Satz*) einem Sprachsystem an: Wenn ich sagen kann “es gibt keine 3-Teilung”, so hat es Sinn zu sagen “es gibt keine 4-Teilung” etc. etc.. Und ist *dies* ein Beweis des ersten Satzes (ein Teil seiner Syntax), so muß es also entsprechende Beweise (oder Gegenbeweise) für die andern Sätze des Satzsystems geben, denn sonst gehören sie nicht zu demselben System.

Ts-213 Ich kann nicht fragen, ob die 4 unter den Kombinationszahlen
652r[2] & vorkommt, wenn dieses mein Zahlensystem ist. Und nicht, ob
653r[1] ½ unter den Kardinalzahlen vorkommt, oder zeigen, daß es nicht eine von ihnen ist, außer, wenn ich “Kardinalzahlen” einen Teil eines Systems nenne, welches auch ½ enthält. (Ebensowenig kann ich aber auch sagen oder beweisen, daß 3 eine der Kardinalzahlen ist.) Die Frage *heißt* vielmehr etwa so: “Geht die Division 1:2 in ganzen Zahlen aus”, und das läßt sich nur fragen in einem System, worin das Ausgehen und das Nichtausgehen vorkommt. (Die *Ausrechnung* muß Sinn haben.) Bezeichnen wir mit “Kardinalzahlen” nicht einen Teil der rationalen Zahlen, so können wir nicht ausrechnen, ob 81:3 eine Kardinalzahl ist, sondern, ob die Division 81:3 ausgeht oder nicht.

Ts-213 Statt des Problems der 3-Teilung des Winkels mit Lineal und
653r[2] Zirkel können wir nun ein ganz entsprechendes, aber viel übersichtlicheres, untersuchen. Es steht uns ja frei, die Möglichkeiten der Konstruktion mit Lineal und Zirkel weiter einzuschränken. So können wir z.B. die Bedingung setzen, daß sich die Öffnung des Zirkels nicht verändern läßt. Und wir können festsetzen, daß die einzige Konstruktion, die wir kennen – oder besser: die unser Kalkül kennt – diejenige ist, die man zur Halbierung einer Strecke AB benützt, nämlich:

Ts-213 (Wir sprechen von einer “*Teilung des Kreises* in 7 Teile” und von
656r[2] einer Teilung des Kuchens in 7 Teile.)

Ts-213 **28** ***Suchen und Versuchen.***

657r[1] Ts-213 657r[2] Wenn man jemanden, der es noch nicht versucht hat, sagt “versuche die Ohren zu bewegen”, so wird er zuerst etwas in der Nähe der Ohren bewegen, was er schon früher bewegt hat, und dann werden sich entweder auf einmal seine Ohren bewegen oder nicht. Man könnte nun von diesem Vorgang sagen: er versucht die Ohren zu bewegen. Aber wenn das ein Versuch genannt werden kann, so ist es einer in einem ganz anderen Sinn als der, die Ohren (oder die Hände) zu bewegen, wenn wir zwar “wohl wissen, wie es zu machen ist”, aber sie jemand hält, sodaß wir sie schwer oder nicht bewegen können. Der Versuch im ersten Sinne entspricht einem Versuch “ein mathematisches Problem zu lösen”, zu dessen Lösung es eine Methode gibt. Man kann sich immer um das scheinbare Problem bemühen. Wenn man mir sagt “versuche durch den bloßen Willen den Krug dort am anderen Ende des Zimmers zu bewegen” so werde ich ihn anschauen und vielleicht irgendwelche seltsame Bewegungen mit meinen Gesichtsmuskeln machen; also selbst in diesem Falle scheint es einen Versuch zu geben.

Ts-213 658r[1] Denken wir daran, was es heißt, etwas im Gedächtnis zu *suchen*. Hier liegt gewiß *etwas wie* ein Suchen im eigentlichen Sinn vor.

Ts-213 658r[2] Versuchen, eine Erscheinung hervorzurufen, aber heißt nicht, sie *suchen*. Angenommen, ich taste meine Hand nach einer schmerzhaften Stelle ab, so suche ich wohl im Tastraum, aber nicht im Schmerzraum. D.h. was ich eventuell finde, ist eigentlich eine Stelle und nicht der Schmerz. D.h., wenn die Erfahrung auch ergeben hat, daß drücken einen Schmerz hervorruft, so ist doch das Drücken kein Suchen nach einem Schmerz. So wenig, wie das Drehen einer Elektrisiermaschine das Suchen nach einem Funken ist.

Ts-213 658r[3] Kann man versuchen, zu einer Melodie den falschen Takt zu schlagen? Oder: Wie verhält sich dieses Versuchen zu dem, ein Gewicht zu heben, das uns zu schwer ist?

Ts-213 658r[4] Es ist nicht nur höchst bedeutsam, daß man die Gruppe !!!!!||||| ||||| auf vielerlei Arten sehen kann (in vielerlei Gruppierungen), sondern (noch) viel mehr *bemerkenswerter*, daß man es willkürlich tun kann. D.h., daß es einen ganz bestimmten Vorgang gibt, eine bestimmte "Auffassung" auf Befehl zu *bekommen*; und daß es – dem entsprechend – auch einen ganz bestimmten Vorgang des vergeblichen Versuchens gibt. So kann man auf Befehl die Figur so sehen, daß der eine oder der andere Vertikalstrich die Nase, dieser oder jener Strich der Mund wird, und kann unter Umständen das eine oder das andere vergeblich versuchen.

Ts-213 659r[1] Das Wesentliche ist hier, daß dieser Versuch den Charakter desjenigen hat, ein Gewicht mit der Hand zu heben; nicht den Charakter des Versuchs, in welchem man Verschiedenes tut, verschiedene Mittel ausprobiert, um (z.B.) ein Gewicht zu heben. In den zwei Fällen hat das Wort "Versuch" ganz verschiedene Bedeutungen. (Eine außerordentlich folgenreiche grammatische Tatsache.)

Ts-213 660r[1] 29 ****_Induktionsbeweis_**.**

****_Periodizität_**.**

Ts-213 661r[1] *Inwiefern beweist der Induktionsbeweis einen **Satz**?*

Ts-213 661r[2] Ist der Induktionsbeweis ein Beweis von $a + (b + c) = (a + b) + c$, so muß man sagen können: die *Rechnung liefert*, daß $a + (b + c) = (a + b) + c$ ist (*und kein anderes Resultat*). Denn dann muß erst die Methode der Berechnung (allgemein) bekannt sein und, wie wir *darauf* 25×16 ausrechnen können, so auch $a + (b + c)$. Es wird *also erst* eine allgemeine Regel zur Ausrechnung aller solcher Aufgaben gelehrt und danach die besondere gerechnet. – Welches ist aber hier die allgemeine Methode der Ausrechnung? Sie muß auf allgemeinen Zeichenregeln beruhen (– etwa, wie dem assoziativen Gesetz –).

Ts-213 661r[3] & 662r[1] Wenn ich $a + (b + c) = (a + b) + c$ negiere, so hat das nur Sinn, wenn ich etwa sagen will: es ist nicht $a + (b + c) = (a + b) + c$, sondern $= (a + 2b) + c$. Denn es fragt sich: was ist der Raum, in welchem ich den Satz negiere? wenn ich ihn abgrenze, ausschließe, – wovon? Die Kontrolle von $25 \times 25 = 625$ ist die Ausrechnung von 25×25, die Berechnung der rechten Seite; – kann ich nun $a + (b + c) = (a + b) + c$ errechnen, das, Resultat $(a + b) + c$ ausrechnen? Je nachdem man es als berechenbar oder unberechenbar betrachtet, ist es beweisbar oder nicht. Denn ist der Satz eine Regel, der jede Ausrechnung folgen muß, ein Paradigma, dann hat es keinen Sinn, von einer Ausrechnung der Gleichung zu reden; sowenig, wie von der einer Definition.

Ts-213 662r[2] Das, was die Ausrechnung möglich macht, ist das System, dem der Satz angehört und das auch die Rechenfehler bestimmt, die sich bei der Ausrechnung machen lassen. Z.B. ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und nicht $= a^2 + ab + b^2$; aber $(a + b)^2 = -4$ ist kein möglicher Rechenfehler in diesem System.

Ts-213 662r[3] Ich könnte ja auch ganz beiläufig (siehe andere Bemerkungen) sagen: “25 × 64 = 160, 64 × 25 = 160 das beweist, daß a × b = b × a ist” (und diese Redeweise ist nicht vielleicht lächerlich und falsch; sondern man muß sie nur recht deuten). Und man kann richtig daraus schließen; also läßt sich “a.b = b.a” in *einem* Sinne berechnen. Und ich will sagen: *Nur* in dem Sinne, in welchem die Ausrechnung so eines Beispiels Beweis des algebraischen Satzes genannt werden kann, ist der Induktionsbeweis ein Beweis dieses Satzes. Nur insofern kontrolliert er den algebraischen Satz. (Er kontrolliert *seine Struktur*, nicht seine Allgemeinheit.)

Ts-213 662r[4] (Die Philosophie prüft nicht die Kalküle der Mathematik, sondern nur, was die Mathematiker über diese Kalküle sagen.)

Ts-213 663r[1] **30** *Der rekursive Beweis und der Begriff des Satzes. Hat der Beweis einen Satz als wahr erwiesen und einen andern als falsch?*

Ts-213 663r[2] Hat der rekursive Beweis von a + (b + c) = (a + b) + c ...A) eine Frage beantwortet? und welche? Hat er eine Behauptung als wahr erwiesen und also ihr Gegenteil als falsch?

Ts-213 664r[1] & 665r[1] Das, was Skolem den rekursiven Beweis von A nennt, kann man so schreiben:

a + (b + 1) = (a + b) + 1

a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1B

(a + b) + (c + 1) = ((a + b) + c) + 1

In diesem Beweis kommt offenbar der bewiesene Satz gar nicht vor. – Man müßte nur eine allgemeine Bestimmung machen, die den Übergang zu ihm erlaubt. Diese Bestimmung könnte man so ausdrücken:

$$u f(1) = g(1) D$$

$$v f(c + 1) = F(f(c)) \; f(c) = g(c)$$

$$w g(c + 1) = F(g(c))$$

Wenn 3 Gleichungen von der Form u, v, w bewiesen sind, so sagen wir, es sei “die Gleichung D für alle Kardinalzahlen bewiesen”. Das ist eine Erklärung dieser Ausdrucksform durch die erste. Sie zeigt, daß wir das Wort “beweisen” im zweiten Fall anders gebrauchen als im ersten. Es ist jedenfalls irreführend zu sagen, wir hätten die Gleichung D oder A bewiesen, und vielleicht besser zu sagen, wir hätten ihre Allgemeingültigkeit bewiesen, obwohl das wieder in anderer Hinsicht irreführend ist. Hat nun der Beweis B eine Frage beantwortet, eine Behauptung als wahr erwiesen? Ja, welches ist denn der Beweis B: Ist es die Gruppe der 3 Gleichungen von der Form u, v, w, oder die *Klasse* der Beweise dieser Gleichungen? Diese Gleichungen *behaupten* ja etwas (und beweisen nichts in dem Sinne, in dem *sie* bewiesen werden). Die Beweise von u, v, w aber beantworten die Frage, ob diese 3 Gleichungen stimmen, und erweisen die Behauptung als wahr, daß sie stimmen. Ich kann nun erklären: die Frage, ob A für alle Kardinalzahlen gilt, solle bedeuten: “gelten für die Funktionen

$$f(x) = a + (b + x), g(x) = (a + b) + x$$

Gleichungen u, v und w?” Und dann ist diese Frage durch den rekursiven Beweis von A beantwortet, wenn *hierunter* die Beweise von u, v, w verstanden werden (bezw. die Festsetzung von u und die Beweise von v und w mittels u). Ich kann also sagen, daß der rekursive Beweis ausrechnet, daß die Gleichung A einer gewissen Bedingung genügt; aber es ist nicht eine Bedingung der Art, wie sie etwa die Gleichung $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erfüllen muß, um “richtig” genannt zu werden. Nenne ich A “richtig”, weil sich Gleichungen von der Form u, v, w dafür beweisen lassen, so verwende ich jetzt das Wort “richtig” anders, als im Falle der Gleichungen u, v, w, oder $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ts-213 665r[2] & 666r[1] Was heißt “1:3=0˙3˙”? heißt es dasselbe wie “1_:3=0,31_”? – Oder ist diese Division der Beweis des ersten Satzes? D.h.: steht sie zu ihm im Verhältnis der Ausrechnung zum Bewiesenen? “1:3=0˙3˙” ist nicht von der Art, wie

“1 : 2 = 0,5”; vielmehr entspricht

“10:2=0,5” dem “1 : 3 = 0,31” (aber nicht dem “1_:3=0,31_”.)

Ich will einmal statt der Schreibweise “1 : 4 = 0,25” die gebrauchen:

“1-0 : 4 = 0,25” also z.B. “3–0 : 8 = 0,375”

dann kann ich sagen, diesem Satz entspricht nicht der: 1:3=0˙3˙, sondern z.B. der: “1–1 : 3 = 0˙333”. 0˙3˙ ist nicht in dem Sinne Resultat (Quotient) der Division, wie 0,375. Denn die Zahl 0,375 war uns vor der Division 3:8 bekannt; was aber bedeutet “0˙3˙” losgelöst von der periodischen Division? – Die

Behauptung, daß die Division a:b als Quotienten $0.\dot{c}$ ergibt, ist dieselbe wie die: die erste Stelle des Quotienten sei c und der erste Rest gleich dem Dividenden. Nun steht B zur Behauptung, A gelte für alle Kardinalzahlen, im selben Verhältnis, wie 1_:3=0,31_ zu $1:3=0.\dot{3}$.

Ts-213 666r[2] Der Gegensatz zu der Behauptung “A gilt für alle Kardinalzahlen” ist nun: eine der Gleichungen u, v, w sei falsch. Und die entsprechende Frage sucht keine Entscheidung zwischen einem (x).fx und einem (∃x).non-fx.

Ts-213 666r[3] Die Konstruktion der Induktion ist nicht *ein* Beweis, sondern eine bestimmte Zusammenstellung (ein Muster im Sinne von Ornament) von Beweisen. Man kann ja auch nicht sagen: ich beweise eine Gleichung, wenn ich drei beweise. Wie die Sätze einer Suite nicht *einen* Satz ergeben.

Ts-213 666r[4] Man kann auch so sagen: Sofern man die Regel, in irgendeinem Spiel Dezimalbrüche zu bilden, die nur aus der Ziffer 3 bestehen, sofern man *diese Regel* als eine Art Zahl auffaßt, kann eine Division sie nicht zum Resultat haben, sondern nur *das*, was man periodische Division nennen kann und was die Form aa:b=c hat.

Ts-213 667r[1] **31** *Induktion, (x).Fx und (∃x).Fx. Inwiefern erweist die Induktion den allgemeinen Satz als wahr und einen Existentialsatz als falsch?*

Ts-213 667r[2] & 668r[1]

$$3 \times 2 = 5 + 1$$

$$3 \times (a + 1) = 3 + (3 \times a) = (5 + b) + 3 = 5 + (b + 3)$$

Warum nennst Du denn diese Induktion den Beweis dafür, daß (n): $n \geqq 2 \,.\supset.\; .\supset.\; 3 \times n \neq 5$?! – Nun, siehst Du denn nicht, daß der Satz, wenn er für $n = 2$ gilt, auch für $n = 3$ gilt, und dann auch für $n = 4$, und daß es immer so weiter geht? (Was erkläre ich denn, wenn ich das Funktionieren des induktiven Beweises erkläre?) Du nennst ihn also einen Beweis für "f(2) & f(3) & f(4) & u.s.w.", ist er aber nicht vielmehr die Form der Beweise für "f(2)" und "f(3)" und "f(4)" u.s.w.? Oder kommt das auf *eins* hinaus? Nun, wenn ich die Induktion den Beweis *eines* Satzes nenne, dann darf ich es nur, wenn das nichts anderes heißen soll, als daß sie jeden Satz einer gewissen Form beweist. (Und mein Ausdruck bedient sich der Analogie vom Verhältnis der Sätze "alle Säuren färben Lackmuspapier rot", "Schwefelsäure färbt Lackmuspapier rot".) Denken wir nun, jemand sagte "prüfen wir nach, ob f(n) für alle n gilt" und nun fängt er an, die Reihe zu schreiben:

$3 \times 2 = 5 + 1$

$3 \times (2 + 1) = (3 \times 2) + 3 = (5 + 1) + 3 = 5 + (1 + 3)$ $3 \times (2 + 2) = (3 \times (2 + 1)) + 3 = (5 + (1 + 3)) + 3 = 5 + (1 + 3 + 3)$ und nun bricht er ab und sagt: "ich sehe schon, daß es für alle n gilt". – So hat er also eine *Induktion* gesehen! Aber hatte er denn nach einer Induktion *gesucht*? Er hatte ja gar keine Methode, um nach ihr zu suchen. Und hätte er nun keine entdeckt, hätte er damit eine Zahl gefunden, die der Bedingung nicht entspricht? – *Die Regel* der Kontrolle kann ja nicht lauten: sehen wir nach, ob sich eine Induktion findet, oder ein Fall, für den das Gesetz nicht gilt. – Wenn das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten nicht gilt, so heißt das nur, daß unser Ausdruck nicht mit einem Satz zu vergleichen ist. Wenn wir sagen, die Induktion beweise den allgemeinen Satz, so denken wir: sie beweist, daß dieser Satz und nicht sein Gegenteil wahr ist. Welches wäre aber das Gegenteil des Bewiesenen? Nun, daß $(\exists n)$ nonfn der Fall ist. Damit verbinden wir zwei Begriffe: den einen, den ich aus meinem gegenwärtigen Begriff des Beweises von $(n).fn$ herleite, und einen andern, der von der Analogie mit $(\exists x).fx$ hergenommen ist. (Wir müssen ja bedenken, daß "$(n).fn$" kein Satz ist, solange ich kein Kriterium seiner Wahrheit habe; und dann nur den Sinn hat, den ihm dieses Kriterium gibt. Ich konnte freilich, schon ehe ich das Kriterium *hatte*, etwa nach einer Analogie zu $(x).fx$ ausschauen.) Was ist nun das Gegenteil von dem, was die Induktion beweist? Der Beweis von $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ rechnet diese Gleichung aus im Gegensatz etwa zu $(a + b)^2 = a^2 + 3ab + b^2$. Was rechnet der Induktionsbeweis aus?

Ts-213 668r[2] & 669r[1]

Die Gleichungen: $3 + 2 = 5 + 1$, $3 \times (a + 1) = (3 \times a) + 3$, $(5 + b) + 3 = 5 + (b + 3)$ im Gegensatz also etwa zu $3 + 2 = 5 + 6$, $3 \times (a + 1) = (4 \times a) + 2$, etc.. Aber dieses Gegenteil entspricht ja nicht dem Satz $(\exists x) . fx$. – Ferner ist nun mit jener Induktion im Gegensatz jeder Satz von der Form non- f(n), nämlich der Satz "non-f(2)", "non-f(3)", u.s.w.; d.h. die Induktion ist *das Gemeinsame* in der Ausrechnung von f(2), f(3), u.s.w.; aber sie ist nicht die Ausrechnung "aller Sätze der Form f(n)", da ja nicht eine Klasse von Sätzen in dem Beweis vorkommt, die ich "alle Sätze der Form f(n)" nenne. Jede einzelne nun von diesen Ausrechnungen ist die Kontrolle eines Satzes von der Form f(n). Ich konnte nach der Richtigkeit dieses Satzes fragen und eine Methode zu ihrer Kontrolle anwenden, die durch die Induktion nur auf eine einfache Form gebracht war. Nenne ich aber die Induktion "den Beweis eines allgemeinen Satzes", so kann ich nach der Richtigkeit dieses Satzes nicht fragen (sowenig, wie nach der Richtigkeit der Form der Kardinalzahlen). Denn, was ich Induktionsbeweis nenne, gibt mir keine Methode zur *Prüfung*, ob der allgemeine Satz richtig oder falsch ist; diese Methode müßte mich vielmehr lehren, auszurechnen (zu prüfen), ob sich für einen bestimmten Fall eines Systems von Sätzen eine Induktion bilden läßt, oder nicht. (Was so geprüft wird, ist, ob alle n die oder jene Eigenschaft haben, wenn ich so sagen darf; aber nicht, ob alle sie haben, oder ob es einige gibt, die sie nicht haben. Wir rechnen z.B. aus, daß die Gleichung $x^2 + 3x + 1 = 0$ keine rationalen Lösungen hat (daß es keine rationale Zahl gibt, die ...) und nicht die Gleichung $x^2 + 2x + \frac{1}{2}$ –, dagegen die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 0$, etc..)

Ts-213 669r[2] & 670r[1] Daher wir es seltsam empfinden, wenn uns gesagt wird, die Induktion beweise den allgemeinen Satz; da wir das richtige Gefühl haben, daß wir ja in der Sprache der Induktion die allgemeine Frage gar nicht hätten stellen können. Da uns ja nicht zuerst eine Alternative gestellt war (sondern nur zu sein schien, solange uns ein Kalkül mit endlichen Klassen vorschwebte). Die Frage nach der Allgemeinheit hätte vor dem Beweis noch gar keinen Sinn, also ist sie auch keine Frage, denn die Frage hätte nur Sinn gehabt, wenn eine allgemeine Methode zur Entscheidung bekannt war, *ehe* der besondere Beweis bekannt war. Denn der Induktionsbeweis entscheidet nichts.

Ts-213 670r[2] Wenn gesagt wird: "der Satz '(n).fn' folgt aus der Induktion" heiße nur: jeder Satz der Form f(n) folge aus der Induktion; – "der Satz '(∃n). non-f(n)' widerspreche der Induktion" heiße nur: jeder Satz der Form non-f(n) werde durch die Induktion widerlegt, – so kann man sich damit zufrieden geben, aber wenn wir jetzt fragen: Wie gebrauchen wir den Ausdruck "der Satz (n).f(n)" richtig? Was ist seine Grammatik. (Denn daraus, daß ich ihn in gewissen Verbindungen gebrauche, folgt nicht, daß ich ihn überall dem Ausdruck "der Satz (x).fx" analog gebrauche.)

Ts-213 670r[3] & 671r[1]

Denken wir, es stritten sich Leute darüber, ob in der Division 1:3 lauter Dreier im Quotienten herauskommen müßten; sie hätten aber keine Methode, wie dies zu entscheiden sei. Nun bemerkt Einer von ihnen die induktive Eigenschaft von 1,0 : 3 = 0,31 und sagt: jetzt weiß ich's, es müssen lauter 3 im Quotienten stehen. Die Andern hatten an *diese* Art der Entscheidung nicht gedacht. Ich nehme an, es habe ihnen unklar etwas von einer Entscheidung durch stufenweise Kontrolle vorgeschwebt, und daß sie diese Entscheidung freilich nicht herbeiführen könnten. Halten sie nun an ihrer extensiven Auffassung fest, so ist allerdings durch die Induktion eine Entscheidung herbeigeführt, denn die Induktion zeigt für jede Extension des Quotienten, daß sie aus lauter 3 besteht. Lassen sie aber die extensive Auffassung fallen, so entscheidet die Induktion nichts. Oder nur das, was die Ausrechnung von 1,0 : 3 = 0,31 entscheidet: nämlich, daß ein Rest bleibt, der gleich dem Dividenden ist. Aber mehr nicht. Und nun kann es allerdings eine richtige Frage geben, nämlich: ist der Rest, der bei dieser Division bleibt, gleich dem Dividenden? und diese Frage ist jetzt an die Stelle der alten extensiven getreten und ich kann natürlich den alten Wortlaut beibehalten, aber er ist jetzt außerordentlich irreleitend, denn sie läßt es immer so erscheinen, als wäre die Erkenntnis der Induktion nur ein Vehikel, das uns in die Unendlichkeit tragen kann. (Das hängt auch damit zusammen, daß das Zeichen "u.s.w." sich auf eine interne Eigenschaft des Reihenstückes, das ihm vorhergeht, bezieht und nicht auf seine Extension.) Die Frage "gibt es eine rationale Zahl, die die Wurzel von

$x^2 + 3x + 1 = 0$ ist" ist freilich durch eine Induktion entschieden, – aber hier habe ich eben eine Methode *konstruiert*, um Induktionen zu *bilden*; und die Frage hat ihren Wortlaut nur, weil es sich um eine Konstruktion von Induktionen handelt. D.h. die Frage wird durch eine Induktion entschieden, wenn ich nach dieser Induktion fragen konnte. Wenn mir also ihr Zeichen von vornherein auf ja und nein bestimmt war, so daß ich rechnerisch zwischen ihnen entscheiden konnte, wie z.B., ob der Rest in 5 : 7 gleich oder ungleich dem Dividenden sein wird. (Die Verwendung der Ausdrücke "alle ..." und "es gibt ..." für diese Fälle hat eine gewisse Ähnlichkeit mit der Verwendung des Wortes "unendlich" im Satz "heute habe ich ein Lineal mit unendlichem Krümmungsradius gekauft".)

