Wittgenstein's Writings

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik

Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik

Ludwig
Wittgenstein

I

Ts-222 1[1] & 2[1]

1 Wir verwenden den Ausdruck: "die Übergänge sind durch die Formel ….. bestimmt". Wie wird er verwendet? –

Wir können etwa davon reden, daß Menschen durch Erziehung (Abrichtung) dahingebracht werden, die Formel $y = x^2$ so zu verwenden, daß Alle, wenn sie die gleiche Zahl für x einsetzen, immer die gleiche Zahl für y herausrechnen. Oder wir können sagen: "Diese Menschen sind so abgerichtet, daß sie alle auf den Befehl '+3' auf der gleichen Stufe den gleichen Übergang machen." Wir könnten dies so ausdrücken: "Der Befehl '+3' bestimmt für diese Menschen jeden Übergang von einer Zahl zur nächsten völlig." (Im Gegensatz zu andern Menschen, die auf diesen Befehl nicht wissen, was sie zu tun haben, oder die zwar mit Sicherheit,[→ (vergl. 189)] aber ein jeder in anderer Weise, auf ihn reagieren.) Wir können anderseits verschiedene Arten von Formeln und zu ihnen gehörige verschiedene Arten der Verwendung (verschiedene Arten der Abrichtung) einander entgegensetzen. Wir *nennen* dann Formeln einer bestimmten Art (und der dazugehörigen Verwendungsweise) "Formeln, welche eine Zahl y für ein gegebenes x bestimmen", und Formeln anderer Art, solche, "die die Zahl y für ein gegebenes x nicht bestimmen". ($y = x^2 + 1$ wäre von der ersten Art, $y > x^2 + 1$, $y = x^2 \pm 1$, $y = x^2 + z$ von der zweiten.) Der Satz "die Formel ….. bestimmt eine Zahl y" ist dann eine Aussage über die Form der Formeln und es ist nun ein Satz:

"Die Formel, die ich hingeschrieben habe, bestimmt y", oder "Hier steht eine Formel, die y bestimmt", zu unterscheiden von einem Satz wie: "Die Formel $y = x^2$ bestimmt die Zahl y für ein gegebenes x". Die Frage "Steht dort eine Formel, die y bestimmt?" heißt dann dasselbe wie: "Steht dort eine Formel dieser Art, oder jener Art?"; was wir aber mit der Frage anfangen sollen: "Ist $y = x^2$ eine Formel, die y für ein gegebenes x bestimmt?" – ist nicht ohne weiteres klar. Diese Frage könnte man etwa an einen Schüler stellen, um zu prüfen, ob er die Verwendung des Ausdrucks "bestimmen" versteht; oder es könnte eine mathematische Aufgabe sein, zu berechnen, ob auf der rechten Seite der Formel nur eine Variable steht, wie z.B. im Fall:

$$y = (x^2 + z)^2 - z(2x^2 + z).$$

Ts-222 2[2] **2** "Wie die Formel gemeint wird, das bestimmt, welche Übergänge zu machen sind." Was ist das Kriterium dafür, wie die Formel gemeint ist? Doch wohl die Art und Weise, wie wir sie ständig gebrauchen, wie uns gelehrt wurde, sie zu gebrauchen. Wir sagen z.B. Einem, der ein uns unbekanntes Zeichen gebraucht: "Wenn du mit "x~2" meinst x^2, so erhältst du *diesen* Wert für y, wenn du damit $\sqrt{x}$ meinst, *jenen*." – Frage dich nun: Wie macht man es, mit 'x~2' das eine, oder das andere *meinen*? *So* kann also das Meinen die Übergänge zum voraus bestimmen.

Ts-222 3[1] & 4[1] **3** *Wie weiß ich*, daß ich im Verfolg der Reihe +2 schreiben muß

"20004, 20006"

und nicht

“20004, 20008”? –

(Ähnlich ist die Frage: “Wie weiß ich, daß diese Farbe ‘rot’ ist?”) “Aber Du weißt doch z.B., daß Du immer die *gleiche* Zahlenfolge in den Einern schreiben mußt: 2, 4, 6, 8, 0, 2, 4, u.s.w.” – Ganz richtig! das Problem muß auch schon in dieser Zahlenfolge, ja auch schon in *der* 2, 2, 2, 2, u.s.w. auftreten. – Denn wie weiß ich, daß ich nach der 500sten “2” “2” schreiben soll? daß nämlich an dieser Stelle “2” ‘die gleiche Ziffer’ ist? Und wenn ich es *zuvor* weiß, was hilft mir dies Wissen für später? Ich meine: wie weiß ich dann, wenn der Schritt wirklich zu machen ist, was ich mit jenem früheren Wissen anzufangen habe? (Wenn zur Fortsetzung der Reihe +1 eine Intuition nötig ist, dann auch zur Fortsetzung der Reihe +0.)