Ts-213 671r[2] & 672r[1]

1_:3=0,31_ entscheidet durch ihre Periodizität nichts, was früher offen gelassen war. Wenn vor der Entdeckung der Periodizität Einer vergebens nach einer 4 in der Entwicklung von 1:3 gesucht hätte, so hätte er doch die Frage “gibt es eine 4 in der Entwicklung von 1:3” nicht sinnvoll stellen können, d.h., *abgesehen davon*, daß er tatsächlich zu keiner 4 gekommen war, können wir ihn davon überzeugen, daß er keine Methode besitzt, seine Frage zu entscheiden. Oder wir könnten auch sagen: abgesehen von dem Resultat seiner Tätigkeit könnten wir ihn über die Grammatik seiner Frage und die Natur seines Suchens aufklären (wie einen heutigen Mathematiker über analoge Probleme). “Aber als Folge der Entdeckung der Periodizität hört er nun doch gewiß auf, nach einer 4 zu suchen! Sie überzeugt ihn also, daß er nie eine finden wird”. – Nein. Die Entdeckung der Periodizität bringt ihn vom Suchen ab, *wenn* er sich nun neu einstellt. Man könnte ihn fragen: “Wie ist es nun, willst Du noch immer nach einer 4 suchen?” (Oder hat Dich, sozusagen, die Periodizität auf andere Gedanken gebracht.) Und die Entdeckung der Periodizität ist in Wirklichkeit die Konstruktion eines neuen Zeichens und Kalküls. Denn es ist irreführend ausgedrückt, wenn wir sagen, sie bestehe darin, daß es uns *aufgefallen* sei, daß der erste Rest gleich dem Dividenden ist. Denn hätte man Einen, der die periodische Division nicht kannte, gefragt, ist in dieser Division der erste Rest gleich dem Dividenden, so hätte er natürlich “ja” gesagt; es wäre ihm also aufgefallen. Aber damit hätte ihm nicht die Periodizität auffallen brauchen; d.h.: er hätte damit nicht den Kalkül mit den Zeichen aa:b=c gefunden. Ist nicht, was ich hier sage, immer dasselbe, was Kant damit meinte, daß 5 + 7 = 12 nicht analytisch, sondern synthetisch a priori sei?

Ts-213 673r[1] 32 *Wird aus der Anschreibung des Rekursionsbeweises **noch ein weiterer Schluß** auf die Allgemeinheit gezogen, sagt das Rekursionsschema nicht schon alles was zu sagen war?*

Ts-213 673r[2] Man sagt *für gewöhnlich*, die rekursiven Beweise *beweisen*, daß die algebraischen Gleichungen für alle Kardinalzahlen gelten; aber es kommt hier *momentan* nicht darauf an, ob dieser Ausdruck glücklich oder schlecht gewählt ist, sondern nur darauf, ob er in allen Fällen die gleiche Bedeutung hat.

Ts-213 673r[3] Und ist es da nicht klar, daß die rekursiven Beweise tatsächlich *dasselbe* für alle "bewiesenen" Gleichungen zeigen?

Ts-213 673r[4] Und das heißt doch, daß zwischen dem rekursiven Beweis und dem von ihm bewiesenen Satz immer die gleiche (interne) Beziehung besteht?

Ts-213 673r[5] & 674r[1] Es ist ja übrigens ganz klar, daß es so einen rekursiven, oder richtiger, iterativen "Beweis" geben muß. (Der uns die Einsicht vermittelt, daß es "mit allen Zahlen so gehen muß".) D.h. es scheint *mir* klar, und daß ich einem Anderen die Richtigkeit dieser Sätze für die Kardinalzahlen durch einen Prozeß der Iteration begreiflich machen könnte.

Ts-213 674r[2] Wie aber weiß ich 28 + (45 + 17) = (28 + 45) + 17 ohne es bewiesen zu haben? Wie kann mir ein allgemeiner Beweis einen besonderen Beweis schenken? Denn ich könnte doch den besondern Beweis führen, und wie treffen sich da die beiden Beweise, und wie, wenn sie nicht übereinstimmen?

Ts-213 674r[3] D.h.: Ich möchte Einem zeigen, daß das distributive Gesetz wirklich im Wesen der Anzahl liegt und nicht etwa nur in diesem bestimmten Fall zufällig gilt; werde ich da nicht durch einen Prozeß der Iteration zu zeigen versuchen, daß das Gesetz gilt und immer weiter gelten muß? Ja, – daraus ersehen wir, was wir hier darunter verstehen, daß ein Gesetz für alle Zahlen gelten muß.

Ts-213 674r[4] Und inwiefern kann man *diesen* Vorgang nicht den Beweis des (*distributiven*) Gesetzes nennen?

Ts-213 674r[5] Und dieser Begriff des 'Begreiflich-Machens' kann uns hier wirklich helfen. Denn man könnte sagen: das Kriterium dafür, ob etwas ein Beweis eines Satzes ist, ist, ob man ihn dadurch begreiflich machen kann. (Natürlich handelt es sich da wieder nur um eine Erweiterung unserer grammatischen Betrachtungen über das Wort "Beweis"; nicht um ein psychologisches Interesse an dem Vorgang des Begreiflich-Machens.)

Ts-213 675r[1] "Dieser Satz ist für alle Zahlen durch das rekursive Verfahren bewiesen". Das ist der Ausdruck, der so ganz irreführend ist. Es klingt so, als würde hier ein Satz, der konstatiert, daß das und das für alle Kardinalzahlen gilt, auf einem Wege als wahr erwiesen, und *als sei* dieser Weg ein Weg in einem Raum denkbarer Wege. Während die Rekursion in *Wahrheit* nur sich selber zeigt, wie auch die Periodizität.

Ts-213 675r[2] Wir sagen nicht, daß der Satz f(x), wenn f(1) gilt und aus f(c) f(c + 1) folgt, *darum* für alle Kardinalzahlen wahr ist; sondern: "der Satz f(x) gilt für alle Kardinalzahlen" *heißt* "er gilt für x = 1 und f(c + 1) folgt aus f(c)". Und hier ist ja der Zusammenhang mit der Allgemeinheit in endlichen Bereichen ganz klar, denn eben das wäre in einem endlichen Bereich allerdings der Beweis dafür, daß f(x) für alle Werte von x gilt und *eben das* ist der Grund, warum wir auch im arithmetischen Falle sagen, f(x) gelte für alle Zahlen.

Ts-213 675r[3] & 676r[1] Zum mindesten muß ich sagen, daß, welcher Einwand gegen den Beweis B gilt, auch z.B. gegen den der Formel $(a+b)n=$etc. gilt. Auch hier, müßte ich dann sagen, nehme ich nur eine algebraische Regel in Übereinstimmung mit den Induktionen der Arithmetik an.

$f(n) \times (a + b) = f(n + 1)$ $f(1) = a + b$ also: $f(1) \times (a + b) = (a + b)^2 = f(2)$ also: $f(2) \times (a + b) = (a + b)^3 = f(3)$ u.s.w. Soweit ist es klar. Aber nun: "*also* $(a+b)n=f(n)$"! Ist denn hier ein weiterer Schluß gezogen? Ist denn hier noch etwas zu konstatieren?

Ts-213 676r[2] Ich würde aber doch fragen, wenn mir Einer die Formel $(a+b)n=f(n)$ zeigt: wie ist man denn dazugekommen? Und als Antwort käme doch die Gruppe $f(n) \times (a + b) = f(n + 1)$ $f(1) = a + b$. Ist sie also nicht ein Beweis des algebraischen Satzes? – Oder antwortet sie nicht eher auf die Frage "was bedeutet der algebraische Satz"?

Ts-213 676r[3] Ich will sagen: hier ist doch mit der Induktion alles erledigt.

Ts-213 676r[4] Der Satz, daß A für alle Kardinalzahlen gilt, ist eigentlich der Komplex B. Und sein Beweis, der Beweis von v und w. Aber das zeigt auch, daß dieser Satz in einem andern Sinne Satz ist, als eine Gleichung, und sein Beweis in anderm Sinne Beweis eines Satzes. Vergiß hier nicht, daß wir nicht erst den Begriff des Satzes haben, dann wissen, daß die Gleichungen mathematische Sätze sind, und dann erkennen, daß es noch andere Arten von mathematischen Sätzen gibt!

Ts-211 92[2] **33** Eine Untersuchung Schritt für Schritt dieser Beweise wäre sehr lehrreich. Der erste Übergang in I a + (b + (c + 1)) = a + ((b + c) + 1) wenn er nach R vorsichgehen soll, zeigt, daß die Variablen in R anders gemeint sind, als die in den Gleichungen von I, denn sonst erlaubte R nur a + (b + 1) durch (a + b) + 1 zu ersetzen, aber nicht b + (c + 1) durch (b + c) + 1. Dasselbe zeigen auch die anderen Übergänge dieses Beweises. Wenn ich nun sagte, die beiden Zeilen des Beweises berechtigen mich die Regel a + (b + c) = (a + b) + c zu folgern, so hieße das gar nichts, es sei denn, ich hätte nach einer vorher aufgestellten Regel so geschlossen. Diese Regel aber könnte wohl nur sein:

F 1 (1) = F 2 (1) , | | F 1 (x + 1) = f(F 1 (x)) F 2 (x + 1) = f(F 2 (x)) | | } F 1 (x) = F 2 (x) ... (r) |

Aber diese Regel ist vague in bezug auf F1, F2 und f.

Ts-213 677r[1] *Inwiefern verdient der Rekursionsbeweis den Namen eines ‘Beweises’. Inwiefern ist der Übergang nach dem Paradigma A durch den Beweis von B gerechtfertigt?*

Ts-213 677r[2] Man kann nicht eine Rechnung als den Beweis eines Satzes bestimmen.

Ts-213 677r[3] Ich möchte sagen: *Muß* man diese Rechnung den Beweis des Satzes I nennen? D.h., tut's keine andere Beziehung?

Ts-213 677r[4] (Die unendliche Schwierigkeit ist die "allseitige Betrachtung" des Kalküls.)

Ts-213 678r[1] "Der Übergang ist gerechtfertigt" heißt in einem Falle, daß er nach bestimmten gegebenen Formen vollzogen werden kann. Im andern Fall wäre die Rechtfertigung, daß der Übergang nach Paradigmen geschieht, die selbst eine bestimmte Bedingung befriedigen.

Ts-213 678r[2] Man denke sich, daß für ein Brettspiel solche Regeln gegeben würden, die aus lauter Wörtern ohne "r" bestünden, und daß ich eine Regel gerechtfertigt nenne, wenn sie kein "r" enthält. Wenn nun jemand sagte, er habe für das und das Spiel nur *eine* Regel aufgestellt, nämlich, daß die Züge Regeln entsprechen müßten, die kein "r" enthalten. – Ist denn das eine Spielregel (im ersten Sinn)? Geht das Spiel nicht doch nach den Regeln vor sich, die nur alle jener ersten Regel entsprechen sollen?

Ts-213 678r[3] Es macht mir jemand die Konstruktion von B vor und sagt nun, A ist bewiesen. Ich frage: "Wieso? – ich sehe nur, daß Du um A eine Konstruktion mit Hilfe von ρ gemacht hast". Nun sagt er: "Ja, aber wenn das möglich ist, so sage ich eben, A sei bewiesen". Darauf antworte ich: "Damit hast Du mir nur gezeigt, welchen neuen Sinn Du mit dem Wort 'beweisen' verbindest".

Ts-213 678r[4] In einem Sinne heißt es, daß Du das Paradigma mittels α so und so konstruiert hast, in dem andern, nach wie vor, daß eine Gleichung dem Paradigma entspricht.

Ts-213 678r[5] & 679r[1] Wenn wir fragen, “ist das ein Beweis oder nicht?”, so bewegen wir uns in den Formen der Wortsprache. Nun ist natürlich nichts dagegen einzuwenden, wenn Einer sagt: Wenn die Glieder des Übergangs in einer Konstruktion der und der Art stehen, so sage ich, die Rechtmäßigkeit des Übergangs ist bewiesen.

Ts-213 679r[2] Was wehrt sich in mir gegen die Auffassung von B als einem Beweis von A? Zuerst entdecke ich, daß ich den Satz von “allen Kardinalzahlen” in meiner Rechnung nirgends brauche. Ich habe den Komplex B mit Hilfe von r konstruiert und bin dann auf die Gleichung A übergegangen; von “allen Kardinalzahlen” war dabei keine Rede. (Dieser Satz ist eine Begleitung der Rechnung in der Wortsprache, die mich *hier* nur verwirren kann.) Aber nicht nur fällt dieser allgemeine Satz überhaupt fort, sondern kein anderer tritt an seine Stelle.

Ts-213 679r[3] Der Satz, der die Allgemeinheit behauptet, fällt also weg, “es ist nichts *bewiesen*”, “es *folgt* nichts”. “Ja, aber die Gleichung A folgt, sie steht nun an Stelle des allgemeinen Satzes”. – Ja in wiefern folgt sie denn? Offenbar verwende ich hier “folgt” in einem ganz andern Sinn, als dem normalen, da das, woraus A folgt, kein Satz ist. Das ist es auch, warum wir fühlen, daß das Wort “folgen” nicht richtig angewandt ist.

Ts-213 679r[4] Wenn man sagt “aus dem Komplex B folgt, daß $a + (b + c) = (a + b) + c$”, so schwindelt Einem. Man fühlt, daß man da auf irgend eine Weise einen Unsinn geredet hat, obwohl es äußerlich richtig klingt.

Ts-213 679r[5] Daß eine Gleichung folgt, heißt eben schon etwas (hat seine bestimmte Grammatik).

Ts-213 680r[1] Aber wenn ich höre “aus B folgt A”, so möchte ich fragen: “*was* folgt?” Daß $a + (b + c)$ gleich $(a + b) + c$ ist, ist ja eine Festsetzung, wenn es nicht auf *normale* Weise aus einer Gleichung folgt.

Ts-213 680r[2] Wir können unsern Begriff des Folgens mit A und B nicht zur Deckung bringen.

Ts-213 680r[3] “Ich werde Dir beweisen, daß $a + (b + n) = (a + b) + n$”. Niemand erwartet sich nun den Komplex B zu sehen. Man erwartet eine andere Regel über das a, b und n zu hören, die den Übergang von der einen auf die andere Seite vermittelt. Wenn mir statt dessen B und das Schema *R* gegeben wird, so kann ich das keinen Beweis nennen, eben weil ich unter Beweis etwas anderes verstehe. Ja ich werde dann etwa sagen: “Ach so, das nennst Du ‘Beweis’, ich habe mir vorgestellt ...”.

Ts-213 680r[4] Der Beweis von $17 + (18 + 5) = (17 + 18) + 5$ wird allerdings nach dem Schema B geführt und dieser Zahlensatz ist von der Form A. Oder auch: B ist der Beweis des Zahlensatzes; aber eben deshalb nicht von A.

Ts-213 680r[5] & 681r[1] "Ich werde Dir AI,AII,AIII aus dem *einen* Satz ableiten". – Man denkt dabei natürlich an eine Ableitung, wie sie *mit Hilfe* dieser Sätze gemacht wird. – Man denkt, es wird eine Art von kleineren Kettengliedern gegeben werden, durch die wir alle diese großen ersetzen können. Und da haben wir doch ein bestimmtes Bild; und es wird uns etwas ganz Anderes geboten. Die Gleichung wird durch den induktiven Beweis, quasi, der Quere, statt der Länge nach zusammengesetzt.

Ts-213 681r[2] Wenn wir nun die Ableitung ausführen, so kommen wir endlich zu dem Punkt, wo die Konstruktion von B vollendet ist. Aber hier heißt es nun "also gilt diese Gleichung". Aber diese Worte heißen ja nun etwas anderes als, wo wir sonst eine Gleichung aus Gleichungen folgern. Die Worte "die Gleichung folgt daraus" haben ja schon eine Bedeutung. Und hier wird eine Gleichung allerdings konstruiert, aber nach einem andern Prinzip.

Ts-213 681r[3] Wenn ich sage "aus dem Komplex folgt die Gleichung", so 'folgt' hier eine Gleichung aus etwas, was gar keine Gleichung ist.

Ts-213 681r[4] Man kann nicht sagen: die Gleichung, wenn sie aus B folgt, folge doch aus einem Satz, nämlich aus & v & w; denn es kommt eben darauf an, *wie* ich aus diesem Satz A erhalte; ob nach einer Regel des Folgens. Welches die Verwandtschaft der Gleichung zum Satz u & v & w ist. (Die Regel, die in diesem Falle zu A führt macht gleichsam einen Querschnitt durch u & v & w, sie faßt den Satz anders auf, als eine Regel des Folgens.)

Ts-213 681r[5] Wenn uns die Ableitung von A aus u versprochen war und wir sehen nun den Übergang von B auf A, so möchten wir sagen: “ach, so war es nicht gemeint”. So, als hätte jemand mir versprochen, er werde mir etwas schenken und nun sagt er: so, jetzt schenke ich Dir meine Zeit.

Ts-213 682r[1] Darin, daß der Übergang von B auf A kein Folgen ist, liegt auch, was ich damit meinte, daß nicht das logische Produkt u & v & w die Allgemeinheit ausdrückt.

Ts-213 682r[2] Ich sage, $(a + b)^2 =$ etc. ist mit Hilfe von A1,A2, etc. bewiesen, weil die Übergänge von $(a + b)^2$ zu $a^2 + 2ab + b^2$ alle von der Form A1, oder A2, etc. sind. In diesem Sinne ist in III auch der Übergang von $(b + 1) + a$ auf $(b + a) + 1$ nach A1 gemacht, aber nicht der Übergang von $a + n$ auf $n + a$!

Ts-213 682r[3] Daß man sagt “*die Richtigkeit* der Gleichung ist bewiesen”, zeigt schon, daß Beweis nicht jede Ableitung ist.

Ts-213 682r[4] Es zeigt mir jemand die Komplexe B und ich sage “das sind keine Beweise der Gleichungen A”. Nun sagt er: “Du siehst aber noch nicht das System, nach dem diese Komplexe gebildet sind”, und zeigt es mir. Wie konnte das die B zu Beweisen machen?

Ts-213 682r[5] Durch diese Einsicht steige ich in eine andere, sozusagen höhere, Ebene; während der *Beweis* auf der tieferen hätte geführt werden müssen.

Ts-213 682r[6] Nur ein bestimmter Übergang von Gleichungen zu einer Gleichung ist ein Beweis dieser *letzteren*. Dieser ist hier nicht gemacht und alles Andere kann auf die Sprache keinen Einfluß (mehr) haben.

Ts-213 682r[7] & 683r[1] Aber kann ich eben nicht sagen, daß, wenn ich dies über A bewiesen habe, ich damit A bewiesen habe? Und woher kam dann überhaupt die Täuschung, daß ich es dadurch bewiesen hätte? denn diese muß doch einen tieferen Grund haben.

Ts-213 683r[2] Nun, wenn es eine Täuschung ist, so kam sie jedenfalls von unserer Ausdrucksweise in der Wortsprache her "dieser Satz gilt für *alle* Zahlen"; denn der algebraische Satz war ja nach *dieser Auffassung* nur eine andere Schreibweise dieses Satzes (*der Wortsprache*). Und diese Ausdrucksweise ließ den Fall *aller* Zahlen mit dem Fall 'aller Menschen in diesem Zimmer' verwechseln. (Während wir, um die Fälle zu unterscheiden, fragen: Wie verifiziert man den einen und wie den andern.)

Ts-213 683r[3] Wenn ich mir die Funktionen f1,f2,F exakt *definiert* denke und nun das Schema des Induktionsbeweises schreibe, –

B { | | u v w | | f 1 (1) = f 2 (1) f 1 (c + 1) = F (f 1 (c)) } f 2 (c + 1) = F (f 2 (c)) | | | A ... f 1 n = f 2 n

auch dann kann ich nicht sagen, der Übergang von f1y auf f2y sei auf Grund von r gemacht worden (wenn der Übergang in u, v, w nach r gemacht wurde – in speziellen Fällen r = u). Er bleibt der Gleichung A entsprechend gemacht und ich könnte nur sagen, er entspreche dem Komplex B, wenn ich nämlich diesen als ein anderes Zeichen statt der Gleichung A auffasse.

Ts-213 683r[4] Denn das Schema des Übergangs mußte ja u, v und w enthalten.

Ts-213 684r[1] Tatsächlich ist R nicht das Schema des Induktionsbeweises B3; dieses ist viel komplizierter, da es das Schema B1 enthalten muß.

Ts-213 684r[2] Es ist nur dann nicht ratsam, etwas 'Beweis' zu nennen, wenn die übliche Grammatik des Wortes 'Beweis' mit der Grammatik des betrachteten Gegenstandes nicht übereinstimmt.

Ts-213 684r[3] Die tiefgehende Beunruhigung rührt am Schluß von einem kleinen, aber offen zu Tage liegendem Zug des überkommenen Ausdrucks her.

Ts-213 684r[4] & 685r[1]

Was heißt es, daß R den Übergang A rechtfertigt? Es heißt wohl, daß ich mich entschieden habe, nur solche Übergänge in meinem Kalkül zuzulassen, denen ein Schema B entspricht, dessen Sätze u, v, w wieder nach r ableitbar sein sollen. (Und das hieße natürlich nichts anderes, als daß ich nur die Übergänge A1,A2, etc. zuließe und diesen Schemata B entsprächen.) Richtiger wäre es, zu schreiben "und diesen Schemata der Form R entsprechen". Ich wollte mit dem Nachsatz in der Klammer sagen, der Schein der Allgemeinheit – ich meine, der Allgemeinheit des Begriffs der Induktionsmethode – ist *un nötig*, denn es kommt am Schluß doch nur darauf hinaus, daß die speziellen *Konstruktionen* B1,B2, etc. um die Seiten der Gleichungen A1,A2, etc. *konstruiert* wurden. Oder: es ist ein Luxus, dann noch das Gemeinsame dieser Konstruktionen zu erkennen; alles was maßgebend ist, sind *diese* Konstruktionen (*selber*). Denn alles, was da steht, sind *diese* Beweise. Und der Begriff, unter den die Beweise fallen, ist überflüssig, denn wir haben nie etwas mit ihm gemacht. Wie der Begriff Sessel überflüssig ist, wenn ich nur – auf die Gegenstände weisend – sagen will "stelle dies und dies und dies in mein Zimmer" (obwohl die drei Gegenstände Sessel sind). (Und eignen sich diese Geräte nicht, um darauf zu sitzen, so wird das dadurch nicht anders, daß man auf eine Ähnlichkeit zwischen ihnen aufmerksam macht.) Das heißt aber nichts anderes, als daß der einzelne Beweis unsere Anerkennung als solchen braucht (wenn 'Beweis' bedeuten soll, was es bedeutet); hat er die nicht, so kann keine Entdeckung einer Analogie mit anderen solchen Gebilden sie ihm *geben*. Und der Schein des Beweises entsteht dadurch, daß u, v, w und A Gleichungen sind, und daß eine allgemeine Regel gegeben werden kann, nach der man aus B A bilden (und es in diesem Sinne ableiten) kann. Auf diese *allgemeine Regel* kann man *nachträglich* aufmerksam werden. (Wird man nun dadurch aber *darauf* aufmerksam, daß die B doch in Wirklichkeit Beweis der A sind?) Man wird da auf eine Regel aufmerksam, mit der man hätte beginnen können und mittels der und u man A1,A2 etc. hätte konstruieren können. Niemand aber würde sie in diesem *Spiel* einen Beweis genannt haben.

Ts-213 685r[2] Woher dieser Konflikt: "Das ist doch kein Beweis!" – "das ist doch ein Beweis!"?

Ts-213 686r[1] Man könnte sagen: Es ist wohl wahr, ich zeichne im Beweis von B mittels u die Konturen der Gleichung der A nach, aber nicht auf die Weise, die ich nenne "A mittels u beweisen".

Ts-213 686r[2] Die Schwierigkeit, die in dieser Betrachtung zu überwinden ist ist, den Induktionsbeweis als etwas Neues, sozusagen, *naiv* zu betrachten.

Ts-213 686r[3] Wenn wir also oben sagten, wir können mit R beginnen, so ist dieses Beginnen mit R in gewisser Weise *Humbug*. Es ist nicht so, wie wenn ich eine Rechnung mit der Ausrechnung von 526 × 718 beginne. Denn hier ist diese Problemstellung der Anfangspunkt eines Weges. Während ich dort das R sofort wieder verlasse und wo anders beginnen muß. Und wenn es geschehen ist, daß ich einen Komplex von der Form R konstruiert habe, dann ist es wieder gleichgültig, ob ich mir das früher *äußerlich* vorgesetzt habe, weil mir dieser Vorsatz, mathematisch (*gesprochen*), d.h. im Kalkül, doch nichts geholfen hat. Es bleibt also bei der Tatsache, daß ich jetzt einen Komplex von der Form R vor mir habe.

Ts-213 686r[4] & 687r[1] Wir könnten uns denken, wir kennten nur den Beweis B1 und würden nun sagen: Alles, was wir haben, ist diese Konstruktion. Von einer Analogie dieser mit anderen Konstruktionen, von einem allgemeinen Prinzip bei der Ausführung dieser Konstruktionen, ist gar keine Rede. – Wenn ich nun so B und A sehe, muß ich fragen: warum nennst Du das aber einen Beweis gerade von A1? (ich frage noch nicht: warum nennst Du es einen *Beweis* von A). Was hat dieser Komplex mit A1 zu tun? Als Antwort muß er mich auf die Beziehung zwischen A und B aufmerksam machen, die in V ausgedrückt ist.

Ts-213 687r[2] Es zeigt uns jemand B1 und erklärt uns den Zusammenhang mit A1, d.i., daß die rechte Seite von A so und so erhalten wurde, etc. etc. Wir verstehen ihn; und er fragt uns (nun): ist nun das ein Beweis von A? Wir würden antworten: gewiß *nicht*! Hatten wir nun alles verstanden, was über diesen Beweis zu verstehen war? Ja. Hatten wir auch die allgemeine Form des Zusammenhangs von B und A gesehen? Ja! Und wir können auch daraus schließen, daß man so aus jedem A ein B konstruieren kann *und also auch umgekehrt A aus B*.

Ts-213 687r[3] Dieser Beweis ist nach einem bestimmten Plan gebaut (nach dem noch andere Beweise gebaut sind). Aber dieser Plan kann den Beweis nicht zum Beweis machen. Denn wir haben jetzt hier nur die eine Verkörperung dieses Planes, und können von dem Plan als allgemeinem Begriff (ganz) absehen. Der Beweis muß für sich sprechen und der Plan ist nur in ihm verkörpert, aber selbst kein Bestandteil des Beweises. (Das wollte ich immer sagen.) Daher nützt es mich nichts, wenn man mich auf die Ähnlichkeiten zwischen Beweisen aufmerksam macht, um mich davon zu überzeugen, daß sie Beweise sind.

Ts-213 687r[4] & 688r[1] Ist nicht unser Prinzip: keinen *Begriff* zu verwenden, wo keiner nötig ist? – D.h. die Fälle zu zeigen, in denen das Begriffswort in Wirklichkeit für eine Liste steht.

Ts-213 688r[2] & 689r[1]

Wenn ich nun früher sagte "das ist doch kein Beweis", so meinte ich 'Beweis' in einem bereits festgelegten Sinne, in welchem es aus A und B allein zu ersehen ist. Denn in diesem Sinne kann ich sagen: Ich verstehe doch ganz genau, was B tut und in welchem Verhältnis es zu A steht. Jede weitere Belehrung ist überflüssig und *das* ist kein Beweis. In diesem Sinne habe ich es nur mit B und A allein zu tun; ich sehe außer ihnen nichts und nichts anderes geht mich an. Dabei sehe ich das Verhältnis nach der Regel V sehr gut, aber es kommt für mich als *Konstruktionsbehelf* gar nicht in Frage. Sagte mir jemand, während meiner Betrachtung von B und A, daß man auch hätte B aus A (oder umgekehrt) nach einer Regel konstruieren können, so könnte ich ihm nur sagen "komm' mir nicht mit unwesentlichen Sachen". Denn das ist ja selbstverständlich, und ich sehe sofort, daß es B nicht zu einem Beweis von A macht. Denn, daß es so eine allgemeine Regel gibt, könnte nur zeigen, daß B der Beweis *von A und keinem andern Satz* ist, wenn es überhaupt ein Beweis wäre. D.h., daß der Zusammenhang zwischen B und A einer Regel gemäß ist, kann nicht zeigen, daß B ein *Beweis* von A ist. Und jeder solche Zusammenhang könnte zur Konstruktion von B aus A (und umgekehrt) benützt werden.

Ts-213 689r[2] Wenn ich also sagte "R wird ja gar nicht zur Konstruktion benützt, also haben wir mit ihm nichts zu tun", so hätte es heißen müssen: Ich habe es doch nur mit A und B allein zu tun. Es genügt doch, wenn ich A und B mit einander konfrontiere und nun frage "ist B ein Beweis von A"; und also brauche ich A nicht aus B nach einer vorher festgelegten Regel zu konstruieren, sondern es genügt, daß ich die einzelnen A – wie viele es sind – den einzelnen B gegenüberstelle. Ich brauche eine Konstruktionsregel nicht; und das ist wahr. Ich brauche eine vorher aufgestellte Konstruktionsregel nicht (aus der ich dann erst die A gewonnen hätte).

Ts-213 689r[3] Ich meine: Im Skolem'schen Kalkül *brauchen* wir diesen Begriff nicht, *es genügt* die Liste. Es geht uns nichts verloren, wenn wir nicht sagen "wir haben die Grundgesetze A bewiesen", sondern bloß zeigen, daß sich ihnen – in gewisser Beziehung analoge – Konstruktionen zuordnen lassen.

Ts-213 689r[4] Der Begriff der Allgemeinheit (*und der Rekursion*), der in diesen Beweisen gebraucht wird, ist nicht allgemeiner, als er aus diesen Beweisen unmittelbar herauszulesen ist.

Ts-213 689r[5] & 690r[1] Die Klammer } in R, welche u, v, und w zusammenhält, kann weiter nichts bedeuten, als daß wir den Übergang in A (oder einen von der Form A) als berechtigt ansehen, wenn die Glieder (Seiten) des Übergangs in einer, durch das Schema B charakterisierten Beziehung, zu einander stehen. Es nimmt dann B den Platz von A. Und wie es früher hieß: der Übergang ist in meinem Kalkül erlaubt, wenn er einem der A entspricht, so kann es jetzt heißen: er ist erlaubt, wenn er einem der B entspricht. Damit aber hätten wir noch keine Vereinfachung, keine Reduktion gewonnen.

Ts-213 690r[2] Der Gleichungskalkül ist gegeben. In diesem Kalkül hat ‘Beweis’ eine festgelegte Bedeutung. Nenne ich nun auch die induktive *Rechnung* einen Beweis, so erspart mir dieser Beweis doch nicht die Kontrolle, ob die Übergänge der Gleichungskette, nach *diesen* bestimmten Regeln (oder Paradigmen) gemacht sind. Ist das der Fall, so sage ich, die letzte Gleichung der Kette sei bewiesen; oder auch, die Gleichungskette stimme.

Ts-213 691r[1] Denken wir uns, wir kontrollieren die Rechnung $(a + b)^3 = \ldots$ in der ersten Weise und beim ersten Übergang sagt er: “ja, dieser Übergang geschieht (*wohl*) nach $a.(b + c) = ab + ac$, aber stimmt das auch?” Und nun zeigten wir ihm die Ableitung dieser Gleichung im induktiven Sinne. –

Ts-213 691r[2] In einer Bedeutung heißt die Frage “stimmt die Gleichung G”: läßt sie sich nach den Paradigmen herleiten? – Im andern Fall heißt es: lassen sich die Gleichungen u, v, w nach dem Paradigma (oder den Paradigmen) herleiten? – Und hier haben wir die beiden Bedeutungen der Frage (oder des Wortes ‘Beweis’) auf *eine* Ebene gestellt (in *einem* System ausgedrückt) und können sie nun vergleichen (und sehen, daß sie nicht Eines sind).

Ts-213 691r[3] Und zwar leistet dieser neue Beweis nicht, was man annehmen könnte, daß er nämlich den Kalkül auf eine *kleinere* Grundlage setzte – wie es etwa geschieht, wenn wir durch $p \mid q$ $p \vee q$ und non-p ersetzen, oder die Zahl der Axiome vermindern. Denn, wenn man nun sagt, man habe alle die Grundgleichungen A aus r allein abgeleitet, so heißt hier das Wort “abgeleitet” etwas (*ganz*) andres. (Was man sich bei dieser Versprechung erwartet, ist die Ersetzung der großen Kettenglieder durch kleinere, nicht durch zwei halbe Kettenglieder.) Und in einem Sinne hat man durch diese Ableitungen alles beim alten gelassen. Denn es bleibt im neuen Kalkül ein Kettenglied des alten wesentlich als ein solches bestehn. Die alte Struktur wird *nicht* aufgelöst. So daß man sagen muß, der alte Gang des Beweises bleibt bestehen. Und es bleibt im *alten* Sinne auch die Unreduzierbarkeit.

Ts-213 692r[1] Man kann daher auch nicht sagen, Skolem habe das algebraische System auf eine kleinere Grundlage gesetzt, denn er hat es in einem andern Sinne als *dem algebraischen* ‘begründet’.

Ts-213 692r[2] Wird ein Zusammenhang der A durch die Induktionsbeweise mittels u gezeigt und ist dies nicht das Zeichen dafür, daß wir es hier doch mit Beweisen zu tun haben? – Es wird nicht *der* Zusammenhang gezeigt, den ein Zerlegen der Übergänge A in Übergänge r herstellen würde. Und *ein* Zusammenhang der A ist ja schon vor jedem Beweis zu sehen.

Ts-213 692r[3] & 693r[1] & 694r[1] & 695r[1] Ich kann die Regel R auch *so* schreiben:

$$a + (1 + 1)a + (x + 1)a + ((x + 1) + 1) \mid = \mid (a + 1) + 1(a + x) + 1 - - - S\ (a + (x + 1)) + 1$$

oder auch so: $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, wenn ich R oder S als Erklärung oder Ersatz für diese Form nehme. Wenn ich nun sage, in

$$\alpha\beta\gamma \mid \mid a + (b + 1)a + (b + (c + 1))(a + b) + (c + 1) \mid = = = \mid (a + b) + 1a + ((b + c) + 1) = (a + (b + c)) + 1 - - - B\ ((a + b) + c) + 1$$

seien die Übergänge durch die Regel R gerechtfertigt, – so kann man mir drauf antworten: “Wenn Du das eine Rechtfertigung nennst, so hast Du die Übergänge gerechtfertigt. Du hättest uns aber ebensoviel gesagt, wenn Du uns nur auf die Regel R und ihre formale Beziehung zu u (oder zu u, v und w) aufmerksam gemacht hättest.” Ich hätte also auch sagen können: Ich nehme die Regel R in der und der Weise als Paradigma meiner Übergänge. Wenn nun Skolem etwa nach seinem Beweis für das assoziative Gesetz übergeht zu:

$$a + 1a + (b + 1)(b + 1) + a \mid = = = \mid 1 + a(a + b) + 1)$$

– – – C

b + (1 + a) = b + (a + 1) = (b + a) + 1

und sagt, der erste und dritte Übergang in der dritten Zeile seien nach dem bewiesenen assoziativen Gesetz gerechtfertigt, – so sagt er uns damit nicht mehr, als wenn er sagte, die Übergänge seien nach dem Paradigma a + (b + c) = (a + b) + c gemacht (d.h., sie entsprechen dem Paradigma) und es sei ein Schema u, v, w mit Übergängen nach dem Paradigma u abgeleitet. – "Aber rechtfertigt B nun diese Übergänge, oder nicht?" – Was meinst Du mit dem Wort "rechtfertigen"? – "Nun, der Übergang ist gerechtfertigt, wenn wirklich ein Satz, der für alle Zahlen gilt, bewiesen ist." – Aber in welchem Falle wäre das geschehen? Was nennst Du einen Beweis davon, daß ein Satz für alle Kardinalzahlen gültig ist? Wie weißt Du, ob der Satz (*wirklich*) für alle Kardinalzahlen giltig ist, da Du es nicht ausprobieren kannst. Dein *einziges* Kriterium ist ja der Beweis. Du *bestimmst* also wohl eine Form und nennst sie die des Beweises, daß ein Satz für alle Kardinalzahlen gilt. Dann haben wir eigentlich gar nichts davon, daß uns zuerst die allgemeine Form dieser Beweise gezeigt wird; da ja dadurch nicht gezeigt wird, daß nur der besondere Beweis wirklich das leistet, was wir von ihm verlangen; ich meine: da hiedurch der besondere Beweis nicht als einer gerechtfertigt, erwiesen ist, der einen Satz für alle Kardinalzahlen beweist. Der rekursive Beweis muß vielmehr seine eigene Rechtfertigung sein. Wenn wir unsern Beweisvorgang wirklich als den Beweis einer solchen Allgemeinheit rechtfertigen wollen, tun wir vielmehr etwas anderes: wir gehen Beispiele einer Reihe durch, und diese Beispiele und das Gesetz, was wir in ihnen erkennen, befriedigt uns nun, und wir sagen: ja, unser Beweis leistet wirklich, was wir wollten. Aber wir müssen nun bedenken, daß wir mit der Angabe dieser Beispielreihe die Schreibweise B und C nur in eine andere (*Schreibweise*) übersetzt haben. (Denn die Beispielreihe ist nicht die unvollständige Anwendung der allgemeinen Form, sondern ein anderer Ausdruck dieser Form.) Und weil die Wortsprache, wenn sie den Beweis erklärt, erklärt was er beweist, den Beweis nur in eine andere Ausdrucksform übersetzt, so können wir diese Erklärung auch ganz weglassen. Und wenn wir das tun, so werden die mathematischen Verhältnisse viel klarer, nicht verwischt durch die mehrdeutigen Ausdrücke der Wortsprache. Wenn ich z.B. B unmittelbar neben A setze, ohne Dazwischenkunft des Wortes "alle", so kann kein falscher Schein eines Beweises von A durch B entstehen. Wir sehen dann ganz nüchtern, wie weit die Beziehungen von B zu A und zu $a + b = b + a$ reichen *und wo sie aufhören*. Man lernt so erst, unbeirrt von der alles gleichmachenden Form der Wortsprache, die eigentliche Struktur dieser Beziehung kennen, und was es mit ihr auf sich hat. Man sieht hier vor allem, daß wir *in* dem Baum der Strukturen B, C, etc. interessiert sind, und daß an ihm zwar allenthalben die Form

$$f(1) = g(1)$$

$$f(n + 1) = F(fn)$$

$$g(n + 1) = F(gn)$$

zu sehen ist, gleichsam eine bestimmte Astgabelung, – daß aber diese Gebilde in verschiedenen Anordnungen, und Verbindungen untereinander, auftreten, und daß sie nicht in dem Sinne Konstruktionselemente *bilden*, wie die Paradigmen im Beweis von $a + (b + (c + 1)) = (a + (b + c)) + 1$ oder $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Der Zweck der "rekursiven Beweise" ist ja, den algebraischen Kalkül mit dem der Zahlen in Verbindung zu setzen. Und der Baum der rekursiven Beweise "rechtfertigt" den algebraischen Kalkül nur, wenn das heißen soll, daß er ihn mit dem arithmetischen in Verbindung bringt. Nicht aber in dem Sinn, in welchem die Liste der Paradigmen den algebraischen Kalkül, d.h. die Übergänge in ihm, rechtfertigt. Wenn man also die Paradigmen der Übergänge tabuliert, so hat das dort Sinn, wo das Interesse darin liegt, zu zeigen, daß die und die Transformationen alle bloß mit Hilfe jener – im übrigen willkürlich gewählten – Übergangsformen zustande gebracht sind. Nicht aber dort, wo sich die Rechnung in einem andern Sinne rechtfertigen soll, wo also das Anschauen der Rechnung – ganz *abgesehen* von dem Vergleich mit einer Tabelle vorher festgelegter Normen – uns lehren muß, ob wir sie zulassen sollen oder nicht. Skolem hätte uns also keinen Beweis des assoziativen und kommutativen Gesetzes versprechen brauchen, sondern einfach sagen können, er werde uns einen Zusammenhang der Paradigmen der Algebra mit den Rechnungsregeln der Arithmetik zeigen. Aber ist das nicht Wortklauberei? hat er denn nicht die Zahl der Paradigmen reduziert und uns z.B. statt jener beiden Gesetze eines, nämlich $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ gegeben? Nein. Wenn wir z.B. $(a + b)^4 =$ etc. (r) beweisen, so könnten wir dabei von dem vorher bewiesenen Satz $(a + b)^2 =$ etc. (s) Gebrauch machen. Aber in diesem Fall lassen sich die Übergänge in r, die durch s gerechtfertigt wurden, auch durch jene Regeln rechtfertigen, mit denen s bewiesen wurde. Und es verhält sich dann s zu jenen ersten Regeln, wie ein durch Definition eingeführtes Zeichen zu dem primären Zeichen, mit deren Hilfe es definiert wurde. Man kann die Definition immer auch eliminieren und auf die primären Zeichen übergehen. Wenn wir aber in C einen Übergang machen, der durch B gerechtfertigt ist, so können wir diesen Übergang nun nicht auch mit u allein machen. Wir haben eben mit dem, was hier Beweis genannt wird, nicht einen Schritt in Stufen zerlegt, sondern etwas ganz andres getan.

Ts-213 696r[1] **34** *Der rekursive Beweis reduziert die Anzahl der Grundgesetze nicht.*

Ts-213 696r[2] Wir haben also hier nicht den Fall, in welchem eine *Gruppe* von Grundgesetzen durch eine mit weniger Gliedern bewiesen wird, aber nun weiter in den Beweisen alles im Gleichen bleibt. (Wie auch in einem System von Grundbegriffen an der späteren Entwicklung dadurch nichts geändert wird, daß man die Anzahl der Grundbegriffe durch Definitionen reduziert.) (Übrigens, welche verdächtige Analogie, zwischen "Grundgesetzen" und "Grundbegriffen"!)

Ts-213 696r[3] Es ist gleichsam so: der Beweis eines *alten* Grundgesetzes setzt sonst das System der Beweise (*einfach*) nach rückwärts fort. Die Rekursionsbeweise aber setzen das System von algebraischen Beweisen (mit den alten Grundgesetzen) nicht nach rückwärts fort, sondern sind ein neues System, das mit dem ersten nur parallel zu laufen scheint.

Ts-213 696r[4] & 697r[1] Das ist eine seltsame Bemerkung, daß in den Induktionsbeweisen der Grundregeln nach wie vor ihre Unreduzierbarkeit (Unabhängigkeit) sich zeigen muß. Was, wenn man das für den Fall von gewöhnlichen Beweisen (oder Definition) sagte, also für den Fall, wo die Grundregeln eben weiter reduziert werden, eine neue Verwandtschaft zwischen ihnen gefunden (oder konstruiert) wird.

Ts-213 697r[2] Wenn ich darin Recht habe, daß durch die Rekursionsbeweise die Unreduzierbarkeit intakt bleibt, dann ist damit (wohl) alles gesagt, was ich gegen den Begriff vom Rekursions-"Beweis" sagen wollte.

Ts-213 697r[3] Der induktive Beweis zerlegt den Übergang in A nicht. Ist es nicht das, was macht, daß ich mich dagegen sträube, ihn Beweis zu nennen? Warum ich versucht bin zu sagen, er kann auf keinen Fall – nämlich auch, wenn man A durch R und u konstruiert – mehr tun, als etwas *über* den Übergang *zu zeigen*.

Ts-213 697r[4] Wenn man sich einen Mechanismus aus Zahnrädern und diese aus lauter gleichen keilförmigen Stücken und je einem Ring, der sie zu einem Rad zusammenhält, zusammengesetzt denkt, so blieben in einem gewissen Sinne die Einheiten des Mechanismus doch die Zahnräder.

Ts-213 697r[5] Es ist so: Wenn ein Faß aus Dauben und Böden besteht, so halten doch nur alle diese in dieser (*bestimmten*) Verbindung (als Komplex) die Flüssigkeit und bilden als Behälter neue Einheiten.

Ts-213 697r[6] & 698r[1] Denken wir uns eine Kette, sie besteht aus Gliedern und es ist möglich, (je) ein solches Glied durch zwei kleinere zu ersetzen. Die Verbindung, die die Kette macht, kann dann, statt durch die großen, ganz durch die kleineren Glieder gemacht werden. Man könnte sich aber auch denken, daß jedes Glied der Kette aus – etwa – zwei halbringförmigen Teilen bestünde, die zusammen das Glied bildeten, einzeln aber nicht als Glieder verwendet werden könnten. Es hätte nun ganz verschiedenen Sinn, einerseits, zu sagen: die Verbindung, die die großen Glieder machen, kann durch lauter kleine Glieder gemacht werden; – und anderseits: diese Verbindung kann durch lauter halbe große Glieder gemacht werden. Was ist der Unterschied?

Ts-213 698r[2] Der eine Beweis ersetzt eine großgliedrige Kette durch eine kleingliedrige, der andere zeigt, wie man die (*alten*) großen Glieder aus mehreren Bestandteilen zusammensetzen kann.

Ts-213 698r[3] Ähnlichkeit, sowie Verschiedenheit der beiden Fälle sind augenfällig.

Ts-213 698r[4] Der Vergleich des Beweises mit der Kette ist natürlich ein *logischer* Vergleich und also ein vollkommen exakter Ausdruck dessen, was er illustriert.

Ts-213 699r[1]

35 *Periodizität*

1 : 3 = 0.3.

Ts-213 699r[2] & 700r[1]

Man faßt die Periodizität eines Bruches, z.B. ⅓, so auf, als *bestünde* sie darin, daß etwas, was man die Extension des unendlichen Dezimalbruchs nennt, nur aus Dreien besteht, und daß die Gleichheit des Restes dieser Division mit dem Dividenden nur das *Anzeichen* für diese Eigenschaft der unendlichen Extension sei. Oder aber man korrigiert diese Meinung dahin, daß nicht eine unendliche Extension diese Eigenschaft habe, sondern eine unendliche Reihe endlicher Extensionen; und hierfür sei wieder die Eigenschaft der Division ein Anzeichen. Man kann nun sagen: die Extension mit *einem* Glied sei 0˙3, die mit 2 Gliedern 0˙33, die mit dreien 0˙333, u.s.w.. Das ist eine *Regel* und das "u.s.w." bezieht sich auf die Regelmäßigkeit, und die Regel könnte auch geschrieben werden "[0˙3, 0˙x, 0˙x3]". Das, was aber durch die Division

1 _ 1 _ : 3 = 0 ˙ 3

bewiesen ist, ist *diese* Regelmäßigkeit im Gegensatz zu einer andern, nicht die Regelmäßigkeit im Gegensatz zur Unregelmäßigkeit. Die periodische Division, also

1 _ 1 _ : 3 = 0 ˙ 3

(im Gegensatz zu 1 : 3 = 0˙31 beweist *eine* Periodizität der Quotienten, d.h. sie *bestimmt* die Regel (die Periode), legt sie fest, aber ist nicht ein Anzeichen dafür, daß eine Regelmäßigkeit "vorhanden ist". *Wo* ist sie denn vorhanden? Etwa in den bestimmten Entwicklungen, die ich auf diesem Papier gebildet habe. Aber das sind doch nicht "die Entwicklungen". (Hier werden wir irregeführt von der Idee der nicht aufgeschriebenen, idealen Extensionen, die ein ähnliches Unding sind, wie die idealen, nicht gezogenen geometrischen Geraden, die wir gleichsam nur in der Wirklichkeit nachziehen, wenn wir sie zeichnen.) Wenn ich sagte “das ‘u.s.w.’ bezieht sich auf die Regelmäßigkeit”, so unterschied ich es von dem ‘u.s.w.’ in “er las alle Buchstaben: a, b, c, u.s.w.”. Wenn ich sage: “die Extensionen von 1:3 sind 0˙3, 0˙33, 0˙333, u.s.w.”, so gebe ich *drei* Extensionen und – eine Regel. Unendlich ist nur diese, und zwar in keiner andern Weise, als die Division

1 _ 1 _ : 3 = 0 ˙ 3.