Ts-222 5[1] “Aber willst Du sagen, daß der Ausdruck ‘+2’ es für Dich zweifelhaft läßt, was Du, nach 2004 z.B., schreiben sollst?” – Nein; ich antworte ohne Bedenken: “2006”. Aber darum ist es ja überflüssig, daß darüber schon früher etwas bestimmt wurde. Daß ich keinen Zweifel habe, wenn die Frage an mich herantritt, heißt eben nicht, daß sie früher schon beantwortet worden war. “Aber ich weiß doch auch, daß, welche Zahl immer man mir geben wird, ich die folgende gleich mit Sicherheit werde angeben können.” – Ausgenommen ist doch gewiß der Fall, daß ich sterbe, ehe ich dazu komme, und viele andere Fälle. Daß ich aber so sicher bin, daß ich werde fortsetzen können, ist natürlich sehr wichtig. –

Ts-222 6[1] & 7[1]

4 "Worin liegt dann aber die eigentümliche Unerbittlichkeit der Mathematik?" – Wäre für sie nicht ein gutes Beispiel die Unerbittlichkeit, mit der auf eins zwei folgt, auf zwei drei, usw.? – Das heißt doch wohl: in der *Kardinalzahlenreihe* folgt, denn in einer andern Reihe folgt ja etwas anderes. Und ist denn *diese* Reihe nicht eben durch diese Folge *definiert*? – "Soll das also heißen, daß es gleich richtig ist, auf welche Weise immer Einer zählt, und daß jeder zählen kann, wie er will?" – Wir würden es wohl nicht "zählen" nennen, wenn jeder *irgendwie* Ziffern nacheinander ausspräche; aber es ist freilich nicht einfach eine Frage der Benennung. Denn das, was wir "zählen" nennen, ist ja ein wichtiger Teil der Tätigkeiten unseres Lebens. Das Zählen, und Rechnen, ist doch – z.B. – nicht einfach ein Zeitvertreib. Zählen (und das heißt: *so* zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfachsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen: mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit; darum wird unerbittlich darauf gedrungen, daß wir Alle auf "eins" "zwei", auf "zwei" "drei" sagen, u.s.f. – "Aber ist dieses Zählen also nur ein *Gebrauch*; entspricht dieser Folge nicht auch eine Wahrheit?" Die *Wahrheit* ist, daß das Zählen sich bewährt hat. – "Willst du also sagen, daß 'wahr-sein' heißt: brauchbar (oder nützlich) sein?" – Nein; sondern, daß man von der natürlichen Zahlenreihe – ebenso wie von unserer Sprache – nicht sagen kann, sie sei wahr, sondern: sie sei brauchbar und, vor allem, *sie werde verwendet*.

Ts-222 7[2] 5 “Aber folgt es nicht mit logischer Notwendigkeit, daß du Zwei erhältst, wenn du zu eins eins zählst, und drei, wenn du zu zwei eins zählst, u.s.f.; und ist diese Unerbittlichkeit nicht dieselbe, wie die des logischen Schlusses?” – Doch! sie ist dieselbe. – “Aber entspricht denn der logische Schluß nicht einer Wahrheit? Ist es nicht *wahr*, daß das aus diesem folgt?” – Der Satz: “es ist wahr, daß das aus diesem folgt”, heißt einfach: das folgt aus diesem. Und wie verwenden wir diesen Satz? – Was würde denn geschehen, wenn wir anders schlössen – *wie* würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten?

Ts-222 8[1]