Ts-213 700r[2] Von dem Zeichen “0˙3˙” kann man sagen: *es ist keine Abkürzung*.

Ts-213 700r[3] & 701r[1] Und das Zeichen “[0˙3, 0˙x, 0˙x3]” ist kein Ersatz für eine Extension, sondern das vollwertige Zeichen selbst; und ebensogut ist “0˙3˙”. Es sollte uns doch zu denken geben, daß ein Zeichen der Art “0˙3˙” *genügt*, um damit zu machen, was wir brauchen. Es ist kein Ersatz, und im Kalkül gibt es keinen Ersatz. Wenn man meint, die besondere Eigenschaft der Division

1 _ 1 _ : 3 = 0 ˙ 3

sei ein Anzeichen für die Periodizität des unendlichen Dezimalbruchs, oder *der* Dezimalbrüche der Entwicklung, so heißt das, das etwas regelmäßig *ist*; aber was? Die Extensionen, die ich gebildet habe? Aber andere gibt es ja nicht. Am absurdesten würde die Redeweise, wenn man sagte: die Eigenschaft der Division sei ein Anzeichen dafür, daß das

Resultat die Form [0,a, 0˙x, 0˙xa] habe; das wäre so, als wollte man sagen; eine Division ist das Anzeichen dafür, daß eine Zahl herauskommt. Das Zeichen “0˙3˙” drückt seine Bedeutung nicht von einer größeren Entfernung aus, als “0˙333...”, denn dieses Zeichen gibt eine Extension von drei Gliedern und eine Regel; die Extension 0˙333 ist für unsere Zwecke nebensächlich und so bleibt nur die Regel, die “[0˙3, 0˙x, 0˙x3]” ebensogut gibt. Der Satz “die Division wird nach der ersten Stelle periodisch” *heißt soviel* wie: “der erste Rest ist gleich dem Dividenden”. Oder auch: der Satz “die Division wird von der ersten Stelle an ins Unendliche die gleiche Ziffer erzeugen” *heißt* “der erste Rest ist gleich dem Dividenden”; so wie der Satz “dieses Lineal hat einen unendlichen Radius” heißt, es sei gerade.

Ts-213 701r[2] Man könnte nun sagen: die Stellen des Quotienten von 1:3 sind *notwendig alle* 3, und das würde wieder nur heißen, daß der erste Rest gleich dem Dividenden ist und die erste Stelle des Quotienten 3. Die Verneinung des ersten Satzes ist daher gleich der Verneinung des zweiten. Es ist also dem “notwendig alle” nichts entgegengesetzt, was man “zufällig alle” nennen könnte; “notwendig alle” ist sozusagen *ein* Wort. Ich brauche nur fragen: Was ist das Kriterium der notwendigen Allgemeinheit, und was wäre das, der zufälligen (das Kriterium dafür also, daß zufällig alle Zahlen die Eigenschaft P haben)?

Ts-213 702r[1]

36 *Der rekursive Beweis als Reihe von Beweisen.*

Ts-213 702r[2] Der “rekursive Beweis” ist das allgemeine Glied einer Reihe von Beweisen. Er ist also ein Gesetz, nach dem man Beweise konstruieren kann. Wenn gefragt wird, wie es möglich ist, daß mir diese allgemeine Form den Beweis eines speziellen Satzes, z.B. $7 + (8 + 9) = (7 + 8) + 9$ ersparen kann, so ist die Antwort, daß sie nur alles zum Beweis dieses Satzes vorbereitet hat, ihn aber nicht beweist (er kommt ja in ihr nicht vor). Der Beweis besteht vielmehr aus der allgemeinen Form zusammen mit dem Satz.

Ts-213 702r[3] & 703r[1] Unsere gewöhnliche Ausdrucksweise trägt den Keim der Verwirrung in ihre *Fundamente*, indem sie das Wort “Reihe” einerseits im Sinne von ‘Extension’, anderseits im Sinne von ‘Gesetz’ gebraucht. Das Verhältnis der beiden kann man sich an der Maschine klarmachen, die Schraubenfedern erzeugt. Hier wird durch einen *schraubenförmig* gewundenen Gang ein Draht geschoben, der nun so viele Schraubenwindungen erzeugt, als man erzeugen will. Das, was man die unendliche Schraube nennt, ist nicht vielleicht etwas von der Art der endlichen Drahtstücke, oder etwas, dem sich diese nähern je länger sie werden, sondern das Gesetz der Schraube, wie es in dem kurzen Gangstück verkörpert ist. Der Ausdruck “unendliche Schraube” oder “unendliche Reihe” ist daher irreführend.

Ts-213 703r[2] Wir können also den rekurrierenden Beweis immer auch als Reihenstück mit dem "u.s.w." anschreiben und er verliert dadurch nicht seine Strenge. Und zugleich zeigt diese Schreibweise klarer sein Verhältnis zur Gleichung A. Denn nun verliert der rekursive Beweis jeden Schein einer Rechtfertigung von A im Sinne eines algebraischen Beweises – etwa von $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Dieser Beweis mit Hilfe der algebraischen Rechnungsregeln ist vielmehr ganz analog einer Ziffernrechnung.

Ts-213 703r[3] $5 + (4 + 3) = 5 + (4 + (2 + 1)) = 5 + ((4 + 2) + 1) = (5 + (4 + 2)) + 1 = (5 + (4 + (1 + 1))) + 1 = ((5 + 4) + 2) + 1 = (5 + 4) + 3$ … (L) Das ist einerseits der Beweis von $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$, anderseits kann man es als Beweis von $5 + (4 + 4) = (5 + 4) + 4$ etc. etc. *gelten lassen*, d.h. *benützen*. Wenn ich nun sage: L ist der Beweis des Satzes $a + (b + c) = (a + b) + c$, so würde das Eigentümliche am Übergang vom Beweis zum Satz viel auffälliger.

Ts-213 703r[4] Definitionen führen nur praktische Abkürzungen ein, aber wir könnten auch ohne sie auskommen. Aber wie ist es mit den rekursiven Definitionen?

Ts-213 703r[5] Anwendung der Regel $a + (b + 1) = (a + b) + 1$ kann man zweierlei nennen: $4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1$ ist eine Anwendung in einem Sinne, im andern: $4 + (2 + 1) = ((4 + 1) + 1) + 1 = (4 + 2) + 1$.

Ts-213 704r[1] Die rekursive Definition ist eine Regel zur Bildung von Ersetzungsregeln. Oder auch das allgemeine Glied einer Reihe von Definitionsreihen. Sie ist ein Wegweiser, der alle Ausdrücke einer bestimmten Form *einem* Wege heimweist.

Ts-213 704r[2] & 705r[1]

Man könnte – wie gesagt – den Induktionsbeweis ganz ohne die Benützung von Buchstaben (mit voller Strenge) anschreiben. Die rekursive Definition a + (b + 1) = (a + b) + 1 müßte dann als Definitionsreihe geschrieben werden. Diese Reihe verbirgt sich nämlich in der Erklärung *ihres* Gebrauchs. Man kann natürlich auch der Bequemlichkeit halber die Buchstaben in der Definition beibehalten, muß sich aber dann in der Erklärung auf ein Zeichen der Art "1, (1) + 1, ((1) + 1) + 1, u.s.w." beziehen; oder, was auf dasselbe hinausläuft, "[1, x, x + 1]". Hier darf man aber nicht etwa glauben, daß dieses Zeichen eigentlich lauten sollte "(x).[1, x, x + 1]"! – Der Witz unserer Darstellung ist ja, daß der Begriff "alle Zahlen" nur durch eine Struktur der Art "[1, x, x + 1]" gegeben ist. Die Allgemeinheit ist durch diese Struktur im Symbolismus *dargestellt* und kann nicht durch ein (x).fx *beschrieben* werden. Natürlich ist die sogenannte "rekursive Definition" keine Definition im hergebrachten Sinne des Worts, weil keine Gleichung. Denn die Gleichung "a + (b + 1) = (a + b) + 1" ist nur ein Bestandteil von ihr. Noch ist sie das logische Produkt von Gleichungen. Sie ist vielmehr ein Gesetz, wonach Gleichungen gebildet werden; wie [1, x, x + 1] keine Zahl ist, sondern ein Gesetz etc.. (Das Überraschende am Beweis von a + (b + c) = (a + b) + c ist ja, daß er aus einer Definition allein hervorgehen soll. Aber u ist keine Definition, sondern eine allgemeine Additionsregel.) Anderseits ist die Allgemeinheit dieser Regel keine andere, als die der periodischen Division

1 _ 1 _ : 3 = 0 ˙ 3.

D.h. es ist in der Regel nichts offen gelassen, ergänzungsbedürftig oder dergleichen. Und vergessen wir nicht: Das Zeichen “[1, x, x + 1]” ...N interessiert uns nicht als ein suggestiver Ausdruck des allgemeinen Gliedes der Kardinalzahlenreihe, sondern nur, sofern es mit analog gebauten Zeichen in Gegensatz tritt: N *im Gegensatz zu*, etwa, [2, x, x + 3]; kurz als Zeichen, als Instrument, in einem Kalkül. Und das Gleiche gilt natürlich von

1 _ 1 _ : 3 = 0 ˙ 3.

(Offen gelassen wird in der Regel nur ihre Anwendung.)

Ts-213 705r[2] & 706r[1] 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1, 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1, 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 ... u.s.w. 1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1, 2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1, 3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1 ... u.s.w. 1 + (3 + 1) = (1 + 3) + 1, 2 + (3 + 1) = (2 + 3) + 1, 3 + (3 + 1) = (3 + 3) + 1 ... u.s.w. *u.s.w.*

So könnte man die Regel “a + (b + 1) = (a + b) + 1” anschreiben.

a + (1↓ + 1) = (a + 1↓) + 1

a + (x + 1) (a + x) + 1

R

a + ((x + 1) + 1) ((a + x) + 1) + 1

In der Anwendung der Regel R, deren Beschreibung ja zu der Regel selbst als ein Teil ihres Zeichens gehört, läuft a der Reihe

[1, x, x + 1] entlang und das könnte natürlich durch ein beigefügtes Zeichen, etwa “a N” angegeben werden. (Die zweite und dritte Zeile der Regel R könnte man zusammen die Operation nennen, wie das zweite und dritte Glied des Zeichens N.) So ist auch die Erläuterung zum Gebrauch der rekursiven Definition u ein Teil dieser Regel selber; oder auch eine Wiederholung ebenderselben Regel in andrer Form: sowie “1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w.” das *gleiche* bedeutet, wie (d.h. übersetzbar ist in) “[1, x, x + 1]”. Die Übersetzung in die Wortsprache *erklärt* den Kalkül mit den neuen Zeichen, da wir den Kalkül mit den Zeichen der Wortsprache schon beherrschen. Das Zeichen einer Regel ist ein Zeichen eines Kalküls wie jedes andere; seine Aufgabe ist nicht, suggestiv (auf eine Anwendung hin) zu wirken, sondern, im Kalkül nach einem System gebraucht zu werden. Daher ist die äußere Form, wie die eines Pfeiles nebensächlich, wesentlich aber das System, worin das Regelzeichen verwendet wird. Das System von Gegensätzen – sozusagen – *wovon* das Zeichen sich unterscheidet, etc.. Das, was ich hier die Beschreibung der Anwendung nenne, enthält ja selbst ein “u.s.w.”, kann also nur eine Ergänzung oder ein Ersatz des Regelzeichens selbst sein.

Ts-213 706r[2] & 707r[1] & 708r[1]

Was ist nun der Gegensatz eines allgemeinen Satzes, wie a + (b + (1 + 1)) = a + ((b + 1) + 1)? Welches ist das System von Sätzen, innerhalb dessen diese Regel verneint wird? Oder auch: wie, in welcher Form, kann dieser Satz mit andern in Widerspruch geraten? Oder: welche Frage kann er beantworten, zwischen welchen Alternativen entscheiden? – Nicht zwischen einer "(n).fn" und einer "(∃n). non fn"; denn die Allgemeinheit ist dem Satz von der Regel R zugebracht. Sie kann ebensowenig in Frage gestellt werden, wie das System der Kardinalzahlen. Die Allgemeinheit einer Regel kann eo ipso nicht in Frage gestellt werden. Denken wir uns nun den allgemeinen Satz als Reihe geschrieben p11,p12,p13,... p21,p22,p23,...p31,p32,p33,......

und verneint. Wenn wir ihn als (x). f(x) auffassen, so ist er ein logisches Produkt und sein Gegenteil ist die logische Summe der Verneinungen von p11,p12, etc.. Diese Disjunktion (nun) ist mit jedem beliebigen Produkt p11&p21&p22&p12...pmn vereinbar. (Gewiß, wenn man den Satz mit einem logischen Produkt vergleicht, so wird er unendlich vielsagend und sein Gegenteil nichtssagend.) (Bedenke aber: das "u.s.w." steht im Satz nach einem Beistrich, nicht nach einem "und" ("&"). Das "u.s.w." ist kein Zeichen ihrer *Unvollständigkeit*.) Ist denn die Regel R unendlich vielsagend? wie ein ungeheuer langes logisches Produkt? Daß man die Zahlenreihe durch die Regel laufen läßt, ist eine gegebene Form; darüber wird nichts behauptet und kann nichts verneint werden. Das Durchleiten des Zahlenstromes ist ja nichts, wovon ich sagen kann, ich könne es beweisen. Beweisen kann ich nur etwas über die Form, den Model, durch den ich den Zahlenstrom leite. Kann man nun nicht sagen, daß die allgemeine Zahlenregel a + (b + c) = (a + b) + c ...A) eben die Allgemeinheit hat wie a + (1 + 1) = (a + 1) + 1 (indem diese für jede Kardinalzahl, jene für jedes Kardinalzahlentrippel gilt); und daß der rekursive Beweis von A die Regel A *rechtfertigt*? Daß wir also die Regel A geben dürfen, weil der Beweis zeigt, daß sie immer stimmt? Rechtfertigt

1 _ 1 _ : 3 = 0 ˙ 3

die Regel “11:3=0˙3,12:3=0˙33,13:3=0˙333,u.s.w.”?...P) A ist eine vollkommen verständliche Regel; so wie die Ersetzungsregel P. Eine solche Regel kann ich aber darum nicht geben, weil ich die einzelnen Fälle von A schon durch eine andere Regel berechnen kann, wie ich P nicht als Regel geben kann, wenn ich eine Regel gegeben habe, mit der ich 11:3=0,3, etc. *berechnen* kann.

Ts-213 708r[2] & 709r[1] Wie wäre es, wenn man außer den Multiplikationsregeln noch" 25 × 25 = 625" als Regel festsetzen wollte? (Ich sage nicht "25 × 25 = 624"!) – 25 × 25 = 625 hat nur Sinn, wenn die Art der Rechnung bekannt ist, die zu dieser Gleichung gehört, und hat nur Sinn in Bezug auf diese Rechnung. A hat nur Sinn mit Bezug auf die Art der Ausrechnung von A. Denn die erste Frage wäre hier eben: ist das eine Bestimmung, oder ein errechneter Satz? Denn ist 25 × 25 = 625 eine Festsetzung (Grundregel), dann bedeutet das Multiplikationszeichen etwas anderes, als es z.B. in Wirklichkeit bedeutet. (D.h. wir haben es mit einer anderen Rechnungsart zu tun.) Und ist A eine Festsetzung, dann definiert das die Addition anders, als wenn es ein errechneter Satz ist. Denn die Festsetzung ist ja dann eine Erklärung des Additionszeichens und die Rechenregeln, die A auszurechnen erlauben, eine andere Erklärung desselben Zeichens. Ich darf hier nicht vergessen, daß u, v, w nicht der Beweis von A ist, sondern nur die Form des Beweises, oder des Bewiesenen ist; u, v, w definiert also A. Darum kann ich nur sagen "25 × 25 = 625 wird bewiesen", wenn die Beweismethode fixiert ist, unabhängig von dem speziellen Beweis. Denn diese Methode *bestimmt erst* die Bedeutung von "x,y", also, *was* bewiesen wird. Insofern gehört also die Form

a _ a _ : b = c

zur Beweismethode, die den Sinn von ċ erklärt. Etwas anderes ist dann die Frage, ob ich richtig gerechnet habe. – Und so gehört u, v, w zur Beweismethode, die den Sinn des Satzes A erklärt. Die Arithmetik ist ohne eine Regel A vollständig, es fehlt ihr nichts. Der Satz A wird (nun) mit Entdeckung einer

Periodizität, mit der Konstruktion eines *neuen* Kalküls, in die Arithmetik eingeführt. Die Frage nach der Richtigkeit dieses Satzes hätte vor dieser Entdeckung (oder Konstruktion) so wenig Sinn, wie die Frage nach der Richtigkeit von "11:3=0,3,12: 3=0˙33, ... ad inf.". Nun ist die Festsetzung P verschieden vom Satz "1:3=0˙3˙" und in diesem Sinne ist "a+(b+c˙)=(a+b)+c˙" verschieden von einer Regel (Festsetzung) A. Die beiden gehören andern Kalkülen an. Der Beweis, die Rechtfertigung, einer Ersetzungsregel A ist der rekursive Beweis *nur* insofern, als er die allgemeine Form der Beweise arithmetischer Sätze von der Form A ist.

Ts-213 709r[2] Die Periodizität ist nicht das Anzeichen (Symptom) dafür, daß es so weitergeht, aber der Ausdruck "so geht es immer weiter" ist nur eine Übersetzung in eine andere Ausdrucksweise der Periodizität des Zeichens . (Gäbe es außer dem periodischen Zeichen noch etwas, wofür die Periodizität nur ein Symptom ist, so müßte dieses Etwas einen spezifischen Ausdruck haben, der nichts anderes wäre, als der vollständige Ausdruck dieses Etwas.)

Ts-213 710r[1] **37** *Ein Zeichen auf bestimmte Weise sehen, auffassen.*

Entdecken eines Aspekts eines mathematischen Ausdrucks.

*"Den Ausdruck in bestimmter Weise **sehen**".*

Hervorhebungen.

Ts-213 710r[2] & 711r[1] Ich sprach früher von Verbindungsstrichen, Unterstreichungen, etc. um die korrespondierenden, homologen, Teile der Gleichungen eines Rekursionsbeweises zu zeigen. Im Beweis

$a + (b + h1) = (a + b) + i1$

$a + (b + (c + k1)) = (a + (b + c)) + m1$

$(a + b) + (c + n1) = ((a + b) + c) + p1$

entspricht z.B. die Eins i nicht dem m sondern dem c der nächsten Gleichung; m aber entspricht nicht k, sondern dem p; und h nicht dem k sondern dem c + k etc.. Oder in:

$(h a v + i 1) + k 1 = (m a + n 1) + p 1 q 1 + (a r + 1) = (s 1 + t a) + u 1$

entspricht nicht m dem h und n dem i, sondern m dem v und n dem k; und nicht k dem p, aber p dem u und v dem r und k dem q und q dem s, aber nicht dem u, u.s.w.. Wie verhält es sich mit einer Rechnung wie:

$(5 + 3)^2 = (5 + 3)(5 + 3) = 5(5 + 3) + 3(5 + 3) = 5 \times 5 + 5 \times 3 + 3 \times 5 + 3 \times 3 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$ ...R) aus welcher wir auch eine allgemeine Regel des Quadrierens eines Binoms herauslesen können? Wir können diese Rechnung sozusagen arithmetisch und algebraisch auffassen. Und dieser Unterschied in der Auffassung träte z.B. zu Tage, wenn das Beispiel gelautet hätte $(5+2)^2=5^2+i2\times k2\times 5+k2^2$ der algebraischen Auffassung die 2 an den Stellen k einerseits, und an der Stelle i anderseits unterscheiden mußten, während sie in der arithmetischen Auffassung nicht zu unterscheiden wären. Wir betreiben eben – glaube ich – beide Male einen andern Kalkül.

Ts-213 711r[2] Nach der einen Auffassung wäre z.B. die *obige* Rechnung ein Beweis von $(7 + 8)^2 = 7^2 + 2 \times 7 \times 8 + 8^2$, nach der anderen nicht.

Ts-213 711r[3] Wir könnten ein Beispiel rechnen, um uns zu vergewissern, daß $(a + b)^2$ gleich $a^2 + b^2 + 2ab$ und nicht $a^2 + b^2 + 3ab$ ist – wenn wir es etwa vergessen hätten; aber wir könnten nicht in diesem Sinn kontrollieren, ob die Formel *allgemein* gilt. Auch *diese* Kontrolle gibt es natürlich und ich könnte in der Rechnung

$(5 + 3)^2 = \ldots = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$ nachsehen, ob die 2 im zweiten Glied ein allgemeiner Zug der Gleichung ist oder einer, der von den speziellen Zahlen des Beispiels abhängt.

Ts-213 712r[1] Ich mache $(5 + 2)^2 = 5^2 + 2 \times 2 \times 5 + 2^2$ zu einem andern Zeichen, indem ich schreibe:

$$(i\,5 + k\,2)^2 = i - 5^2 + - 2 \times k\,2 \times 5 + i\,5 + k - 2^2$$

und dadurch "andeute, welche Züge der rechten Seite von den besonderen Zahlen der linken herrühren", etc..

Ts-213 712r[2] (Ich erkenne jetzt die Wichtigkeit dieses Prozesses der Zuordnung. Er ist der Ausdruck einer neuen Betrachtung der Rechnung und daher *die* Betrachtung einer neuen Rechnung.)

Ts-213 712r[3] Ich muß, um 'A zu beweisen', erst – wie man sagen würde – die Aufmerksamkeit auf etwas ganz Bestimmtes richten. (Wie in der Division $1{,}0 : 3 = 0{,}3\dot{}1$)

Ts-213 (Und von dem, was ich dann sehe, hatte das u sozusagen noch
712r[4] gar keine Ahnung.)

Ts-213 Es verhält sich hier zwischen Allgemeinheit und Beweis der
712r[5] Allgemeinheit, wie zwischen Existenz und Existenzbeweis.

Ts-213 Wenn u, v, w bewiesen sind, muß der allgemeine Kalkül erst
712r[6] erfunden werden.

Ts-213 Es kommt uns ganz selbstverständlich vor, auf die
712r[7] & Induktionsreihe hin “$a + (b + c) = (a + b) + c$” zu schreiben;
713r[1] weil wir nicht sehen, daß wir damit einen ganz neuen Kalkül
beginnen. (Ein Kind, das gerade rechnen lernt, würde in dieser
Beziehung klarer sehen als wir.)

Ts-213 Die Hervorhebungen geschehen durch das Schema R und
713r[2] könnten so ausschauen:

$$[f1\ (1)a + (b + 1)] = [f2\ (1)(a + b) + 1]$$

$$[f1\ (c + 1)a + (b + (c + 1))] = [f1\ (c) + 1[a + (b + c)] + 1]$$

$$[f2\ (c + 1)(a + b) + (c + 1)] = [f2\ (c) + 1[(a + b) + c] + 1]$$

Es hätte aber natürlich auch genügt (d.h. wäre ein Symbol derselben Multiplizität gewesen) B anzuschreiben und dazu:

$f1x=a+(b+x)$, $f2x=(a+b)+x$. (Und dabei ist wieder zu *bedenken*, daß *jedes* Symbol – wie explicit auch immer – mißverstanden werden *kann*. –)

Ts-213 713r[3] Wer etwa zuerst darauf aufmerksam macht, daß B so gesehen werden kann, der führt ein neues Zeichen ein; ob er nun die Hervorhebungen mit B verbindet oder auch das Schema R daneben schreibt. Denn *dann* ist eben R das neue Zeichen. Oder, wenn man will, auch B zusammen mit R. Die Weise, wie er darauf aufmerksam gemacht hat, gibt das neue Zeichen.

Ts-213 713r[4] & 714r[1] Man könnte etwa sagen: Hier wurde die untere Gleichung als a + b = b + a gebraucht; und analog: hier wurde B als A gebraucht, wobei B aber gleichsam der Quere nach gelesen wurde. Oder: B wurde als A gebraucht, aber die neue Gleichung wird aus u & v& w so zusammengestellt, daß, indem man nun A aus B herausliest, man nicht u & v& w in jener Art von Verkürzung liest, in der man die Prämisse im Folgesatz vor sich hat.

Ts-213 714r[2] Was heißt es nun: "ich mache Dich drauf aufmerksam, daß hier in beiden Funktionszeichen das gleiche Argument steht (vielleicht hast Du es nicht bemerkt)"? Heißt das, daß er den Satz nicht verstanden hatte? – Und doch hat er etwas nicht bemerkt, was wesentlich zum Satz gehörte; nicht etwa (so), als hätte er eine externe Eigenschaft des Satzes nicht bemerkt. (Hier sieht man wieder, welcher Art das ist, was man "verstehen eines Satzes" nennt.)

Ts-213 714r[3] Das Bild vom längs und quer Durchlaufen ist natürlich wieder ein *logisches* Bild und darum ein ganz exakter Ausdruck eines grammatischen Verhältnisses. Es ist also nicht davon zu sagen: "das ist ein bloßes Gleichnis, wer weiß, wie es sich in der Wirklichkeit verhält".

Ts-213 714r[4] & 715r[1] *Wenn ich sagte*, das neue Zeichen mit den Hervorhebungen müsse ja doch aus dem alten ohne die Hervorhebungen abgeleitet sein, so heißt das nicht, weil ich ja das Zeichen mit den Hervorhebungen abgesehen von seiner Entstehung betrachten kann. Es stellt sich mir dann (Frege) dar, als drei Gleichungen, d.h. als die Figur dreier Gleichungen mit gewissen Unterstreichungen etc.. Daß diese Figur ganz analog der der drei Gleichungen ohne den Unterstreichungen ist, ist allerdings bedeutsam, wie es ja auch bedeutsam ist, daß die Kardinalzahlen 1 und die Rationalzahl 1 analogen Regeln unterworfen sind, aber es hindert nicht, daß wir hier ein anderes Zeichen haben. Ich treibe jetzt etwas ganz Neues mit diesem Zeichen.

Ts-213 715r[2] Verhält es sich hier nicht so, wie in dem Fall, den ich einmal annahm, daß der Kalkül der Wahrheitsfunktionen von Frege und Russell mit der Kombination non-p & non-q der Zeichen "non" und " & " *betrieben* worden wäre, ohne daß man das gemerkt hätte, und daß nun Scheffer, statt eine neue Definition zu geben, nur auf eine Eigentümlichkeit der bereits benützten Zeichen aufmerksam gemacht hätte.

Ts-213 715r[3] Man hätte immer Dividieren können, ohne je auf die Periodizität aufmerksam zu werden. Hat man sie gesehen, so hat man etwas Neues gesehn.

Ts-213 715r[4] & 716r[1] Könnte man das aber dann nicht ausdehnen und sagen: “ich hätte Zahlen miteinander multiplizieren können, ohne je auf den Spezialfall aufmerksam zu werden, in dem ich eine Zahl mit sich selbst multipliziere, und also ist x^2 nicht einfach x.x”. Die Schaffung des Zeichens “x^2” könnte, man den Ausdruck dafür nennen, daß man auf diesen Spezialfall aufmerksam geworden ist. Oder, man hätte (immer) a mit b multiplizieren und durch c dividieren können, ohne darauf aufmerksam zu werden, daß man “(a•b)c” auch “a•(bc)” schreiben kann und daß das analog a.b ist. Und weiter: das ist doch der Fall des Wilden, der die Analogie zwischen !!!!!||||| und !!!!!!|||||| noch nicht sieht, oder die, zwischen !!|| und !!!!!|||||. [a+(b+1)u=(a+b)+1]&[a+(b+(c+1))v=(a+(b+c))+1]&[(a+b)+(c+1)w= $\stackrel{\text{def}}{=}$.a+(b+c).I.(a+b)+c...U) und allgemein:

[f1(1)r=f2(1)]&[f1(c+1)v=f1(c+1)]&[f2(c+1)w=f2(c+1)].$\stackrel{\text{def}}{=}$.f1(c).I. f2(c)...V).

Ts-213 716r[2] Man könnte die Definition U sehen, ohne zu wissen, *warum* ich so *definiere*. Man könnte die Definition *sehen*, ohne ihren Witz zu verstehen. – Aber dieser Witz ist eben etwas Neues, das in ihr als spezielle Ersetzungsregel noch nicht liegt.

Ts-213 716r[3] Auch ist ““I”” natürlich kein Gleichheitszeichen, in dem Sinn wie sie in u, v und w stehen. Aber man kann leicht zeigen, daß I gewisse formale Eigenschaften mit = gemeinsam hat.

Ts-213 716r[4] & 717r[1] Es wäre – nach den angenommenen Regeln – falsch, das Gleichheitszeichen *so* zu gebrauchen:

D... $[(a + b)^2 = a.(a + b) + b.(a + b) = \ldots = a^2 + 2ab + b^2]. = . [(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2]$ wenn damit gemeint sein soll, daß die linke Seite der Beweis der rechten ist. Könnte man sich aber nicht diese Gleichung als Definition aufgefaßt denken? Wenn es z.B. immer Gebrauch gewesen wäre, statt der rechten Seite die ganze Kette anzuschreiben, und man nun die Abkürzung einführte.

Ts-213 717r[2] Freilich *kann* D als Definition aufgefaßt werden! Denn das linke Zeichen wird tatsächlich gebraucht, und warum sollte man es nicht nach dieser Übereinkunft abkürzen. Nur gebraucht man dann dieses oder jenes anders, als es jetzt üblich ist.

Ts-213 717r[3] Es ist nie genügend hervorgehoben worden, daß *ganz verschiedene* Arten von Zeichenregeln in der Form der Gleichung geschrieben werden.

Ts-213 717r[4] Die 'Definition' $x.x = x^2$ kann so aufgefaßt werden, daß sie nur erlaubt, statt des Zeichens "x.x" das Zeichen "x^2" zu setzen, also analog der Definition $1 + 1 = 2$; aber auch so (und so wird sie tatsächlich aufgefaßt), daß sie erlaubt, a^2 statt a.a, und $(a + b)^2$ statt $(a + b).(a + b)$ zu setzen; auch so, daß für das x jede beliebige Zahl eintreten kann.

Ts-213 717r[5] Wer entdeckt, daß ein Satz p aus einem von der Form $q \supset p$ & q folgt, der konstruiert ein neues Zeichen, das Zeichen dieser Regel. (Ich nehme dabei an, ein Kalkül mit p, q, $\supset$, & , sei schon früher gebraucht worden, und nun träte diese Regel hinzu und schaffe damit einen neuen Kalkül.)

Ts-213 718r[1] In der Notation “x^2” verschwindet ja wirklich die Möglichkeit, das eine der x durch eine andere Zahl zu ersetzen Ja, es wären zwei Stadien der Entdeckung (oder Konstruktion) von x^2 denkbar. Daß man etwa zuerst statt “x^2” “$x^=$” setzt, ehe es Einem nämlich auffällt, daß es das System x.x, x.x.x, etc. gibt, und daß man dann erst hierauf kommt. Ähnliches ist in der Mathematik unzählige Male vorgekommen. (Liebig bezeichnete ein Oxyd noch nicht so, daß der Sauerstoff *darin* als gleichwertes Element mit dem oxydierten auftrat. Und, so seltsam das klingt, man könnte auch mit allen uns heute bekannten Daten dem Sauerstoff durch eine ungeheuer künstliche Interpretation – d.h. grammatische Konstruktion – eine solche Ausnahmestellung verschaffen; natürlich nur in der *Form der Darstellung*.)

Ts-213 718r[2] Mit den Definitionen x.x = x^2, x.x.x = x^3 kommen nur die Zeichen “x^2” und “x^3” zur Welt (und so weit war es noch nicht nötig, Ziffern als Exponenten zu schreiben.)

Ts-213 718r[3] Der Prozeß der Generalisation schafft ein neues Zeichensystem.

Ts-213 718r[4] & 719r[1] Scheffers Entdeckung ist natürlich nicht die der Definition non-p & non-q = p | q. Diese Definition hätte Russell sehr wohl haben können, ohne doch damit das Scheffer'sche System zu besitzen, und anderseits hätte Scheffer auch ohne diese Definition sein System *begründen* können. Sein System ist ganz in dem Zeichen "non-p & non-p" für "non-p" und "non (non-p & non-q) & non (non-p & non-q)" für "p⌄q" enthalten und "p | q" gestattet nur eine *Abkürzung*. Ja, man kann sagen, daß einer sehr wohl hätte das Zeichen "non (non-p & non-q) & non (non-p & non-q)" für "p⌄q" kennen können, ohne das System p | q . | . p | q in ihm zu erkennen.

Ts-213 719r[2] Machen wir die Sache noch klarer durch die Annahme der beiden Frege'schen Urzeichen "non" und " & ", so bleibt hier die Entdeckung bestehen, wenn auch die Definitionen geschrieben werden, non-p & non-p = non-p und non (non-p & non-p) & non (non-q & non-q) = p & q. Hier hat sich an den Urzeichen scheinbar gar nichts geändert.

Ts-213 719r[3] Man könnte sich auch denken, daß jemand die ganze Frege'sche oder Russell'sche Logik schon in diesem System hingeschrieben hätte und doch, wie Frege, "non" und " & " seine Urzeichen nennte, weil er das andere System in seinen Sätzen nicht sähe.

Ts-213 719r[4] Es ist klar, daß die Entdeckung des Scheffer'schen Systems in non-p & non-p = non-p und non.neg(non-p & non-p) & non (non-q & non-q) = = p & q der Entdeckung entspricht, daß $x^2+ax+a^2 4$ ein Spezialfall von $a^2 + 2ab + b^2$ ist.

Ts-213 719r[5] Daß etwas so angesehen werden kann, sieht man erst, wenn es so angesehen ist. Daß ein Aspekt möglich ist, sieht man erst, wenn er da ist.

Ts-213 719r[6] & 720r[1] Das klingt, als könnte die Scheffer'sche Entdeckung gar nicht in Zeichen dargestellt werden (periodische Division). Aber das liegt daran, daß man die *Anwendung* des Zeichens in seiner Einführung nicht voraus nehmen kann (die Regel ist und bleibt ein Zeichen und von ihrer Anwendung getrennt).

Ts-213 720r[2] Die allgemeine Regel für den Induktionsbeweis kann ich natürlich nur dann anwenden, wenn ich die Substitution entdecke, durch die sie anwendbar wird. So wäre es möglich, daß einer die Gleichungen

$(a + 1) + 1 = (a + 1) + 1$

$1 + (a + 1) = (1 + a) + 1$ sähe, ohne auf die Substitution

$a = x, F 1 (x) = x + 1, F 1 (x + 1) = (x + 1) + 1, F 2 (x + 1) = 1 + (x + 1) , F 2 (x) = 1 + x$

zu kommen.

Ts-213 720r[3] Wenn ich übrigens sage, ich *verstehe* die Gleichungen als besondern Fall jener Regel, so muß doch das Verständnis das sein, was sich in der Erklärung der Beziehung zwischen der Regel und den Gleichungen zeigt, also, was wir durch die Substitutionen ausdrücken. Sehe ich diese nicht als einen Ausdruck dessen an, was ich verstehe, dann gibt es keinen; aber dann hat es auch keinen Sinn, von einem Verständnis zu reden, zu sagen, ich verstehe etwas Bestimmtes. Denn nur dort hat es Sinn, vom Verstehen zu reden, wo wir *eines* verstehen, im Gegensatz zu etwas anderem. Und *dies* drücken eben Zeichen aus. Ja, das Sehen der internen Beziehung kann nur wieder das Sehen von etwas sein, das sich beschreiben läßt, wovon man sagen kann, "ich sehe, daß es sich so verhält", also wirklich etwas von der Natur der Zeichen der Zuordnung (wie Verbindungsstriche, Klammern, Substitutionen, etc.). Und alles andere kann nur in der Anwendung des Zeichens der allgemeinen Regel in einem besonderen Fall liegen.

Ts-213 721r[1] Es ist, als entdeckten wir an gewissen Körpern, die vor uns liegen, Flächen, *mit* denen sie aneinandergereiht werden können. Oder vielmehr, als entdeckten wir, daß sie mit den und den Flächen, die wir auch schon früher gekannt hatten, aneinandergereiht werden können. Es ist das die Art der Lösung vieler Spiele oder Rätselfragen.

Ts-213 721r[2] Der, welcher die Periodizität entdeckt, erfindet einen neuen Kalkül. Die Frage ist, wie unterscheidet sich der Kalkül mit der periodischen Division von dem Kalkül, der die Periodizität nicht kennt?

Ts-213 721r[3] (Wir hätten einen Kalkül mit Würfeln *betreiben* können, ohne je auf die Idee zu kommen, sie zu Prismen aneinanderzureihen.)

Ts-213 722r[1]

38 ***Der Induktionsbeweis, Arithmetik und Algebra.***

Ts-213 722r[3] Aber eines ist klar: Wenn uns der Rekursionsbeweis das Recht gibt, algebraisch zu rechnen, dann auch der arithmetische Beweis L.

Ts-213 722r[4] & 723r[1] Auch so: Der Rekursionsbeweis hat es – offenbar – wesentlich mit Zahlen zu tun. Aber was gehen mich die an, wenn ich rein algebraisch operieren will. Oder: Der Rekursionsbeweis ist nur dann zu gebrauchen, wenn ich mit ihm den Übergang in einer Zahlenrechnung rechtfertigen will. Man könnte nun aber fragen: Also brauchen wir (***beide***:) *sowohl* den Induktionsbeweis *als auch* das assoziative Gesetz, da ja dieses Übergänge der Zahlenrechnung nicht begründen kann, und jener nicht Transformationen in der Algebra?

Ts-213 723r[2] Ja, hat man (denn) vor dem Skolem'schen Beweisen das assoziative Gesetz – z.B. – hingenommen, ohne den entsprechenden Übergang in einer Zahlenrechnung durch Rechnung *begründen* zu können? D.h.: konnte man vorher $5 + (4 + 3) = (5 + 4) + 3$ nicht ausrechnen, sondern hat es als *Axiom betrachtet*?

Ts-213 723r[3] Wenn ich sage, die periodische Zahlenrechnung beweist den Satz, der mich zu jenen Übergängen berechtigt, wie hätte dieser Satz gelautet, wenn man ihn als Axiom angenommen und nicht bewiesen hätte? Wie hätte der Satz gelautet, nach welchem ich $5 + (7 + 9) = (5 + 7) + 9$ gesetzt hätte, ohne es beweisen zu können? Es ist doch offenbar, daß es so einen Satz nie gegeben hat.

Ts-213 723r[4] Könnte man auch so sagen: In der Arithmetik wird das assoziative Gesetz überhaupt nicht gebraucht, sondern da arbeiten wir (nur) mit besonderen Zahlenrechnungen. Und die Algebra, auch wenn sie sich der arithmetischen *Notation* bedient, ist ein ganz anderer Kalkül, und nicht aus dem arithmetischen abzuleiten.

Ts-213 723r[5] & 724r[1] Auf die Frage “ist $5 \times 4 = 20$?” könnte man antworten: “sehen wir nach, ob es mit den Grundregeln der Arithmetik übereinstimmt”; und entsprechend könnte ich sagen: sehen wir nach, ob A mit den Grundregeln übereinstimmt. Aber mit welchen? Nun, wohl mit alpha.

Ts-213 724r[2] Aber zwischen u und A liegt eben die Notwendigkeit einer Festsetzung darüber, was wir hier “Übereinstimmung” nennen wollen.

Ts-213 724r[3] D.h. zwischen u und A liegt die Kluft von Arithmetik und Algebra, und wenn B als Beweis von A gelten soll, so muß diese (Kluft) durch eine Bestimmung überbrückt werden.

Ts-213 724r[4] Nun ist ganz klar, daß wir Gebrauch von so einer Idee der Übereinstimmung machen, wenn wir uns nur z.B. rasch ein Zahlenbeispiel ausrechnen, um dadurch die Richtigkeit eines algebraischen Satzes zu kontrollieren. Und in diesem Sinne könnte ich z.B. rechnen 25×16_25150400¯||16×25_3280400¯ und sagen: “ja, ja, es stimmt, a × b ist gleich b × a” – wenn ich mir vorstelle, daß ich das vergessen hätte.

Ts-213 724r[5] & 725r[1] A, als Regel für das algebraische Rechnen, kann nicht rekursiv bewiesen werden; das würde man besonders klar sehen, wenn man den “rekursiven Beweis” als eine Reihe arithmetischer Ausdrücke hinschriebe. Denkt man sie sich hingeschrieben (d.h. ein Reihenstück mit dem “u.s.w.”), aber ohne die Absicht irgend etwas zu “beweisen”, und nun fragte Einer: “beweist dies a + (b + c) = (a + b) + c?”, so würden wir erstaunt zurückfragen: “wie kann es denn so was beweisen? in der Reihe kommen doch nur Ziffern und keine Buchstaben vor!” – Wohl aber könnte man nun sagen: Wenn ich für das Buchstabenrechnen die Regel A einführe, so kommt dieser Kalkül dadurch in einem bestimmten Sinn in Einklang mit dem Kalkül der Kardinalzahlen, wie ich ihn durch das Gesetz der Additionsregeln (rekursive Definition a + (b + 1) = (a + b) + 1) festgelegt habe.

Ts-213 727r[1]

39 *Allgemeinheit in der Arithmetik*

Ts-213 726r[1] _****Das Unendliche in der Mathematik** **Extensive Auffassung**_

Ts-213 727r[2] & 728r[1]

“Welchen Sinn hat ein Satz der Art ‘$(\exists n).3 + n = 7$’?” Man ist hier in einer seltsamen Schwierigkeit: einerseits empfindet man es als Problem, daß der Satz die Wahl zwischen unendlich vielen Werten von n hat, andrerseits scheint uns der Sinn des Satzes in sich gesichert und nur für uns (*etwa*) noch zu erforschen, da wir doch “wissen, was ‘$(\exists x).fx$’ bedeutet”. Wenn Einer sagte, er wisse nicht, *was* “$(\exists n).\ 3 + n = 7$” *bedeute,* so würde man ihm antworten: “aber Du weißt doch, was dieser Satz sagt: $3 + 0 = 7 \ .\vee.\ 3 + 1 = 7 \ .\vee.\ 3 + 2 = 7$ und so weiter!” Aber darauf kann man antworten: “Ganz richtig – der Satz ist also keine logische Summe, denn die endet nicht mit ‘und so weiter’ und das, worüber ich nicht klar bin, ist eben diese Satzform ‘$f(0) \vee f(1) \vee f(2) \vee$ u.s.w.’ – und Du hast mir nur statt der ersten unverständlichen Satzform eine zweite gegeben und zwar mit dem Schein, als gäbest Du mir etwas altbekanntes, nämlich eine Disjunktion.” Wenn wir nämlich meinen, daß wir doch unbedingt “($\exists$n) etc.” verstehen, so denken wir zur Rechtfertigung an andre Fälle des Gebrauchs der Notation “($\exists$...)...”, beziehungsweise der Ausdrucksform “es gibt ...” unserer Wortsprache. Darauf kann man aber nur sagen: Du *vergleichst* also den Satz “($\exists$n)...” mit jenem Satz “es gibt ein Haus in dieser Stadt, welches ...”, oder “es gibt zwei Fremdwörter auf dieser Seite”. Aber mit dem Vorkommen der Worte “es gibt” in diesen Sätzen ist ja die Grammatik dieser Allgemeinheit noch nicht bestimmt. Und dieses Vorkommen weist auf nichts andres hin, als eine gewisse Analogie in den Regeln. Wir werden also ruhig diese Regeln von vorne untersuchen können, ohne uns von der Bedeutung von “($\exists$...)...” in andern Fällen stören zu lassen.

Ts-213 728r[2] & 729r[1]

“Alle Zahlen haben vielleicht die Eigenschaft P”. Wieder ist die Frage: was ist die Grammatik dieses allgemeinen Satzes? Denn damit ist uns nicht gedient, daß wir die Verwendung des Ausdrucks “alle ...” in andern grammatischen Systemen kennen. Sagt man: “Du weißt doch, was es heißt! es heißt: P(0) & P(1) & P(2) u.s.w.”, so ist damit wieder nichts erklärt; außer, daß der Satz *kein* logisches Produkt ist. Und man wird, um die Grammatik des Satzes verstehen zu lernen, fragen: Wie gebraucht man diesen Satz? Was sieht man als Kriterium seiner Wahrheit an? Was ist seine Verifikation? – Wenn keine Methode vorgesehen ist, um zu entscheiden, ob der Satz wahr oder falsch ist, ist er ja zwecklos und d.h. sinnlos. Aber hier kommen wir nun zur Illusion, daß allerdings eine solche Methode der Verifikation vorgesehen ist, die sich nur einer menschlichen Schwäche wegen nicht durchführen läßt. Diese Verifikation besteht darin, daß man alle (unendlich vielen) Glieder des Produktes P(O) & P(1) & P(2) ... auf ihre Richtigkeit prüft. Hier wird logische mit physischer Möglichkeit verwechselt. Denn dem Ausdruck “alle Glieder des unendlichen Produktes auf ihre Richtigkeit prüfen” glaubt man Sinn gegeben zu haben, weil man das Wort “unendlich viele” für die Bezeichnung einer riesig großen Zahl hält. Und bei der “Unmöglichkeit, die unendliche Zahl von Sätzen zu prüfen” schwebt uns die Unmöglichkeit vor, eine sehr große Anzahl von Sätzen zu prüfen, wenn wir etwa nicht die nötige Zeit haben. Erinnere Dich daran, daß, in dem Sinn, in welchem es unmöglich ist, eine unendliche Anzahl von Sätzen zu prüfen, es auch unmöglich ist, das zu versuchen. – Wenn wir uns mit den Worten “Du weißt doch, was ‘alle ...’ heißt” auf die Fälle berufen, in welchen diese Redeweise gebraucht wird, so kann es uns doch nicht gleichgültig sein, wenn wir einen Unterschied zwischen diesen Fällen und dem Fall sehen, für welchen der Gebrauch der Worte gerechtfertigt werden sollte. – (*Gewiß*), wir wissen, was heißt, “eine Anzahl von Sätzen auf ihre Richtigkeit prüfen” und gerade auf dieses Verständnis berufen wir uns ja, wenn wir verlangen, man solle nun auch den Ausdruck “unendlich viele Sätze ...” verstehen. Aber ist denn der Sinn des ersten Ausdrucks von der Erfahrung, die mit ihm verknüpft ist, unabhängig? Und gerade diese Erfahrungen fehlen ja in der Verwendung (dem Kalkül) des zweiten Ausdrucks; es sei denn, daß ihm solche Erfahrungen zugeordnet werden, die von den ersten grundverschieden sind.