Wie würden wir mit der Wahrheit in Konflikt geraten, wenn unsere Zollstäbe aus sehr weichem Gummi wären, statt aus Holz und Stahl? – "Nun, wir würden nicht das richtige Maß des Tisches kennen lernen." – Du meinst, wir würden nicht, oder nicht zuverlässig, *die* Maßzahl erhalten, die wir mit unsern harten Maßstäben erhalten. *Der* wäre also im Unrecht, der den Tisch mit dem dehnbaren Maßstab gemessen hätte und behauptete, er mäße 1.80 m nach unserer gewöhnlichen Meßart; sagt er aber, der Tisch mißt 1.80 m nach der seinen, so ist das richtig. – "Aber das ist dann doch überhaupt kein Messen!" – Es ist unserm Messen ähnlich & kann unter Umständen 'praktische Zwecke' erfüllen. (Ein Kaufmann könnte auf diese Weise verschiedene Kunden verschieden behandeln.) Einen Maßstab, der sich bei geringer Erwärmung außerordentlich stark ausdehnte, würden wir – unter gewöhnlichen Umständen – deshalb *unbrauchbar* nennen. Wir könnten uns aber Verhältnisse denken, in denen gerade dies das Erwünschte wäre. Ich stelle mir vor, wir nehmen die Ausdehnung mit freiem Auge wahr; und wir legen Körpern in Räumen von ungleicher Temperatur die gleiche Maßzahl der Länge bei, wenn sie auf dem Maßstab, der fürs Auge bald länger bald kürzer ist, gleich weit reichen. Man kann dann sagen: Was hier "messen" und "Länge" und "längengleich" heißt, ist etwas Anderes, als was wir so nennen. Der Gebrauch dieser Wörter ist hier ein anderer, als der unsere; aber er ist mit ihm *verwandt*, und auch wir gebrauchen diese Wörter auf vielerlei Weise.

Ts-222 9[1] & 10[1]

6 Man muß sich klar machen, worin Schließen eigentlich besteht. Man wird etwa sagen, es besteht im Übergang von einer Behauptung zu einer andern. Aber heißt das, daß Schließen etwas ist, was stattfindet beim Übergang von der einen zur andern Behauptung, also *ehe* die andere ausgesprochen ist – oder, daß Schließen darin besteht, die eine Behauptung auf die andere folgen zu lassen, d.h., z.B. nach ihr auszusprechen? Wir stellen uns, verleitet durch die besondere Verwendung des Verbums “schließen”, gern vor, das Schließen sei eine eigentümliche Tätigkeit, ein Vorgang im Medium des Verstandes, gleichsam ein Brauen der Nebel, aus welchem dann die Folgerung auftaucht. Sehen wir aber doch zu, was dabei geschieht! – Da gibt es einen Übergang von einem Satz zum andern auf dem Weg über andere Sätze, also durch eine Schlußkette, aber von diesem brauchen wir nicht zu reden, da er ja eine andere Art von Übergang voraussetzt, nämlich den von einem Glied der Kette zum nächsten. Es kann nun zwischen den Gliedern ein Vorgang der Überleitung stattfinden. An diesem Vorgang ist nun nichts Okkultes; er ist ein Ableiten des einen Satzzeichens aus dem andern nach einer Regel; ein Vergleichen der beiden mit irgendeinem Paradigma, das uns das Schema des Übergangs darstellt; oder dergleichen. Das kann auf dem Papier, mündlich, oder ‘im Kopf’ vor sich gehen. – Der Schluß kann aber auch so gezogen werden, daß der eine Satz, ohne Überleitung, nach dem andern ausgesprochen wird; oder die Überleitung besteht nur darin, daß wir “Also”, oder “Daraus folgt” sagen, oder dergl. Man nennt es dann “Schluß”, wenn der gefolgerte Satz sich tatsächlich aus der Prämisse ableiten *läßt*.

Ts-222 10[2] & 11[1]

7 Was heißt es nun, daß sich ein Satz aus einem andern, vermittels einer Regel, ableiten *läßt*? Läßt sich nicht alles aus allem vermittels ***irgend*** einer Regel – ja nach jeder Regel mit entsprechender Deutung – ableiten? Was heißt es, wenn ich z.B. sage: diese Zahl läßt sich durch die Multiplikation jener beiden erhalten? Dies ist eine Regel, die sagt, daß wir diese Zahl erhalten müssen, wenn anders wir *richtig* multiplizieren; und diese Regel können wir dadurch erhalten, daß wir die beiden Zahlen multiplizieren, oder auch auf andere Weise (obwohl man auch jeden Vorgang, der zu diesem Ergebnis führt, eine 'Multiplikation' nennen könnte). Man sagt nun, ich habe multipliziert, wenn ich die Multiplikation 265 × 463 ausgeführt habe, aber auch, wenn ich sage: "4 mal 2 ist 8", obwohl hier kein Rechnungsvorgang zum Produkt geführt hat (das ich aber auch hätte *ausrechnen* können). Und so sagen wir auch, es werde ein Schluß gezogen, wo er nicht errechnet wird.