Ts-213 729r[2] & 730r[1] Ramsey schlug einst vor, den Satz, daß unendlich viele Gegenstände eine Funktion f(x) befriedigen, durch die Verneinung sämtlicher Sätze

non (∃x).fx

(∃x).fx & non (∃x,y).fx & fy

(∃x,y).fx & fy . & . non (∃x,y,z).fx & fy & fz

u.s.w. auszudrücken. – Aber diese Verneinung ergäbe die Reihe

(∃x).fx

(∃x,y).fx & fy

(∃x,y,z) etc. etc..

Aber diese Reihe ist wieder ganz überflüssig: denn erstens enthält ja der zuletzt angeschriebene Satz alle vorhergehenden und zweitens nützt uns dieser auch nichts, da er ja nicht von einer unendlichen Anzahl von Gegenständen handelt. Die Reihe kommt also in Wirklichkeit auf einen Satz hinaus:

"(∃x,y,z... ad inf.).fx & fz... ad inf.". Und mit diesem Zeichen können wir gar nichts anfangen, wenn wir nicht seine Grammatik kennen. Eines aber ist klar: wir haben es nicht mit einem Zeichen von der Form "(∃x,y,z).fx & fy & fz" zu tun; wohl aber mit einem Zeichen, dessen Ähnlichkeit mit *diesem* dazu *gemacht* scheint, uns irrezuführen.

Ts-213 730r[2] & 731r[1] "m größer als n" kann ich allerdings definieren als $(\exists x).\ m - n = x$, aber dadurch habe ich es in keiner Weise analysiert. Man denkt nämlich, daß durch die Verwendung des Symbolismus "(∃...)..." eine Verbindung hergestellt ist zwischen "m größer als n" und andern Sätzen von der Form "es gibt ...", vergißt aber, daß damit zwar eine gewisse Analogie betont ist, aber nicht mehr; da das Zeichen "(∃...)..." in unzählig vielen verschiedenen 'Spielen' gebraucht wird. (Wie es eine 'Dame' im Schach- und im Damespiel gibt.) Wir müssen also erst die Regeln wissen, wie es *hier* verwendet wird. Und da wird sofort klar, daß diese Regeln hier mit den Regeln für die Subtraktion zusammenhängen. Denn, wenn wir – wie gewöhnlich – fragen: "wie weiß ich – d.h. woraus geht es hervor –, daß es eine Zahl x gibt, die der Bedingung $m - n = x$ genügt", so kommen darauf die Regeln für die Subtraktion zur Antwort. Und nun sehen wir, daß wir mit unserer Definition nicht viel gewonnen haben. Ja, wir hätten gleich als Erklärung von 'm größer als n' die Regeln angeben können, nach welchen man so einen Satz – z.B. im Falle '32 größer als 17' – überprüft.

Ts-213 731r[2] Wenn ich sage: "für jedes n gibt es ein d, das die Funktion kleiner macht als n", so muß ich mich auf ein allgemeines arithmetisches Kriterium beziehen, das anzeigt, wann F(d) kleiner ist als n.

Ts-213 731r[3] Wenn ich wesentlich keine Zahl hinschreiben kann, ohne ein Zahlensystem, so muß sich das auch in der allgemeinen Behandlung der Zahl wiederspiegeln. Das Zahlensystem ist nicht etwas Minderwertiges – wie eine Russische Rechenmaschine – das nur für Volksschüler Interesse hat, während die höhere, allgemeine Betrachtung davon absehen kann.

Ts-213 731r[4] Es geht auch nichts von der Allgemeinheit der Betrachtung verloren, wenn ich die Regeln, die die Richtigkeit und Falschheit von ‘m größer als n’ (also seinen Sinn) bestimmen, etwa im Dezimalsystem gebe. *Ein* System brauche ich ja doch und die Allgemeinheit ist dadurch gewahrt, daß man die Regeln gibt, nach denen von einem System in ein anderes übersetzt wird.

Ts-213 731r[5] Ein Beweis in der Mathematik ist allgemein, wenn er allgemein anwendbar ist. Eine andere Allgemeinheit kann nicht im Namen der Strenge gefordert werden. *Jeder* Beweis stützt sich auf *bestimmte* Zeichen, auf eine bestimmte Zeichengebung. Es kann nur die eine Art *der Allgemeinheit* eleganter erschienen, als die andere. ((Dazu die Verwendung des Dezimalsystems in Beweisen über δ und η.))

Ts-213 732r[1] “Streng” heißt: klar.

Ts-213 732r[2] & 733r[1] "Den mathematischen Satz kann man sich vorstellen, als ein Lebewesen, das selbst weiß, ob es wahr oder falsch ist. (Zum Unterschied von den empirischen Sätzen. Der mathematische Satz weiß selbst, daß er wahr, oder daß er falsch ist. Wenn er von allen Zahlen handelt, so muß er auch schon alle Zahlen übersehen. Wie der Sinn, so muß auch seine Wahrheit oder Falschheit in ihm liegen."

Ts-213 733r[2] "Es ist, als wäre die Allgemeinheit eines Satzes '(n).P(n)' nur eine Anweisung auf die eigentliche, wirkliche, mathematische Allgemeinheit eines Satzes. Gleichsam nur eine Beschreibung der Allgemeinheit, nicht diese selbst. Als bilde der Satz nur auf rein äußerliche Weise ein Zeichen, dem erst von innen Sinn gegeben werden muß."

Ts-213 733r[3] "Wir fühlen: Die Allgemeinheit, die die mathematische Behauptung hat, ist anders als die Allgemeinheit des Satzes, der bewiesen ist."

Ts-213 733r[4] "Man könnte sagen: ein mathematischer Satz ist der Hinweis auf einen Beweis."

Ts-213 733r[5] Wie wäre es, wenn ein Satz seinen Sinn selber nicht ganz erfaßte. Wenn er sich quasi selber zu hoch wäre? – Und das nehmen eigentlich die Logiker an.

Ts-213 733r[6] & 734r[1] Den Satz, der von allen Zahlen handelt, kann man sich nicht durch ein endloses Schreiten verifiziert denken, denn, wenn das Schreiten endlos ist, so führt es ja eben nicht zu einem Ziel. Denken wir uns eine unendlich lange Baumreihe, und ihr entlang, damit wir sie inspizieren können, einen Weg. Sehr gut, so muß dieser Weg endlos sein. Aber wenn er endlos ist, so heißt das, daß man ihn nicht zu Ende gehen kann. D.h., er bringt mich *nicht* dazu, die Reihe zu übersehen. Der endlose Weg hat nämlich nicht ein "unendlich fernes" Ende, sondern kein Ende.

Ts-213 734r[2] Man kann auch nicht sagen: "Der Satz kann alle Zahlen nicht sukzessive erfassen, so muß er sie durch den Begriff fassen", – als ob das faute de mieux so wäre: "Weil er es *so* nicht kann, muß er es auf andre Weise tun". Aber ein sukzessives Erfassen ist schon möglich, nur führt es eben nicht zur Gesamtheit. Diese liegt: *nicht* auf dem Weg, den wir schrittweise gehn, – und nicht: am unendlich fernen Ende dieses Weges. (Das alles heißt nur – "P(0) & P(1) & P(2) & u.s.w." ist nicht das Zeichen eines logischen Produkts.)

Ts-213 734r[3] & 735r[1]

“Alle Zahlen können nicht *zufällig* eine Eigenschaft P besitzen; sondern nur ihrem Wesen (*als Zahlen*) nach.” – Der Satz “die Menschen, welche rote Nasen haben, sind gutmütig” hat auch dann nicht denselben Sinn wie der Satz “die Menschen, welche Wein trinken, sind gutmütig”, wenn die Menschen, welche rote Nasen haben, eben die sind, die Wein trinken. Dagegen: wenn die Zahlen m, n, o der Umfang eines mathematischen Begriffs sind, so daß also fm & fn & fo der Fall ist, dann hat der Satz, welcher sagt, daß die Zahlen, die f befriedigen, die Eigenschaft P haben, den gleichen Sinn wie “P(m) & P(n) & P(o)”. Denn die beiden Sätze “f(m) & f(n) & f(o)” und “P(m) & P(n) & P(o)” lassen sich, ohne daß wir dabei den Bereich der Grammatik verlassen, in einander umformen. Sehen wir uns nun den Satz an: “alle n Zahlen, welche der Bedingung F(x) genügen, haben zufälligerweise die Eigenschaft P.” Da kommt es drauf an, ob die Bedingung F(x) eine mathematische ist. Ist sie das, nun dann kann ich ja aus F(x) P(x) ableiten, wenn auch über die Disjunktion der n Werte von F(x). (Denn hier gibt es eben eine Disjunktion.) Hier werde ich also nicht von einem Zufall reden. – Ist die Bedingung eine nicht-mathematische, so wird man dagegen vom Zufall reden können. Z.B. wenn ich sage: alle Zahlen, die ich heute auf den Omnibussen gelesen habe, waren zufällig Primzahlen. (Dagegen kann man natürlich nicht sagen: “die Zahlen 17, 3, 5, 31, sind zufällig Primzahlen”, ebensowenig wie: “die Zahl 3 ist zufällig eine Primzahl”.) “Zufällig” ist wohl der Gegensatz von “allgemein ableitbar”; aber man kann sagen: der Satz “17, 3, 5, 31 sind Primzahlen” ist allgemein ableitbar – so sonderbar das klingt –, wie auch der Satz 2 + 3 = 5. Sehen wir nun zu unserm ersten Satz zurück, so fragen wir wieder: Wie soll denn der Satz “alle Zahlen haben die Eigenschaft P” gemeint sein? wie soll man ihn denn wissen können? denn diese Festsetzung gehört ja zur Festsetzung seines Sinnes! Das Wort “zufällig” deutet doch auf eine Verifikation durch sukzessive Versuche und dem widerspricht, daß wir nicht von einer endlichen Zahlenreihe reden.

Ts-213 735r[2] In der Mathematik sind Beschreibung und Gegenstand äquivalent. “Die fünfte Zahl der Zahlenreihe hat diese Eigenschaften” sagt *dasselbe* wie “5 hat diese Eigenschaften”. Die Eigenschaften eines Hauses *folgen* nicht aus seiner Stellung in einer Häuserreihe; dagegen sind die Eigenschaften einer Zahl die Eigenschaften einer Stellung.

Ts-213 735r[3] & 736r[1] Man kann sagen, daß die Eigenschaften einer bestimmten Zahl nicht vorauszusehen sind. Man sieht sie erst, wenn man zu ihr kommt. Das Allgemeine ist die Wiederholung einer Operation. Jedes Stadium dieser Wiederholung hat seine Individualität. Nun ist es nicht etwa so, daß ich durch die Operation von einer Individualität zur andern fortschreite. So daß die Operation das Mittel wäre, um von einer zur andern zu kommen. Gleichsam das Vehikel, das bei jeder Zahl anhält, die man nun betrachten kann. Sondern die dreimalige Operation +1 erzeugt und *ist* die Zahl drei. (Im Kalkül sind Prozeß und Resultat einander äquivalent.) Ehe ich aber nun von "allen diesen Individualitäten", oder "der Gesamtheit dieser Individualitäten" sprechen wollte, müßte, ich mir *gut* überlegen, welche Bestimmungen ich in diesem Falle für den Gebrauch der Worte "alle" und "Gesamtheit" gelten lassen will.

Ts-213 736r[2] Es ist schwer, sich von der extensiven Auffassung ganz frei zu machen: So denkt man: "Ja, aber es muß doch eine innere Beziehung zwischen $x^3 + y^3$ und z^3 bestehen, da doch (*zum mindesten*) die Extensionen dieser Ausdrücke, wenn ich sie nur kennte, das Resultat einer solchen Beziehung darstellen müßten". Etwa: "Es müssen doch entweder *wesentlich alle* Zahlen die Eigenschaft P haben, oder nicht; da doch *alle* Zahlen die Eigenschaften haben, oder nicht; wenn ich auch nicht wissen kann, welches der Fall ist."

Ts-213 736r[3] "Wenn ich die Zahlenreihe durchlaufe, so komme ich entweder einmal zu einer Zahl von der Eigenschaft P, oder niemals." Der Ausdruck "die Zahlenreihe durchlaufen" ist Unsinn; außer es wird ihm ein Sinn *gegeben*, der aber die vermutete Analogie mit dem "durchlaufen der Zahlen von 1 bis 100" aufhebt.

Ts-213 736r[4] & 737r[1] Wenn Brouwer die Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik bekämpft, so hat er Recht, soweit er sich gegen ein *Vorgehen* richtet, das den Beweisen empirischer Sätze analog ist. Man kann in der Mathematik nie etwas auf *die* Art beweisen: Ich habe 2 Äpfel auf dem Tisch liegen gesehen; jetzt ist nur *einer* da; also hat A einen Apfel gegessen. – Man kann nämlich nicht durch Ausschließung gewisser Möglichkeiten eine neue beweisen, die nicht, durch die von uns gegebenen Regeln, schon in jener Ausschließung liegt. Insofern gibt es in der Mathematik keine echten Alternativen. Wäre die Mathematik die Untersuchung von erfahrungsmäßig gegebenen Aggregaten, so könnte man durch die Ausschließung eines Teils das Nichtausgeschlossene beschreiben, und hier wäre der nicht ausgeschlossene Teil der Ausschließung des andern nicht äquivalent.

Ts-213 737r[2] Die Betrachtungsweise: daß ein logisches Gesetz, weil es für ein Gebiet der Mathematik gilt, nicht notwendig auch für ein anderes gelten müsse, ist in der Mathematik gar nicht am Platz, ihrem Wesen ganz entgegen. Obwohl manche Autoren gerade das für besonders subtil halten, und entgegen den Vorurteilen.

Ts-213 737r[3] Wie es sich nun mit derjenigen Allgemeinheit in der Mathematik verhält, deren Sätze nicht von “allen Kardinalzahlen”, sondern, z.B. von “allen reellen Zahlen” handeln, kann man nur erkennen, wenn man diese Sätze und ihre Beweise untersucht.

Ts-213 737r[4] Wie ein Satz verifiziert wird, das sagt er. Vergleiche die Allgemeinheit in der Arithmetik mit der Allgemeinheit von nicht arithmetischen Sätzen. Sie wird anders verifiziert und ist darum eine andere. Die Verifikation ist nicht *bloß* ein Anzeichen der Wahrheit, sondern sie bestimmt den Sinn des Satzes. (Einstein: wie eine Größe gemessen wird, das ist sie.)

Ts-213 738r[1] 40 *Zur Mengenlehre*

Ts-213 738r[2] “Die rationalen Punkte liegen auf der Zahlengeraden nahe beisammen”: irreführendes Bild.

Ts-213 738r[3] Ist ein Raum denkbar, der nur alle rationalen Punkte, aber nicht die irrationalen enthält? Wäre etwa diese Struktur für unsern Raum zu ungenau? Weil wir zu den irrationalen Punkten dann (*immer*) nur annäherungsweise gelangen könnten? Unser Netz wäre also nicht fein genug? Nein. Die Gesetze gingen uns ab, nicht die Extensionen.

Ts-213 738r[4] Ist ein Raum denkbar, der nur alle rationalen aber nicht die irrationalen Punkte enthält? Und das heißt nur: Sind die irrationalen Zahlen nicht in den rationalen präjudiziert? So wenig, wie das Schachspiel im Damespiel. Die irrationalen Zahlen füllen keine Lücke aus, die die rationalen offen lassen.

Ts-213 739r[1] Man wundert sich darüber, daß “zwischen den überall dicht liegenden rationalen Punkten” noch die irrationalen Platz haben. (Welche Verdummung!) Was zeigt eine Konstruktion, wie die des Punktes $\sqrt{2}$? Zeigt sie diesen Punkt, wie er doch noch zwischen den rationalen Punkten Platz hat? Sie zeigt, daß der durch die Konstruktion *erzeugte* Punkt, nämlich als Punkt *dieser* Konstruktion, *nicht rational* ist. – Und was entspricht dieser Konstruktion in der Arithmetik? Etwa eine Zahl, die sich *doch* noch zwischen die rationalen Zahlen hineinzwängt? Ein Gesetz, das nicht vom Wesen der rationalen Zahl ist.

Ts-213 739r[2] Die Erklärung des Dedekind’schen Schnittes gibt vor, sie wäre anschaulich, wenn *sie sagt*: Es gibt 3 Fälle: entweder hat die Klasse R ein erstes Glied und L kein letztes, etc.. In Wahrheit lassen sich 2 dieser 3 Fälle gar nicht vorstellen. Außer, wenn die Wörter “Klasse”, “erstes Glied”, “letztes Glied” gänzlich ihre *anscheinend* beibehaltenen alltäglichen Bedeutungen wechseln. Wenn man nämlich – starr darüber, daß Einer von einer Klasse von Punkten redet, die rechts von einem gegebenen Punkt liegt und keinen Anfang hat – sagt: gib uns doch ein Beispiel so einer Klasse, – so zieht er das von den rationalen Zahlen hervor! Aber hier ist ja gar keine Klasse von Punkten im *alltäglichen* Sinn!

Ts-213 739r[3] Der Schnittpunkt zweier Kurven ist nicht das gemeinsame Glied zweier Klassen von Punkten, sondern der Durchschnitt zweier Gesetze. Es sei denn, daß man die erste Ausdrucksweise, sehr irreführend, durch die zweite definiert.

Ts-213 739r[4] & 740r[1] Es mag nach dem Vielen, was ich schon darüber gesagt habe, trivial klingen, wenn ich jetzt sage, daß der Fehler in der mengentheoretischen Betrachtungsweise immer wieder darin liegt, Gesetze und Aufzählungen (Listen) als wesentlich Eins zu betrachten und sie aneinander zu reihen; da, wo das eine nicht ausreicht, das Andere seinen Platz ausfüllt.

Ts-213 740r[2] Das Symbol für eine Klasse ist eine Liste.

Ts-213 740r[3] Die Schwierigkeit liegt auch hier wieder in der Bildung mathematischer Scheinbegriffe. Wenn man z.B. sagt: Man kann die Kardinalzahlen ihrer Größe nach in eine Folge ordnen, aber nicht die rationalen Zahlen, so ist darin unbewußt die Voraussetzung enthalten, als hätte der Begriff des Ordnens der Größe nach für *die rationalen Zahlen* doch einen Sinn, und als erwiese sich dieses Ordnen nun beim Versuch als unmöglich (was voraussetzt, das der *Versuch* denkbar ist). – So denkt man, ist es möglich zu versuchen *die reellen Zahlen* (als wäre es ein Begriff wie etwa 'Äpfel auf diesem Tisch') in eine Reihe zu ordnen, und es erwiese sich nun als undurchführbar.

Ts-213 740r[4] Wenn der Mengenkalkül sich in seiner Ausdrucksweise soviel als möglich an die Ausdrucksweise des Kalküls der Kardinalzahlen anlehnt, so ist das wohl in *mancher Hinsicht* belehrend, weil es auf gewisse formale Ähnlichkeiten hinweist, aber auch irreführend, wenn er gleichsam noch etwas ein Messer nennt, das weder Griff noch Klinge mehr hat. (Lichtenberg.)

Ts-213 740r[5] (Die Eleganz eines mathematischen Beweises kann nur den einen Sinn haben, gewisse Analogien besonders stark zu Tage treten zu lassen, wenn das gerade erwünscht ist, sonst entspringt sie dem Stumpfsinn und hat nur die eine Wirkung, das zu verhüllen, was klar und offenbar sein sollte. Das stumpfsinnige Streben nach Eleganz ist eine Hauptursache, warum die Mathematiker ihre eigenen Operationen nicht verstehen, oder es entspringt die Verständnislosigkeit und jenes Streben einer gemeinsamen Quelle.)

Ts-213 741r[1] Die Menschen sind im Netz der Sprache gefangen und wissen es nicht.

Ts-213 741r[2] "Es gibt einen Punkt, in dem die beiden Kurven einander schneiden." Wie weißt Du das? Wenn Du es mir sagst, werde ich wissen, was der Satz "es gibt ..." für einen Sinn hat.

Ts-213 741r[3] Wenn man wissen will, was der Ausdruck “das Maximum einer Kurve” bedeutet, so frage man sich: wie findet man es? – Was anders gefunden wird, ist etwas anderes. Man definiert es als den Punkt der Kurve, der höher liegt als alle andern, und hat dabei wieder die Idee, daß es nur unsere menschliche Schwäche ist, die uns verhindert, alle Punkte der Kurve einzeln durchzugehen und den höchsten unter ihnen auszuwählen. Und dies führt zu der Meinung, daß der höchste Punkt unter einer endlichen Anzahl von Punkten wesentlich dasselbe ist, wie der höchste Punkt einer Kurve, und daß man hier eben auf zwei verschiedene Methoden das Gleiche findet, wie man auf verschiedene Weise feststellt, daß jemand im Nebenzimmer ist: anders etwa, wenn die Tür geschlossen ist und wir zu schwach sind, sie zu öffnen, und anders, wenn wir hinein können. Aber, wie gesagt, menschliche Schwäche liegt dort nicht vor, wo die scheinbare Beschreibung der Handlung “die wir nicht ausführen können” sinnlos ist. Es würde freilich nichts schaden, ja sehr interessant sein, die Analogie zwischen dem Maximum einer Kurve und dem Maximum (in anderm Sinne) einer Klasse von Punkten zu sehen, so lange uns die Analogie nicht das Vorurteil eingibt, es liege im Grunde beide Male dasselbe vor.

Ts-213 742r[1] Es ist der gleiche Fehler unserer Syntax, der den geometrischen Satz “die Strecke läßt sich durch einen Punkt in zwei Teile teilen” als die gleiche Form darstellt, wie den Satz: “die Strecke ist unbegrenzt teilbar”; so daß man scheinbar in beiden Fällen sagen kann: “nehmen wir an, die mögliche Teilung sei ausgeführt”. “In zwei Teile teilbar” und “unbegrenzt teilbar” haben eine gänzlich verschiedene Grammatik. Man operiert fälschlich mit dem Worte “unendlich”, wie mit einem Zahlwort; weil beide in der Umgangssprache auf die Frage “wieviele ...” zur Antwort kommen.

Ts-213 742r[3] & 743r[1]

Das Gewebe der Irrtümer auf diesem Gebiet ist natürlich ein sehr kompliziertes. Es tritt z.B. noch die Verwechslung zweier verschiedener Bedeutungen des Wortes "Art" hinzu. Man gibt nämlich zu, daß die unendlichen Zahlen eine andre *Art* Zahlen sind, als die endlichen, aber man mißversteht nun, worin hier der Unterschied verschiedener Arten besteht. Daß es sich nämlich hier nicht um die Unterscheidung von Gegenständen nach ihren Eigenschaften handelt, wie wenn man rote Äpfel von gelben unterscheidet, sondern um verschiedene logische Formen. – So versucht Dedekind eine unendliche Klasse zu *beschreiben*; indem er sagt, es sei eine, die einer echten Teilklasse ihrer selbst ähnlich ist. Hierdurch hat er scheinbar eine Eigenschaft angegeben, die die Klasse haben muß, um unter den Begriff 'unendliche Klasse' zu fallen. (Frege.) Denken wir uns nun die Anwendung dieser Definition. Ich soll also in einem bestimmten Fall untersuchen, ob eine Klasse endlich ist oder nicht, etwa ob eine bestimmte Baumreihe endlich oder endlos ist. Ich nehme also, der Definition folgend, eine Teilklasse dieser Baumreihe und untersuche, ob sie der ganzen Klasse ähnlich (d.h. 1–1 koordinierbar) ist! (Hier fängt gleichsam schon Alles an zu lachen.) Das heißt ja gar nichts: denn, nehme ich eine "endliche Klasse" als Teilklasse, so muß ja der Versuch, sie der ganzen Klasse 1 zu 1 zuzuordnen eo ipso mißlingen; und mache ich den Versuch an einer unendlichen Teilklasse, – – – aber das heißt ja schon erst recht nichts, denn, wenn sie unendlich ist, kann ich den Versuch dieser Zuordnung gar nicht machen. – Das, was man im Fall einer endlichen Klasse 'Zuordnung aller ihrer Glieder mit andern' nennt, ist etwas ganz anderes, als das, was man z.B.

eine Zuordnung aller Kardinalzahlen mit allen Rationalzahlen nennt. Die beiden Zuordnungen, oder, was man in den zwei Fällen mit diesem Wort bezeichnet, gehören verschiedenen logischen *Kathegorien* an. Und es ist nicht die “unendliche Klasse” eine Klasse, die mehr Glieder im gewöhnlichen Sinn des Wortes “mehr” enthält, als die endlichen. Und wenn man sagt, daß eine unendliche Zahl größer ist, als eine endliche, so macht das die beiden nicht vergleichbar, weil in dieser Aussage das Wort “größer” *eine andere Bedeutung hat*, als etwa im Satz “5 größer als 4”.