Ts-222 11[3] & 12[1]

8 Ich darf aber doch nur folgern, was wirklich *folgt*! – Soll das heißen: nur das, was den Schlußregeln gemäß folgt; oder soll es heißen: nur das, was *solchen* Schlußregeln gemäß folgt, die irgendwie mit einer Realität übereinstimmen? Hier schwebt uns in vager Weise vor, daß diese Realität etwas sehr abstraktes, sehr allgemeines und sehr hartes ist. Die Logik ist eine Art von Ultra-Physik, die Beschreibung des 'logischen Baus' der Welt, den wir durch eine Art von Ultra-Erfahrung wahrnehmen (mit dem Verstande etwa). Es schweben uns hier vielleicht Schlüsse vor wie dieser: "Der Ofen raucht, also ist das Ofenrohr wieder verlegt." (Und *so* wird dieser Schluß gezogen! Nicht so: "Der Ofen raucht, und wenn immer der Ofen raucht, ist das Ofenrohr verlegt; also .....".)

Ts-222 9 Was wir ‘logischer Schluß’ nennen, ist eine Transformation
12[2] des Ausdrucks. Z.B. die Umrechnung von einem Maß auf ein anderes. Auf der einen Kante eines Maßstabes sind Zoll aufgetragen, auf der andern cm. Ich messe den Tisch in Zoll und gehe dann *auf dem Maßstab* zu cm über. – Und freilich gibt es auch beim Übergang von einem Maß zum andern richtig und falsch; aber mit welcher Realität stimmt hier das Richtige überein? Wohl mit einer *Abmachung*, oder einem *Gebrauch*, und etwa mit den praktischen Bedürfnissen.

Ts-222 13[1]

10 “Aber muß denn nicht – z.B. – aus “(x).fx” “fa” folgen, *wenn* “(x).fx” so gemeint ist, wie wir es meinen?” – Und wie äußert es sich, *wie* wir es meinen? Nicht durch die ständige Praxis seines Gebrauchs? und etwa noch durch gewisse *Gesten* – und was dem ähnlich ist. − − Es ist aber, als hinge dem Wort “alle”, wenn *wir* es sagen, noch etwas an, womit ein anderer Gebrauch unvereinbar wäre; nämlich die *Bedeutung*. “‘Alle’ heißt doch: ***alle***!” möchten wir sagen, wenn wir sie erklären sollen; und dabei machen wir eine gewisse Geste und Miene. Hacke alle diese Bäume um! − − Ja, verstehst Du nicht, was ‘*alle*’ heißt? (Er hatte *einen* stehen lassen.) Wie hat er gelernt, was ‘alle’ heißt? Doch wohl durch Übung. – Und freilich diese Übung hat nun nicht nur bewirkt, daß er auf den Befehl *das tut*, – sondern sie hat das Wort mit einer Menge von Bildern (visuellen und andern) umgeben, von denen das eine oder das andere auftaucht, wenn wir das Wort hören und aussprechen. (Und wenn wir Rechenschaft darüber geben sollen, was die ‘Bedeutung’ des Wortes ist, greifen wir zuerst *ein* Bild aus dieser Masse heraus – und verwerfen es dann wieder als unwesentlich, wenn wir sehen, daß einmal dies, einmal jenes auftritt, und manchmal keines.) Man lernt die Bedeutung von “alle” indem man lernt, daß aus “(x).fx” “fa” folgt. – Die Übungen, die den Gebrauch dieses Wortes einüben, seine Bedeutung lehren, zielen immer dahin, daß eine Ausnahme nicht gemacht werden darf.

Ts-222 14[1]

11 Wie *lernen* wir denn Schließen? Oder lernen wir es nicht –? Weiß das Kind, daß aus der doppelten Verneinung die Bejahung folgt? – Und wie *überzeugt* man es davon? Wohl dadurch, daß man ihm einen Vorgang zeigt (eine doppelte Umkehrung, zweimalige Drehung um 180, u. dergl.) den es nun als Bild der Verneinung annimmt. Und man macht den Sinn von "(x).fx" klar, indem man darauf dringt, daß aus ihm "fa" folgt.

Ts-222 15[1]

12 207 "Aus 'alle', wenn es *so* gemeint ist, muß doch *das* folgen." – Wenn es *wie* gemeint ist? Überlege es Dir, wie meinst Du es? Da schwebt Dir etwa noch ein Bild vor – und mehr hast Du nicht. – Nein, es *muß* nicht – aber es *folgt*: Wir *vollziehen* diesen Übergang. Und wir sagen: Wenn das nicht folgt, dann waren es eben nicht ***alle***! – – und das zeigt nur, wie wir mit Worten in so einer Situation reagieren. –

Ts-222 15[2]

13 Es kommt uns vor, daß, außer dem *Gebrauch* des Wortes "alle" noch etwas anderes sich geändert haben muß, wenn aus "(x).fx" nicht mehr "fa" folgen soll; etwas, was dem Wort selbst anhängt. Ist das nicht ähnlich, wie wenn man sagt: "Wenn dieser Mensch anders handelte, dann müßte auch sein Charakter ein anderer sein." Nun das kann in manchen Fällen etwas heißen und in manchen nicht. Wir sagen: "aus dem Charakter fließt die Handlungsweise", und so fließt aus der Bedeutung der Gebrauch. [→ Siehe Bemerkung 'die Medizin hilft']

Ts-222 15[3] & 16[1] 14 Das zeigt Dir – könnte man sagen – wie fest verbunden gewisse Gesten, Bilder, Reaktionen, mit einem ständig geübten Gebrauch sind. ‘Es drängt sich uns das Bild auf .....’. Es ist sehr interessant, daß sich Bilder uns *aufdrängen*. Und wäre das nicht, wie könnte ein Satz wie der “What’s done cannot be undone” uns etwas sagen.

Ts-222 16[2] 15 210 Wichtig ist, daß in unserer Sprache – in unserer natürlichen Sprache – ‘alle’ ein Grundbegriff ist und ‘alle außer einem’ weniger fundamental; d.h., es gibt dafür nicht *ein* Wort, auch nicht eine charakteristische Geste.

Ts-222 16[3] 16 Der *Witz* des Wortes “alle” ist ja, daß es keine Ausnahme zuläßt. – Ja, das ist der Witz seiner Verwendung in unserer Sprache; aber welche Verwendungsarten wir als ‘Witz’ empfinden, das hängt damit zusammen, welche Rolle diese Verwendung in unserm ganzen Leben spielt. [→ Siehe = , ε, ist.]

Ts-222 17[1]

17 Auf die Frage, worin denn das Schließen besteht, hören wir etwa: "Wenn ich die Wahrheit der Sätze …… erkannt habe, so bin ich nun berechtigt, …… hinzuschreiben." – Inwiefern berechtigt? Hatte ich früher kein Recht, es hinzuschreiben? − − "Jene Sätze überzeugen mich von der Wahrheit dieses Satzes." Aber darum handelt sich's natürlich auch nicht. − − "Nach diesen Gesetzen vollführt der Geist die besondere Tätigkeit des logischen Schließens." Das ist gewiß interessant und wichtig; aber ist es denn auch wahr? schließt er immer nach *diesen* Gesetzen? Und worin besteht die besondere Tätigkeit des Schließens? − − Darum ist es notwendig, zu schauen, wie wir denn in der Praxis der Sprache Schlüsse vollziehen; was denn das Schließen im Sprachspiel für ein Vorgang ist. Z.B.: In einer Vorschrift steht: "Alle, die über 1.80 m hoch sind, sind in die ….. Abteilung aufzunehmen." Ein Kanzlist verliest die Namen der Leute, dazu ihre Höhe. Ein anderer teilt sie den und den Abteilungen zu. – N.N., 1.90 m. – "Also N.N. in die ….. Abteilung." Das ist Schließen.

Ts-222 18[1]

18 Was nennen wir, nun, 'Schlüsse' bei Russell, oder bei Euklid? Soll ich sagen: die Übergänge von einem Satz zum nächsten im Beweis? Aber wo steht der *Übergang*? – Ich sage, bei Russell folge ein Satz aus einem andern, wenn jener aus diesem gemäß der Stellung der beiden in einem Beweise, und den ihnen beigefügten Zeichen, abzuleiten ist, – wenn wir das Buch lesen. Denn, dieses Buch zu lesen ist ein Spiel, welches gelernt sein will.

Ts-222 18[2]

19 Oberflächen-Verwendung & Verwendung im Sprachspiel. Man ist sich oft im Unklaren, worin das Folgen und Folgern eigentlich besteht; was für ein Sachverhalt, und Vorgang, es ist. Die eigentümliche Verwendung dieser Verben legt uns nahe, daß Folgen das Bestehen einer Verbindung zwischen Sätzen ist, der wir beim Folgern nachgehen. Dies zeigt sich sehr lehrreich in Russell's Darstellung ('Principia Mathematica'). Daß ein Satz $\vdash q$ aus einem Satz $\vdash p \supset q . p$ folgt, ist hier ein logisches Grundgesetz:

$$\vdash p \supset q . p . \supset . \vdash q$$

Dieses berechtige uns nun, heißt es, $\vdash q$ aus $\vdash p \supset q . p$ zu schließen. Aber worin besteht denn 'schließen', die Prozedur, zu der wir berechtigt werden? Doch darin, den einen Satz – in irgendeinem Sprachspiel – nach dem andern als Behauptung auszusprechen, anzuschreiben, und dergl.; und wie kann mich jenes Grundgesetz *dazu* berechtigen?