Ts-213 744r[1] Die Definition gibt nämlich vor, daß aus dem Gelingen oder Mißlingen des Versuchs, eine wirkliche Teilklasse der ganzen Klasse zuzuordnen, hervorgeht, daß sie unendlich bezw. endlich ist. Während es einen solchen entscheidenden Versuch gar nicht gibt. – ‘Unendliche Klasse’ und ‘endliche Klasse’ sind verschiedene logische Kathegorien; was von der einen Kathegorie sinnvoll ausgesagt werden kann, kann es nicht von der andern.

Ts-213 744r[2] Der Satz, daß eine Klasse einer ihrer Subklassen nicht ähnlich ist, ist für endliche Klassen nicht wahr, sondern eine Tautologie. Die grammatischen Regeln über die Allgemeinheit der generellen Implikation in dem Satz “k ist eine Subklasse von K” enthalten das, was der Satz, K sei eine endliche Klasse, sagt.

Ts-213 744r[3] Ein Satz (wie) “es gibt keine letzte Kardinalzahl” *verletzt* den naiven – und rechten – Sinn. Wenn ich frage “wer war der letzte Mann der Prozession” und die Antwort lautet “es gibt keinen letzten”? ja, wenn die Frage geheißen hätte “wer war der Fahnenträger”, so hätte ich die Antwort verstanden “es gibt keinen Fahnenträger”. Und nach einer solchen Antwort ist ja jene *sinnlose* gebildet. Wir fühlen nämlich mit Recht: wo von einem Letzten die Rede sein kann, da kann nicht ‘kein Letzter’ sein. Das heißt aber natürlich: Der Satz “es gibt keine letzte” müßte richtig lauten: es hat keinen Sinn, von einer “letzten Kardinalzahl” zu reden, dieser Ausdruck ist unrechtmäßig gebildet.

Ts-213 744r[4] & 745r[1] “Hat die Prozession ein Ende” könnte auch heißen: ist sie eine in sich geschlossene Prozession. Und nun könnte man sagen “da siehst Du ja, daß Du Dir sehr wohl einen solchen Fall vorstellen kannst, daß etwas kein Ende hat; warum soll es dann nicht auch andere solche Fälle geben können?” – Aber die Antwort ist: Die “Fälle” in diesem Sinn des Wortes sind grammatische Fälle und sie bestimmen erst den Sinn der Frage. Die Frage “warum soll es nicht auch andere Fälle geben können” ist *der* analog gebildet: “Warum soll es nicht noch andere Fälle von Mineralien geben können, die im Dunkeln leuchten”, aber hier handelt es sich um Fälle der Wahrheit einer Aussage, dort um Fälle, die den Sinn eines Satzes bestimmen.

Ts-213 745r[2] *Die Ausdrucksweise:* m = 2n ordne eine Klasse einer ihrer echten Teilklassen zu, kleidet einen *einfachen* Sinn durch Heranziehung einer irreführenden Analogie in eine paradoxe Form. (Und statt sich dieser paradoxen Form als etwas Lächerlichem zu schämen, brüstet man sich eines Sieges über alle Vorurteile des Verstandes.) Es ist genau so, als stieße man die Regeln des Schach um und sagte, es habe sich gezeigt, daß man Schach auch ganz anders spielen könne. So verwechselt man erst das Wort "Zahl" mit einem Begriffswort wie "Äpfel", spricht dann von einer "Anzahl der Anzahlen" und sieht nicht, daß man in diesem Ausdruck nicht beidemal das gleiche Wort "Anzahl" gebrauchen sollte; und endlich hält man es für eine Entdeckung, daß die Anzahl der geraden Zahlen die gleiche ist wie die der geraden und ungeraden.

Ts-213 745r[3] Weniger irreführend ist es, zu sagen "m = 2n gibt die Möglichkeit der Zuordnung jeder Zahl mit einer andern", als "m = 2n ordnet alle Zahlen anderen zu". Aber auch hier muß erst die Grammatik die Bedeutung des Ausdrucks "Möglichkeit der Zuordnung" lehren.

Ts-213 746r[1] (Es ist beinahe unglaublich, wie ein Problem durch die irreführenden Ausdrucksweisen, die Generation auf Generation rundherum stellt, gänzlich, auf Meilen, blockiert wird, so daß es beinahe unmöglich wird, dazuzukommen.)

Ts-213 746r[2] & 747r[1]

Wenn 2 Pfeile in derselben Richtung zeigen, ist es dann nicht absurd, diese Richtungen "gleich *lang*" zu nennen, weil, was in der Richtung des einen Pfeiles liegt, auch in der des andern liegt? – Die Allgemeinheit von m = 2n ist ein Pfeil, der der Operationsreihe entlang weist. Und zwar kann man sagen, der Pfeil weist in's Unendliche; aber heißt das, daß es ein Etwas, das Unendliche, gibt, auf das er – wie auf ein Ding – hinweist? – Der Pfeil bezeichnet gleichsam die Möglichkeit der Lage von Dingen in seiner Richtung. Das Wort "Möglichkeit" ist aber irreführend, denn, was möglich ist, wird man sagen, soll eben nun wirklich werden. Auch denkt man dabei immer an zeitliche Prozesse und schließt *daraus* daß die Mathematik nichts mit der Zeit zu tun hat, daß die Möglichkeit in ihr bereits Wirklichkeit ist. Die "unendliche Reihe der Kardinalzahlen" oder "der Begriff der Kardinalzahl" ist nur so eine Möglichkeit, – wie aus dem Symbol "[0, x, x + 1]" klar hervorgeht. Dieses Symbol selbst ist ein Pfeil, dessen Feder die "0", dessen Spitze "x + 1" ist. Es ist möglich, von Dingen zu reden, die in der Richtung des Pfeils liegen, aber irreführend oder absurd, von allen möglichen Lagen der Dinge in der Pfeilrichtung als einem Äquivalent dieser Richtung selbst zu reden. Wenn ein Scheinwerfer Licht in den unendlichen Raum wirft, so beleuchtet er allerdings alles, was in der Richtung seiner Strahlen liegt, aber man soll nicht sagen, er beleuchtet die Unendlichkeit.

Ts-213 747r[2] Es ist immer mit Recht höchst verdächtig, wenn Beweise in der Mathematik allgemeiner geführt werden, als es der bekannten Anwendung des Beweises entspricht. Es liegt hier immer der Fehler vor, der in der Mathematik allgemeine Begriffe und besondere Fälle sieht. In der Mengenlehre treffen wir auf Schritt und Tritt diese verdächtige Allgemeinheit. Man möchte immer sagen: "Kommen wir zur Sache!" Jene allgemeinen Betrachtungen haben stets nur Sinn, wenn man einen bestimmten Anwendungsbereich im Auge hat. Es gibt eben in der Mathematik keine Allgemeinheit, deren Anwendung auf spezielle Fälle sich noch nicht voraussehen ließe. Man empfindet darum die allgemeinen Betrachtungen der Mengenlehre (wenn man sie nicht als Kalkül ansieht) immer als Geschwätz und ist ganz erstaunt, wenn einem eine Anwendung dieser Betrachtungen gezeigt wird. Man empfindet, es geht da etwas nicht ganz mit rechten Dingen zu.

Ts-213 747r[3] Der Unterschied zwischen etwas Allgemeinem, das man wissen könne und dem Besonderen, das man aber nicht wisse; oder zwischen der Beschreibung des Gegenstandes, die man kenne, und dem Gegenstand, den man nicht gesehen hat, ist auch ein Stück, das man von der physikalischen Beschreibung der Welt in die Logik hinüber genommen hat. Daß unsere Vernunft Fragen erkennen kann, aber deren Antworten nicht, gehört auch hierher.

Ts-213 747r[4] & 748r[1] Die Mengenlehre sucht das Unendliche auf eine allgemeinere Art zu fassen, als es die Untersuchung der Gesetze der reellen Zahlen kann. Sie sagt, daß das wirklich Unendliche mit dem mathematischen Symbolismus überhaupt nicht zu fassen ist, und daß es also nur beschrieben und nicht dargestellt werden kann. Die Beschreibung würde es etwa so erfassen, wie man eine Menge von Dingen, die man nicht alle in der Hand halten kann, in einer Kiste verpackt trägt. Sie sind dann unsichtbar, und doch wissen wir, daß wir sie tragen (gleichsam indirekt). Man könnte von dieser Theorie sagen, sie kaufe die Katze im Sack. Soll sich's das Unendliche in seine Kiste einrichten, wie es will. Darauf beruht auch die Idee, daß man logische Formen *beschreiben* kann. In so einer Beschreibung werden die Strukturen und etwa zuordnende Relationen in verpacktem Zustand präsentiert und so sieht es aus, als könne man von einer Struktur reden, ohne sie in der Sprache selber wiederzugeben. So verpackte Begriffe dürfen wir allerdings verwenden, aber unsere Zeichen haben ihre Bedeutung dann über Definitionen, die eben die *Begriffe* so verhüllt haben; und gehen wir diesen Definitionen nach, so werden die Strukturen wieder enthüllt. (Vergl. Russells Definition von "Rx".)

Ts-213 748r[2] Es geht, sozusagen, die Logik nichts an, wieviele Äpfel vorhanden sind, wenn von "allen Äpfeln" geredet wird; dagegen ist es anders mit den Zahlen: für die ist sie einzeln verantwortlich.

Ts-213 748r[3] Die Mathematik besteht aus Rechnungen.

Ts-213 748r[4] & 749r[1] In der Mathematik ist *alles* Algorithmus, *nichts* Bedeutung; auch dort, wo es *so* scheint, weil wir mit *Worten über* die mathematischen Dinge zu sprechen scheinen. Vielmehr bilden wir dann eben mit diesen Worten einen Algorithmus.

Ts-213 749r[2] In der Mengenlehre müßte man das, was Kalkül ist, trennen von dem, was *Lehre* sein will (und natürlich nicht sein kann). Man muß also die Spielregeln von unwesentlichen Aussagen über die Schachfiguren trennen.

Ts-213 749r[3] Wie Frege in Cantor's angebliche Definition von "größer", "kleiner", " + ", " − ", etc. statt dieser Zeichen neue Wörter einsetzte, um zu zeigen, daß keine wirkliche Definition vorliege, ebenso könnte man in der ganzen Mathematik statt der geläufigen Wörter, insbesondere statt des Wortes "unendlich" und seiner Verwandten ganz neue, bisher bedeutungslose Ausdrücke setzen, um zu sehen, was der Kalkül mit diesen Zeichen wirklich leistet und was er nicht leistet. Wenn die Meinung verbreitet wäre, daß das Schachspiel uns einen Aufschluß über Könige und Türme gäbe, so würde ich vorschlagen, den Figuren neue Formen und andere Namen zu geben, um die Einsicht zu erleichtern, daß alles zum Schachspiel Gehörige in *seinen* Regeln liegen muß.

Ts-213 749r[4] Was ein geometrischer Satz bedeutet, welche Allgemeinheit er hat, das muß sich alles zeigen, wenn wir sehen, wie er angewendet wird. Denn, wenn Einer auch etwas Unfaßbares *mit ihm meinte*, so hilft ihm das nicht, da er ihn ja doch nur ganz offenbar, und jedem verständlich, anwenden kann. Wenn sich etwa jemand unter dem Schachkönig auch etwas Mystisches vorstellt, so kümmert uns das nicht, weil er ja doch mit ihm nur auf den 8 × 8 Feldern des Schachbretts ziehen kann.

Ts-213 750r[1] Es gibt ein Gefühl: "In der Mathematik kann es nicht Wirklichkeit und Möglichkeit geben. Alles ist auf *einer* Stufe. Und zwar in gewissem Sinne *wirklich*". – Und das ist richtig. Denn Mathematik ist ein Kalkül; und der Kalkül sagt von keinem Zeichen, daß es nur *möglich* wäre, sondern er hat es nur mit den Zeichen zu tun, mit denen er *wirklich* operiert. (Vergleiche die Begründung der Mengenlehre mit der Annahme eines möglichen Kalküls mit unendlichen Zeichen.)

Ts-213 750r[2] Die Mengenlehre, wenn sie sich auf die menschliche Unmöglichkeit eines direkten Symbolismus des Unendlichen beruft, führt dadurch die denkbar krasseste Mißdeutung ihres eigenen Kalküls ein. Es ist freilich eben diese Mißdeutung, die für die Erfindung dieses Kalküls verantwortlich ist. Aber der Kalkül an sich ist natürlich dadurch nicht als etwas Falsches erwiesen (höchstens als etwas Uninteressantes), und es ist sonderbar, zu glauben, daß dieser Teil der Mathematik durch irgend welche philosophische (oder mathematische) Untersuchungen gefährdet ist. (Ebenso könnte das Schachspiel durch die Entdeckung gefährdet werden, daß sich Kriege zwischen zwei Armeen nicht so abspielen, wie der Kampf auf dem Schachbrett.) Was der Mengenlehre verloren gehen muß, ist vielmehr die Atmosphäre von *Gedankennebeln*, die den bloßen Kalkül umgibt. Also die Hinweise auf einen, der Mengenlehre zugrunde liegenden, fiktiven Symbolismus, der nicht zu ihrem Kalkül verwendet wird, und dessen scheinbare Beschreibung in Wirklichkeit Unsinn ist. (In der Mathematik können wir alles fingieren, nur nicht einen Teil unseres Kalküls.)

Ts-213 751r[1]

41 ***Extensive Auffassung der reellen Zahlen.***

Ts-213 751r[2] Das Rätselhafte am Kontinuum ist, wie das Rätselhafte der Zeit für Augustinus, dadurch bedingt, daß wir durch die Sprache verleitet werden, ein Bild auf sie anzuwenden, das nicht paßt. Die Mengenlehre behält das unpassende Bild des Diskontinuierlichen bei, aber sagt diesem Bilde Widersprechendes *von ihm aus, mit der Idee,* mit Vorurteilen zu brechen. Während in *Wirklichkeit* darauf hingewiesen werden sollte, daß dieses Bild eben nicht paßt und daß man es allerdings nicht strecken kann, ohne es zu zerbrechen, aber ein neues und in gewissem Sinne dem alten ähnliches brauchen kann.

Ts-213 751r[3] Der Wirrwarr *in der Auffassung* des "wirklich Unendlichen" kommt von dem unklaren Begriff der irrationalen Zahl her. D.h. davon, daß die logisch verschiedensten Gebilde, ohne klare Begrenzung des Begriffs, "irrationale Zahl" genannt werden. Die Täuschung, als hätte man einen festen Begriff, rührt daher, daß man in Zeichen von der Art "0, abc ...ad inf." einen *Standard* zu haben glaubt, dem sie (die Irrationalzahlen) jedenfalls entsprechen müssen.

Ts-213 752r[1] “Angenommen, ich schneide eine Strecke dort, wo kein rationaler Punkt (keine rationale Zahl) ist”. Aber kann man denn das? von was für Strecken sprichst Du? – “Aber, wenn meine Meßinstrumente fein genug wären, so könnte ich mich doch durch fortgesetzte Bisektionen einem gewissen Punkt unbegrenzt nähern.” – Nein, denn ich könnte ja eben niemals erfahren, ob mein Punkt ein solcher ist. Meine Erfahrung wird immer nur sein, daß ich ihn bis jetzt nicht erreicht habe. “Aber wenn ich nun mit einem absolut genauen Reißzeug die Konstruktion der $\sqrt{2}$ durchgeführt hätte und mich nun dem erhaltenen Punkt durch Bisektion nähere, dann *weiß* ich doch, daß dieser Prozeß den konstruierten Punkt niemals erreichen wird.” – Aber das wäre doch sonderbar, wenn so die eine Konstruktion der andern sozusagen etwas vorschreiben könnte! Und so ist es ja auch nicht. Es ist sehr leicht möglich, daß ich bei der ‘genauen’ Konstruktion der $\sqrt{2}$ zu einem Punkt komme, den die Bisektion, sagen wir nach 100 Stufen, erreicht; – aber dann werden wir sagen: unser Raum ist nicht euklidisch. –

Ts-213 752r[2] Der “Schnitt in einem irrationalen Punkt” ist ein Bild, und ein irreführendes Bild.

Ts-213 752r[3] Ein Schnitt ist ein *Prinzip* der Teilung in größer und kleiner.

Ts-213 752r[4] Sind durch den Schnitt einer Strecke die Resultate aller Bisektionen, die sich dem Schnittpunkt nähern sollen, vorausbestimmt? Nein.

Ts-213 752r[5] & 753r[1] In dem vorigen Beispiel, in dem ich mich bei der sukzessiven Einschränkung eines Intervalls durch Bisektionen einer Strecke von den Ergebnissen des Würfelns leiten ließ, hätte ich ebensowohl das Anschreiben eines Dezimalbruchs von Würfeln leiten lassen können. So bestimmt auch die Beschreibung "endloser Vorgang des Wählens zwischen 1 und 0" beim Anschreiben eines Dezimalbruches kein Gesetz. Man möchte etwa sagen: Die Vorschrift des endlosen Wählens zwischen 0 und 1 in diesem Fall könnte durch ein Symbol "0,[000111]...ad inf." wiedergegeben werden. Wenn ich aber ein Gesetz so andeute: "0,001001001...ad inf.", so ist es nicht das endliche Reihenstück als Spezimen der unendlichen Reihe, was ich zeigen will, sondern die aus ihm entnehmbare Gesetzmäßigkeit. Aus "0,[000111]ad inf....ad inf." entnehme ich eben *kein* Gesetz, sondern gerade den Mangel eines Gesetzes.

Ts-213 753r[2] “Welches Kriterium gibt es dafür, daß die irrationalen Zahlen komplett sind? Sehen wir uns eine irrationale Zahl an: Sie läuft entlang einer Reihe rationaler Näherungswerte. Wann verläßt sie diese Reihe? Niemals. Aber sie kommt allerdings auch niemals zu einem Ende. Angenommen, wir hätten die Gesamtheit aller irrationalen Zahlen mit Ausnahme einer einzigen. Wie würde uns diese abgehen? Und wie würde sie nun – wenn sie dazukäme, die Lücke füllen? – Angenommen, es wäre π. Wenn die irrationale Zahl durch die Gesamtheit ihrer Näherungswerte gegeben ist, so gäbe es bis zu *jedem* beliebigen Punkt eine Reihe, die mit der von π übereinstimmt. Allerdings kommt für jede solche Reihe ein Punkt der Trennung. Aber dieser Punkt kann beliebig weit “draußen” liegen, so daß ich zu jeder Reihe, die π begleitet, eine finden kann, die es weiter begleitet. Wenn ich also die Gesamtheit der irrationalen Zahlen habe, außer π, und nun π einsetze, so kann ich keinen Punkt angeben, an dem π nun wirklich nötig wird, es hat an *jedem* Punkt einen Begleiter, der es vom Anfang an begleitet. Auf die Frage “wie würde uns π abgehen”, müßte man antworten: π, wenn es eine Extension wäre, würde uns niemals abgehen. D.h., wir könnten niemals eine Lücke bemerken, die es füllt. Wenn man uns fragte: “aber hast Du auch einen unendlichen Dezimalbruch, der die Ziffer m an der r-ten Stelle hat und n an der s-ten, etc.?” – wir könnten ihm immer dienen.)

Ts-213 754r[1] “Die gesetzmäßig fortschreitenden unendlichen Dezimalbrüche sind noch ergänzungsbedürftig durch eine unendliche Menge ungeordneter unendlicher Dezimalbrüche, die ‘unter den Tisch fielen’, wenn wir uns auf die *gesetzmäßig erzeugten beschränkten*.” Wo ist so ein nicht gesetzmäßig erzeugter unendlicher Dezimalbruch? Und wie können wir ihn vermissen? Wo ist die Lücke, die er auszufüllen hätte?

Ts-213 754r[2] Wie ist es, wenn man die verschiedenen Gesetze der Bildung von Dualbrüchen durch die Menge der endlichen Kombinationen der Ziffern 0 und 1 sozusagen kontrolliert? – Die Resultate eines Gesetzes durchlaufen die endlichen Kombinationen und die Gesetze sind daher, was ihre Extensionen anlangt, komplett, wenn *alle* endlichen Kombinationen durchlaufen werden.

Ts-213 754r[3] Wenn man sagt: Zwei Gesetze sind identisch, wenn sie auf jeder Stufe das gleiche Resultat ergeben, so erscheint uns das wie eine ganz allgemeine Regel. In Wirklichkeit aber hat dieser Satz verschiedenen Sinn, je nachdem was das Kriterium dafür ist, daß sie auf jeder Stufe das gleiche Resultat liefern. (Denn die supponierte allgemein anwendbare Methode des endlosen Probierens gibt es ja nicht! Wir decken also die verschiedensten Bedeutungen mit einer, von einer Analogie hergenommenen, Redeweise und glauben nun, wir hätten die verschiedensten Fälle in *einem* System vereinigt.

Ts-213 754r[4] & 755r[1] (Die Vorschriften, die den irrationalen Zahlen entsprechen, gehören insofern alle der gleichen Type an, als sie alle schließlich Vorschriften zur sukzessiven Erzeugung von Dezimalbrüchen sein müssen. Die gemeinsame Dezimalnotation bedingt in gewissem Sinne, eine gemeinsame Type.) Man könnte das auch so sagen: Beim Approximieren durch fortgesetzte Zweiteilung kann man sich *jedem* Punkt der Strecke durch *rationale* Zahlen nähern. Es gibt keinen Punkt, dem man sich nur durch irrationale Schritte einer bestimmten Type nähern könnte. Dies ist natürlich nur, in andere Worte gekleidet, die Erklärung, daß wir unter irrationaler Zahl einen unendlichen Dezimalbruch verstehen. Und diese Erklärung wieder ist weiter nichts, als eine beiläufige Erklärung der Dezimalnotation, etwa mit einer Andeutung, daß wir Gesetze unterscheiden, die periodische Dezimalbrüche liefern und andere.

Ts-213 755r[2] Durch die falsche Auffassung des Wortes "unendlich" und der Rolle der "unendlichen Entwicklung" in der Arithmetik der reellen Zahlen, wird man zu der Meinung verführt, es gäbe eine einheitliche Notation der irrationalen Zahlen (nämlich eben die der unendlichen Extension, z.B. der unendlichen Dezimalbrüche). Dadurch, daß man bewiesen hat, daß für jedes Paar von Kardinalzahlen x und y $(xy)^2 \neq 2$ ist, ist doch nicht $\sqrt{2}$ *einer* Zahlenart – genannt "die irrationalen Zahlen" – eingeordnet. Diese Zahlenart müßte ich doch erst aufbauen; oder: von der neuen Zahlenart ist mir doch nicht mehr bekannt, als *ich* bekannt mache.

Ts-213 **42** ***Arten irrationaler Zahlen.***

756r[1] (π', P, F)

Ts-213 756r[2] π′ ist eine Regel zur Erzeugung von Dezimalbrüchen, und zwar ist die Entwicklung von π′ dieselbe, wie die von π, außer wenn in der Entwicklung von π eine Gruppe 777 vorkommt; in diesem Falle tritt statt dieser Gruppe die Gruppe 000. Unser Kalkül kennt keine Methode, um zu finden, wo wir in der Entwicklung von π auf so eine Gruppe stoßen. P ist eine Regel zur Erzeugung von Dualbrüchen. In der Entwicklung steht an der n-ten Stelle eine 1 oder eine 0, je nachdem n prim ist oder nicht. F ist eine Regel zur Erzeugung von Dualbrüchen. An der n-ten Stelle steht eine 0, außer dann, wenn ein Zahlentrippel x, y, z aus den ersten 100 Kardinalzahlen die Gleichung xn+yn=zn löst.