Ts-222 19[1]

20 Russell will doch sagen: “*So* werde ich schließen und so ist es *richtig*.” Er will uns also einmal mitteilen, wie er schließen will: das geschieht durch eine *Regel* des Schließens. Wie lautet sie? Daß dieser Satz jenen impliziert? — – – Doch wohl, daß in den Beweisen dieses Buchs ein solcher Satz nach einem solchen stehen soll. – Aber es soll ja ein logisches Grundgesetz sein, daß es *richtig* ist, so zu schließen! – Dann müßte das Grundgesetz lauten: “Es ist richtig vom ..... auf ..... zu schließen”; und dieses Grundgesetz sollte nun wohl einleuchten – – aber dann wird uns eben die Regel selbst als richtig, oder berechtigt, einleuchten. “Aber diese Regel handelt doch von Sätzen in einem Buch, und das gehört doch nicht in die Logik!” – Ganz richtig; die Regel ist wirklich nur eine Mitteilung, daß in diesem Buche nur *dieser* Übergang von einem Satz zum andern gebraucht wird (gleichsam eine Mitteilung aus dem Index) denn die Richtigkeit des Übergangs muß an Ort und Stelle einleuchten; und der Ausdruck des ‘logischen Grundgesetzes’ ist dann die *Folge der Sätze* selbst.

Ts-222 19[2] & 20[1]

21 Russell scheint mit jenem Grundgesetz von einem Satz zu sagen: “Er folgt schon – ich brauche ihn nur noch zu folgern.” So heißt es einmal bei Frege, die Gerade, welche je zwei Punkte verbindet, sei eigentlich schon da, ehe wir sie zögen und so ist es auch, wenn wir sagen, die Übergänge der Reihe +2 etwa, wären eigentlich bereits gemacht, ehe wir sie mündlich oder schriftlich machen, – gleichsam nachzögen.

Ts-222 20[2] & 21[1]

22 Einem, der dies sagt, könnte man antworten: Du verwendest hier ein Bild. Man *kann* die Übergänge, die Einer in einer Reihe machen soll, dadurch *bestimmen*, daß man sie ihm vormacht. Indem man z.B. die Reihe, die er schreiben soll, in einer anderen Notation hinschreibt, daß er sie nur noch zu übertragen hat, oder indem man sie wirklich ganz dünn vorschreibt und er hat sie nachzuziehen. Im ersten Fall können wir auch sagen, wir schreiben nicht *die* Reihe an, die er zu schreiben hat, machen also die Übergänge dieser Reihe selbst nicht; im zweiten Falle aber werden wir gewiß sagen, die Reihe, die er schreiben soll, sei schon vorhanden. Wir würden dies auch sagen, wenn wir ihm, was er hinzuschreiben hat, *diktieren*, obwohl wir dann eine Reihe von Lauten hervorbringen und er eine Reihe von Schriftzeichen. Es ist jedenfalls eine sichere Art, die Übergänge, die Einer zu machen hat, zu *bestimmen*, sie ihm, in irgendeinem Sinne, schon vorzumachen. – Wenn wir daher diese Übergänge in einem ganz andern Sinne bestimmen, indem wir nämlich unsern Schüler einer Abrichtung unterziehen, wie z.B. unsere Kinder sie im Einmaleins und im Multiplizieren erhalten, so nämlich, daß Alle, die so abgerichtet sind, nun beliebige Multiplikationen, die sie nicht in ihrer Lehrzeit gemacht haben, auf die gleiche Weise und mit übereinstimmenden Resultaten ausführen – wenn also die Übergänge, die Einer auf den Befehl +2 zu machen hat, durch Abrichtung so bestimmt sind, daß wir mit Sicherheit voraussagen können, wie er gehen wird, auch wenn er *diesen* Übergang bis jetzt noch nie gemacht hat, – dann kann es uns natürlich sein, als Bild dieses Sachverhalts den zu gebrauchen: die Übergänge seien bereits alle gemacht, er schriebe sie nur

noch hin. [Von der Auffassung der Möglichkeit als Schatten der Wirklichkeit wird oft zu reden sein.]

Ts-222 23 “Aber wir folgern doch diesen Satz aus jenem, weil er
23[1] tatsächlich folgt! Wir überzeugen uns doch, daß er folgt.” Wir überzeugen uns, daß, was hier steht, aus dem folgt, was dort steht. Und dieser Satz ist *zeitlich* gebraucht.

Ts-222 24 [→ Siehe S. 171/252] Trenne die Gefühle (Gebärden) der
24[1] Übereinstimmung, von dem, was Du mit dem Beweise *machst*! Bezieht es sich auf [→ 172: Wer so rechnet]?

Ts-222 25 Wie ist es aber, wenn ich mich davon überzeuge, daß das
25[1] Schema dieser Striche | | | | |

(*a*

gleichzahlig ist dem Schema dieser Eckpunkte:

(*b*

(ich habe die Schemata absichtlich einprägsam gemacht), indem ich zuordne:

(*c*

Nun, wovon überzeuge ich mich denn, wenn ich diese Figur ansehe? Ich sehe einen Stern mit fadenförmigen Fortsätzen. –

Ts-222 25[2] **26** Aber ich kann von der Figur so Gebrauch machen: Fünf Leute stehen im Fünfeck aufgestellt; an der Wand stehen Stäbe, wie die Striche in (a); ich sehe auf die Figur (c) und sage: “ich kann jedem der Leute einen Stab geben.” Ich könnte die Figur (c) als schematisches *Bild* davon auffassen, daß ich den fünf Leuten je einen Stab gebe.

Ts-222 25[3] & 26[1] **27** Wenn ich nämlich erst ein beliebiges Vieleck zeichne

und dann eine beliebige Reihe von Strichen

||||||||||||||||||

so kann ich nun durch Zuordnung herausfinden, ob ich oben soviele Ecken habe, wie unten Striche. (Ich weiß nicht, was herauskommen würde.) Und so kann ich auch sagen, ich habe mich durch das Ziehen der Projektionslinien davon überzeugt, daß am oberen Ende der Figur (c) soviele Striche stehen, wie der Stern unten Ecken hat. (Zeitlich!) In dieser Auffassung gleicht die Figur nicht einem mathematischen Beweise (so wenig, wie es ein mathematischer Beweis ist, wenn ich einer Gruppe von Leuten einen Sack Äpfel austeile und finde, daß Jeder gerade *einen* Apfel kriegen kann). Ich kann die Figur (c) aber als mathematischen Beweis auffassen. Geben wir den Gestalten der Schemata (a) und (b) Namen! Die Gestalt a heiße “Hand”, H., die Gestalt b “Drudenfuß”, D. Ich habe bewiesen, daß H. soviel Striche hat, wie D. Ecken. Und dieser Satz ist wieder unzeitlich.

Ts-222 26[2] & 27[1]

28 Ein Beweis – kann ich sagen – ist *eine* Figur, an deren einem Ende gewisse Sätze stehen und an derem andern Ende ein Satz stehe (den wir den 'bewiesenen' nennen). Man kann als Beschreibung so einer Figur sagen: in ihr folge der Satz ..... aus ...... Das ist eine Form der Beschreibung eines *Musters*, das z.B. auch ein Ornament (Tapetenmuster) sein könnte. Ich kann also sagen: "In dem Beweise, welcher auf jener Tafel steht, folgt der Satz p aus q und r", und das ist einfach eine Beschreibung dessen, was dort zu sehen ist. Es ist aber nicht der mathematische Satz, daß p aus q und r folgt. Dieser hat eine andere Anwendung. Er sagt – so könnte man es ausdrücken – daß es Sinn hat, von einem Beweise (Muster) zu reden, in welchem p aus q und r folgt. Wie man sagen kann, der Satz "weiß ist heller als schwarz" sage aus, es habe Sinn, von zwei Gegenständen zu reden, von denen der hellere weiß, der andere schwarz sei, aber nicht von zwei Gegenständen, von denen der hellere schwarz, der andere weiß sei.

Ts-222 27[2]

29 Denken wir uns, wir hätten das Paradigma für "heller" und "dunkler" in Form eines weißen und schwarzen Flecks gegeben, und nun leiten wir mit seiner Hilfe sozusagen ab: daß Rot dunkler ist als Weiß.

Ts-222 27[3]

30 Der durch (c) bewiesene Satz dient nun als neue Vorschrift zum Konstatieren der Gleichzahligkeit: Hat man eine Menge von Gegenständen in Form der Hand angeordnet und eine andere als die Ecken eines Drudenfußes, so sagen wir, die beiden Mengen seien gleichzahlig.