Ts-213 756r[3] Man möchte sagen, die einzelnen Ziffern der Entwicklung (von π z.B.) sind immer nur die Resultate, die Rinde des fertigen Baumes. Das, worauf es ankommt, oder woraus noch etwas Neues wachsen kann, ist im Innern des Stammes, wo die Triebkräfte sind. Eine Änderung des Äußeren ändert den Baum überhaupt nicht. Um ihn zu ändern, muß man in den noch lebenden Stamm gehen.

Ts-213 757r[1] & 758r[1]

Ich nenne "πn" die Entwicklung von π bis zur n-ten Stelle. Dann kann ich sagen: Welche Zahl π'100 ist, verstehe ich; nicht aber π′, weil π ja gar keine Stellen hat, ich also auch keine durch andere ersetzen kann. Anders wäre es, wenn ich z.B. die Division a5→3:b als eine Regel zur Erzeugung von Dezimalbrüchen erkläre, durch Division und Ersetzung jeder 5 im Quotienten durch eine 3. Hier kenne ich z.B. die Zahl 15→3:7. – Und wenn unser Kalkül eine Methode *enthält*, ein Gesetz der Lagen von 777 in der Entwicklung von π zu berechnen, dann ist nun im Gesetz von π von 777 die Rede, und das Gesetz kann durch die Substitution von 000 für 777 geändert werden. Dann aber ist π′ etwas anderes, als das, was ich oben definiert habe; es hat eine andere Grammatik, als die von mir angenommene. In unserm Kalkül gibt es keine Frage, ob π gleich oder größer ist als π′ und keine solche Gleichung oder Ungleichung. π′ ist mit π unvergleichbar. Und zwar kann man nun nicht sagen "*noch* unvergleichbar", denn, sollte ich einmal etwas π′ Ähnliches konstruieren, das mit π vergleichbar ist, dann wird das eben darum nicht mehr π′ sein. Denn π′ sowie π sind ja Bezeichnungen für ein Spiel, und ich kann nicht sagen, das Damespiel werde *noch* mit weniger Steinen gespielt als das Schach, da es sich ja einmal zu einem Spiel mit 16 Steinen entwickeln könne. Dann wird es nicht mehr das sein, was wir "Damespiel" nennen. (Es sei denn, daß ich mit diesem Wort gar nicht ein Spiel bezeichne, sondern etwa eine Charakteristik mehrerer Spiele; und auch diesen Nachsatz kann man auf π′ und π anwenden.) Da es nun ein Hauptcharakteristikum einer Zahl ist, mit andern Zahlen vergleichbar zu sein, so ist die Frage, ob man π′ eine Zahl nennen soll und ob eine reelle Zahl;

wie immer man es aber *nennt*, so ist das Wesentliche, daß π' in einem andern Sinne Zahl ist, als π. – Ich kann ja auch ein Intervall einen Punkt nennen; ja es kann einmal praktisch sein, das zu tun; aber wird es nun einem Punkt ähnlicher, wenn ich vergesse, daß ich hier das Wort "Punkt" in *doppelter* Bedeutung gebraucht habe? Es zeigt sich hier klar, daß die Möglichkeit der Dezimalentwicklung π' nicht zu einer Zahl im Sinne von π macht. Die Regel für diese Entwicklung ist natürlich eindeutig, so eindeutig, wie die für π oder $\sqrt{2}$, aber das ist kein Argument dafür, daß π' eine reelle Zahl ist; wenn man die Vergleichbarkeit mit andern reellen Zahlen *für* ein wesentliches Merkmal der reellen Zahl *nimmt*. Man kann ja auch von dem Unterschied zwischen den rationalen und den irrationalen Zahlen abstrahieren, aber der Unterschied verschwindet doch dadurch nicht. Daß π' eine eindeutige Regel zur Entwicklung von Dezimalbrüchen ist, *bedeutet* natürlich eine Ähnlichkeit zwischen π' und π oder $\sqrt{2}$; aber auch ein Intervall hat Ähnlichkeit mit einem Punkt, etc.. Allen Irrtümern, die in diesem Kapitel der Philosophie der Mathematik gemacht werden, liegt immer wieder die Verwechslung zu Grunde zwischen internen Eigenschaften einer Form (der Regel als Bestandteil des Regelverzeichnisses) und dem, was man im gewöhnlichen Leben "Eigenschaft" nennt (rot als Eigenschaft dieses Buches). Man könnte auch sagen; die Widersprüche und Unklarheiten werden dadurch hervorgerufen, daß die *Mathematiker* einmal unter einem Wort, z.B. "Zahl", ein bestimmtes Regelverzeichnis verstehen, ein andermal ein variables Regelverzeichnis; so als nennte ich "Schach" einmal das bestimmte Spiel, wie wir es heute spielen, ein andermal das Substrat einer bestimmten historischen Entwicklung.

Ts-213 758r[2] & 759r[1] "Wie weit muß ich π entwickeln, um es einigermaßen zu kennen?" – Das heißt natürlich nichts. Wir kennen es also schon, ohne es überhaupt zu entwickeln. Und, in diesem Sinne, könnte man sagen, kenne ich π' gar nicht. Hier zeigt sich nur ganz deutlich, daß π' einem anderen System angehört als π, und das erkennt man, wenn man, statt "die Entwicklungen" der beiden zu vergleichen, die Art der Gesetze allein *ins Auge faßt*.

Ts-213 759r[2] & 760r[1]

Zwei mathematische Gebilde, deren eines ich in meinem Kalkül mit jeder rationalen Zahl vergleichen kann, das andere nicht, – sind nicht Zahlen im gleichen Sinne des Wortes. Der Vergleich der Zahl mit einem Punkt auf der Zahlgeraden ist nur stichhältig, wenn man für je zwei Zahlen a und b sagen kann, ob a rechts von b, oder b rechts von a liegt. Es genügt nicht, daß man den Punkt durch Verkleinerung seines Aufenthaltsortes – angeblich – mehr und mehr bestimmt, sondern man muß *ihn* konstruieren. Fortgesetztes Würfeln schränkt zwar den möglichen Aufenthalt des Punktes unbeschränkt ein, aber es bestimmt keinen Punkt. Der Punkt ist nach *jedem* Wurf (oder jeder Wahl) noch unendlich unbestimmt – oder richtiger: er ist nach jedem Wurf unendlich unbestimmt. Ich glaube, hier werden wir von der *absoluten* Größe der Gegenstände in unserem Gesichtsraum irregeführt; und andrerseits von der Zweideutigkeit des Ausdrucks "sich einem Punkte nähern". Von einer Strecke im Gesichtsfeld kann man sagen, sie nähere sich durch Einschrumpfen immer mehr einem Punkt; d.h. sie werde einem Punkt immer ähnlicher. Dagegen wird die euklidische Strecke durch Einschrumpfen einem Punkt *nicht* ähnlicher, sie bleibt ihm vielmehr immer *gleich* unähnlich, weil ihre Länge den Punkt, sozusagen, gar nichts angeht. Wenn man von der euklidischen Strecke sagt, sie nähere sich durch Einschrumpfen einem Punkt, so hat das nur Sinn, sofern schon ein Punkt bezeichnet ist, dem sich ihre Enden nähern, und kann nicht heißen, sie *erzeuge* durch Einschrumpfen einen Punkt. Sich einem Punkt nähern hat eben zwei Bedeutungen: es heißt einmal, ihm räumlich näher kommen, dann muß er schon da sein, denn ich kann mich in diesem Sinne einem Menschen nicht nähern, der nicht vorhanden ist. Anderseits heißt es "einem Punkt ähnlicher werden", wie man etwa sagt, die Affen haben sich dem Stadium des Menschen in ihrer Entwicklung genähert, die Entwicklung habe den Menschen erzeugt.

Ts-213 760r[2] Zu sagen "zwei reelle Zahlen sind identisch, wenn sie in *allen* Stellen ihrer Entwicklung übereinstimmen", hat nur dann Sinn, wenn ich dem Ausdruck "in allen Stellen übereinstimmen", durch eine Methode diese Übereinstimmung festzustellen, einen Sinn *gegeben* habe. Und das Gleiche gilt natürlich für den Satz "sie stimmen nicht überein, wenn sie an *irgend einer* Stelle nicht übereinstimmen".

Ts-213 760r[3] Könnte man aber nicht auch umgekehrt π' als das Ursprüngliche, und also als den zuerst angenommenen Punkt, betrachten und dann über die Berechtigung von π im Zweifel sein? – Was ihre Extensionen betrifft, sind sie natürlich gleichberechtigt; was uns aber dazu veranlaßt, π einen Punkt auf der Zahlengeraden zu nennen, ist seine Vergleichbarkeit mit den Rationalzahlen.

Ts-213 760r[4] & 761r[1]

Wenn ich π, oder sagen wir $\sqrt{2}$, als Regel zur Erzeugung von Dezimalbrüchen auffasse, so kann ich natürlich eine Modifikation dieser Regel erzeugen, indem ich sage, es solle jede 7 in der Entwicklung von $\sqrt{2}$ durch eine 5 ersetzt werden; aber diese Modifikation ist von ganz andrer *Art* als die, welche, etwa, durch eine Änderung des Radikanden, oder des Wurzelexponenten erzeugt wird. Ich nehme z.B. in das modifizierte Gesetz eine Beziehung zum Zahlensystem der Entwicklung auf, die in dem ursprünglichen Gesetz $\sqrt{2}$ nicht vorhanden war. Die Änderung des Gesetzes ist von viel fundamentalerer Art, als es zuerst den Anschein haben könnte. Ja, wenn wir das falsche Bild von der unendlichen Extension vor uns haben, dann kann es allerdings scheinen, als ob ich durch die Hinzufügung der Ersetzungsregel 7→5 zur $\sqrt{2}$ diese viel weniger verändert hätte, als etwa durch Änderung der $\sqrt{2}$ in $\sqrt{2{,}1}$ denn die Entwicklungen von 27→5 lauten denen von $\sqrt{2}$ sehr ähnlich, während die Entwicklung der $\sqrt{2{,}1}$ schon nach der zweiten Stelle gänzlich von der der $\sqrt{2}$ abweicht.

Ts-213 761r[2] Gebe ich eine Regel R zur Bildung von Extensionen an, aber so, daß mein Kalkül kein Mittel kennt, vorherzusagen, wie oft höchstens sich eine scheinbare Periode der Extension wiederholen kann, dann ist R von einer reellen Zahl insofern verschieden, als ich $R - a$ in gewissen Fällen nicht mit einer Rationalzahl vergleichen kann, so daß der Ausdruck $R - a = b$ unsinnig wird. Wäre z.B. die mir bekannte Entwicklung von R bis auf weiteres 3,141111..., so ließe es sich von der Differenz $R - 3{,}14\dot{1}$ nicht sagen, sie sei größer, oder sie sei kleiner, als 0; sie läßt sich also in diesem Sinne nicht mit 0 vergleichen, also nicht mit einem Punkt der Zahlenachse, und sie und R nicht in demselben Sinne Zahl nennen wie einen dieser Punkte.

Ts-213 761r[3] Die Ausdehnung eines Begriffes der Zahl, des Begriffs 'alle', etc. erscheint uns (*ganz*) harmlos; aber sie ist es nicht, wenn wir vergessen, daß wir unsern Begriff tatsächlich geändert haben.

Ts-213 761r[4] & 762r[1] Was die irrationalen Zahlen betrifft, so sagt meine Untersuchung nur, daß es falsch (oder irreführend) ist, von Irrationalzahlen zu sprechen, indem man sie als Zahlenart den Kardinalzahlen und Rationalzahlen gegenüberstellt, weil man "Irrationalzahlen" in Wirklichkeit verschiedene Zahlenarten nennt, – voneinander so verschieden, wie die Rationalzahlen von jeder dieser Arten.

Ts-213 762r[2] Es wäre eine gute Frage für die Scholastiker gewesen: "Kann Gott alle Stellen von π kennen".

Ts-213 762r[3] Es tritt uns bei diesen Überlegungen immer wieder etwas entgegen, was man "arithmetisches Experiment" nennen möchte. Was herauskommt ist zwar durch das Gegebene bestimmt, aber ich kann nicht erkennen, *wie* es dadurch bestimmt ist. So geht es mit dem Auftreten der 7 in der Entwicklung von π; so ergeben sich auch die Primzahlen als Resultate eines Experiments. Ich kann mich davon überzeugen, daß 31 eine Primzahl ist, aber ich sehe den Zusammenhang nicht zwischen ihr (ihrer Lage in der Reihe der Kardinalzahlen) und der Bedingung, der sie entspricht. – Aber diese *Perplexität* ist nur die Folge eines falschen Ausdrucks. Der Zusammenhang, den ich nicht zu sehen glaube, existiert gar nicht. Ein – sozusagen unregelmäßiges – Auftreten der 7 in der Entwicklung von π gibt es gar nicht, denn es gibt ja keine Reihe, die "*die* Entwicklung von π" hieße. Es gibt Entwicklungen von π, nämlich die, die man entwickelt hat (vielleicht 1000) und in diesen kommt die 7 nicht "regellos" vor, denn ihr Auftreten in ihnen läßt sich beschreiben. – (Dasselbe für die "Verteilung der Primzahlen". Wer uns ein Gesetz dieser Verteilung gibt, gibt uns eine *neue* Zahlenreihe, *neue* Zahlen.) (Ein Gesetz des Kalküls, das ich nicht kenne, ist kein Gesetz.) (Nur was ich *sehe*, ist ein Gesetz; nicht, was ich *beschreibe*. Nur das hindert mich, mehr in meinen Zeichen auszudrücken, als ich verstehen kann.)

Ts-213 762r[4] & 763r[1]

Hat es keinen Sinn, – auch dann, wenn der Fermat'sche Satz bewiesen ist, – zu sagen F = 0,11? (Wenn ich etwa in der Zeitung davon läse.) Ja, ich werde dann sagen: "nun können wir also schreiben 'F = 0,11'". D.h. es liegt nahe, das Zeichen "F" aus dem früheren Kalkül, in dem es keine Rationalzahl bezeichnete, in den neuen hinüberzunehmen und nun 0,11 damit zu bezeichnen.

Ts-213 763r[2]

F wäre ja eine Zahl, von der wir nicht wüßten, ob sie rational oder irrational ist. Denken wir uns eine Zahl, von der wir nicht wüßten, ob sie eine Kardinalzahl oder eine Rationalzahl ist. – Eine Beschreibung im Kalkül gilt eben nur als dieser bestimmte Wortlaut und hat nichts mit einem Gegenstand *der Beschreibung* zu tun, der vielleicht einmal gefunden werden wird.

Ts-213 763r[3]

Man könnte was ich meine auch in den Worten ausdrücken: Man kann keine Verbindung von Teilen der Mathematik oder Logik herausfinden, die schon vorhanden war, ohne daß man es wußte.

Ts-213 763r[4]

In der Mathematik gibt es kein "noch nicht" und kein "bis auf weiteres" (außer in dem Sinne, in welchem man sagen kann, man habe noch nicht 1000-stellige Zahlen miteinander multipliziert).

Ts-213 763r[5]

"Ergibt die Operation, z.B. eine rationale Zahl?" – wie kann das gefragt werden, wenn man keine Methode zur Entscheidung der Frage hat? denn die Operation *ergibt* doch nur im festgesetzten Kalkül. Ich meine: "ergibt" ist doch wesentlich Präsens. Es heißt doch nicht: "ergibt mit der Zeit"! – sondern: ergibt nach der gegenwärtigen Regel.

Ts-213 763r[6] & 764r[1] & 765r[1]

“Die Lage aller Primzahlen muß doch irgendwie vorausbestimmt sein. Wir rechnen sie nur sukzessive aus, aber sie sind alle schon bestimmt. Gott kennt sie sozusagen alle. Und dabei scheint es doch möglich, daß sie nicht durch ein Gesetz bestimmt sind. –” Immer wieder das Bild von der Bedeutung eines Wortes, als einer vollen Kiste, deren Inhalt uns mit ihr und in ihr verpackt gebracht wird, und den wir nur zu untersuchen haben. – Was wissen wir denn von den Primzahlen? Wie ist uns denn dieser Begriff überhaupt gegeben? Treffen wir nicht selbst die Bestimmungen über ihn? Und wie seltsam, daß wir dann annehmen, es müssen Bestimmungen über ihn getroffen sein, die wir nicht getroffen haben. Aber der Fehler ist begreiflich. Denn wir gebrauchen das Wort “Primzahlen” und es lautet ähnlich wie “Kardinalzahlen’, “Quadratzahlen”, “gerade Zahlen”, etc.. So denken wir, es wird sich ähnlich gebrauchen lassen, vergessen aber, daß wir ganz andere – *andersartige* – Regeln für das Wort “Primzahl” gegeben haben, und kommen nun mit uns selbst in einen seltsamen Konflikt. – Aber wie ist das möglich? die Primzahlen sind doch die uns wohlbekannten Kardinalzahlen, – wie kann man dann sagen, der Begriff der Primzahl sei in anderem Sinne ein Zahlbegriff, als der der Kardinalzahl? Aber hier spielt uns wieder die Vorstellung einer “unendlichen Extension” als einem Analogon zu den uns bekannten “endlichen” Extensionen einen Streich. Der Begriff ‘Primzahl’ ist freilich mit Hilfe des Begriffes ‘Kardinalzahl’ erklärt, aber nicht “die Primzahlen” mit Hilfe der “Kardinalzahlen”; und den Begriff ‘Primzahl’ *haben wir* in wesentlich anderer Weise aus dem Begriff ‘Kardinalzahl’ abgeleitet, als, etwa, den Begriff

‘Quadratzahl’. (Wir können uns also nicht wundern, wenn er sich anders benimmt.) Man könnte sich sehr wohl eine Arithmetik denken, die – sozusagen – beim Begriff ‘Kardinalzahl’ sich nicht aufhält, sondern gleich zu dem der Quadratzahl übergeht (diese Arithmetik wäre natürlich nicht so anzuwenden, wie die unsere). Aber der Begriff ‘Quadratzahl’ hätte dann nicht den *Charakter*, den er in unserer Arithmetik hat; daß er nämlich wesentlich ein Teilbegriff sei, daß die Quadratzahlen wesentlich ein Teil der Kardinalzahlen seien; sondern sie wären eine komplette Reihe mit einer kompletten Arithmetik. Und nun denken wir uns dasselbe für die Primzahlen gemacht! Da würde es klar, daß diese nun in einem andern Sinne “Zahlen” seien, als z.B. die Quadratzahlen; und als die Kardinalzahlen.

Ts-213 765r[2] Könnten die Berechnungen eines Ingenieurs ergeben, daß die Stärke eines Maschinenteils bei gleichmäßig wachsender Belastung in der Reihe der Primzahlen fortschreiten müsse?

Ts-213 766r[1] 43 ***Regellose unendliche Dezimalzahl.***

Ts-213 766r[2] “Regellose unendliche Dezimalzahl”. Die Auffassung ist immer die, als ob wir nur Wörter unserer Umgangssprache zusammenstellen brauchten, und die Zusammenstellung hätte damit einen Sinn, den wir jetzt eben erforschen müßten – wenn er uns nicht gleich ganz klar sein sollte. Es ist, als wären die Wörter Ingredienzien einer chemischen Verbindung, die wir zusammenschütten, sich miteinander verbinden lassen, und nun müßten wir eben die Eigenschaften der (*betreffenden*) Verbindung untersuchen. Wer sagte, er verstünde den Ausdruck “regellose unendliche Dezimalzahl” nicht, dem würde geantwortet: “das ist nicht wahr, Du verstehst ihn sehr gut! weißt Du nicht, was die Worte “regellos”, “unendlich” und “Dezimalzahl” bedeuten?! – Nun, dann verstehst Du auch ihre Verbindung”. Und mit dem ‘Verständnis’ ist hier gemeint, daß er diese Wörter in gewissen Fällen anzuwenden weiß und etwa eine *Vorstellung mit ihnen verbindet*. In Wirklichkeit tut der, welcher diese Worte zusammenstellt und fragt “was bedeutet das” etwas ähnliches, wie die kleinen Kinder, die ein Papier mit regellosen Strichen bekritzeln, es dem Erwachsenen zeigen und fragen: “was ist das?”

Ts-213 767r[1] “Unendlich kompliziertes Gesetz”, “unendlich komplizierte Konstruktion”. (“Es glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört, es müsse sich dabei auch etwas denken lassen”.)

Ts-213 767r[2] Wie unterscheidet sich ein unendlich kompliziertes Gesetz vom Fehlen eines Gesetzes?

Ts-213 767r[3] (Vergessen wir nicht: Die Überlegungen der Mathematiker über das Unendliche sind doch lauter endliche Überlegungen. Womit ich nur meine, daß sie ein Ende haben.)

Ts-213 767r[4] "Eine regellose unendliche Dezimalzahl kann man sich z.B. dadurch erzeugt denken, daß endlos gewürfelt wird und die Zahl der Augen jedesmal eine Dezimalstelle ist". Aber, wenn endlos gewürfelt wird, kommt ja eben kein endgültiges Resultat heraus.

Ts-213 767r[5] "Nur der menschliche Intellekt kann das nicht erfassen, ein höherer könnte es!" Gut, dann beschreibe mir die Grammatik des Ausdrucks "höherer Intellekt"; was kann ein solcher erfassen und was nicht, und unter welchen Umständen sage ich, daß ein Intellekt etwas erfaßt? Du wirst dann sehen, daß die Beschreibung des Erfassens das Erfassen selbst ist. (Vergleiche: Lösung eines mathematischen Problems.)

Ts-213 767r[6] & 768r[1]

Nehmen wir an, wir würfen mit einer Münze "Kopf und Adler" und teilen nun eine Strecke AB nach folgender Regel: "Kopf" sagt: nimm die linke Hälfte und teile sie, wie der nächste Wurf vorschreibt. "Adler" sagt: nimm die rechte Hälfte etc. Durch fortgesetztes Würfeln erzeuge ich dann Schnittpunkte, die sich in einem immer kleineren Intervall bewegen. Beschreibt es nun die Lage eines Punktes, wenn ich sage, es solle der sein, dem sich bei fortgesetztem Würfeln die Schnitte unendlich nähern? Hier glaubt man etwa einen Punkt bestimmt zu haben, der einer regellosen unendlichen Dezimalzahl entspricht. Aber die Beschreibung bestimmt doch *ausdrücklich: keinen* Punkt; es sei denn, daß man sagt, daß die Worte "Punkt auf dieser Strecke" auch "einen Punkt bestimmen". Wir verwechseln hier die Vorschrift des Würfelns mit der mathematischen Vorschrift, etwa Dezimalstellen der $\sqrt{2}$ zu erzeugen. Diese mathematischen Vorschriften *sind* die Punkte. D.h., es lassen sich zwischen diesen Vorschriften Beziehungen *finden*, die in ihrer Grammatik den Beziehungen "größer" und "kleiner" zwischen zwei Strecken analog sind und daher mit diesen Worten bezeichnet werden. Die Vorschrift, Stellen der $\sqrt{2}$ auszurechnen, ist das Zahlzeichen der irrationalen Zahl selbst; und ich rede hier von einer "Zahl", weil ich mit diesen Zeichen (gewissen Vorschriften zur Bildung von Rationalzahlen) ähnlich rechnen kann, wie mit den Rationalzahlen selbst. Will ich also analog sagen, die Vorschrift des endlosen Halbierens nach Kopf und Adler bestimme einen Punkt, eine Zahl, so müßte das heißen, daß diese Vorschrift als Zahlzeichen, d.h. analog andern Zahlzeichen, gebraucht werden kann. Das ist aber natürlich nicht der Fall. Sollte diese

Vorschrift einem Zahlzeichen entsprechen, so höchstens (sehr entfernt) dem unbestimmten Zahlwort “einige”, denn sie tut nichts, als eine Zahl offen zu lassen. Mit einem Wort, ihr entspricht nichts anderes, als das ursprüngliche Intervall AB.