Ts-222 27[4] & 28[1]

31 "Aber ist das nicht bloß, weil wir H. und D. schon einmal zugeordnet haben und gesehen, daß sie gleichzahlig sind?" – Ja aber, wenn sie es in *einem* Fall waren – wie weiß ich, daß sie es jetzt wieder sein werden? – "Weil es eben im *Wesen* der H. und des D. liegt, daß sie gleichzahlig sind." – Aber wie konntest Du *das* durch die Zuordnung herausbringen? (Ich dachte, die Zählung, oder Zuordnung ergibt nur, daß diese beiden Gruppen, die ich jetzt vor mir habe, gleichzahlig – oder ungleichzahlig – sind.) – "Aber wenn er nun eine H. von Dingen hat und einen D. von Dingen und er ordnet sie nun tatsächlich einander zu, so ist es doch nicht *möglich*, daß er etwas anderes erhält, als daß sie gleichzahlig sind. – Und, daß es nicht möglich ist, das sehe ich doch aus dem Beweis." – Aber *ist* es denn nicht möglich? Wenn er z.B. – wie ein Anderer sagen könnte – eine der Zuordnungslinien zu ziehen *übersieht*. Aber ich gebe zu, daß er in der ungeheuern Mehrzahl der Fälle immer das gleiche Resultat erhalten wird und, erhielte er es nicht, sich für irgendwie gestört halten würde. Und wäre es nicht so, so würde dem ganzen Beweis der Boden entzogen. Wir entscheiden uns nämlich, das Beweisbild statt einer Zuordnung der Gruppen zu gebrauchen; wir ordnen sie *nicht* zu, sondern vergleichen *statt dessen* die Gruppen mit denen des Beweises (in welchem allerdings zwei Gruppen einander zugeordnet sind). (Wie wir uns entscheiden ...

Induktionsbeweis

1 _ : 3 = 0 . 3
1

Dreieck im euklidischen Beweis.

Ts-222 28[2] & 29[1] 32 Ich könnte als Resultat des Beweises auch sagen: “Eine H. und ein D. heißen von nun an ‘gleichzahlig’”. Oder: Der Beweis *erforscht* nicht das Wesen der beiden Figuren, aber er spricht aus, was ich von nun an zum Wesen der Figuren rechnen werde. – – Was zum Wesen gehört, lege ich unter den Paradigmen der Sprache nieder. Man könnte sich in Greenwich eine mathem. Bibliothek denken. Der Mathematiker erzeugt *Wesen*.

Ts-222 29[2] 33 Wenn ich sage: “Dieser Satz folgt aus jenem”, so ist das die Anerkennung einer Regel. Sie geschieht *auf Grund* des Beweises. D.h., ich lasse mir diese Kette (diese Figur) als *Beweis* gefallen. – – “Aber könnte ich denn anders? *Muß* ich mir sie nicht gefallen lassen?” – Warum sagst Du, Du müßtest? Doch darum, weil Du am Schlusse des Beweises etwa sagst: “Ja – ich muß diesen Schluß anerkennen.” Aber das ist doch nur der Ausdruck Deiner unbedingten Anerkennung. – D.h., glaube ich: die Worte “Das muß ich zugeben” werden in *zweierlei* Fällen gebraucht: wenn wir einen Beweis erhalten haben – aber auch in Bezug auf den einzelnen Schritt selber des Beweises. [→ (Siehe S. 173)]

Ts-222 29[3] & 30[1] 34 Und worin äußert es sich denn, daß der Beweis mich *zwingt*? Doch darin, daß ich so und so darauf vorgehe, daß ich mich weigere, einen anderen Weg zu gehen. Als letztes Argument, gegen Einen, der so nicht gehen wollte, würde ich nur noch sagen: “Ja siehst Du denn nicht …… !” – und das ist doch kein *Argument*.

Ts-222 30[2] 35 "Aber, wenn Du recht hast, wie kommt es dann, daß sich alle Menschen (oder doch alle normalen Menschen) diese Figuren als Beweise dieser Sätze gefallen lassen?" – Ja, es besteht eine große – und interessante – Übereinstimmung.

Ts-222 30[3] & 31[1] 36 Denk' Dir, Du hättest eine Reihe von Kugeln vor Dir; Du numerierst sie mit arabischen Ziffern und es geht von 1 bis 100; dann machst Du nach je 10 einen größern Abstand; in jedem Reihenstück von je 10 einen etwas kleineren Abstand in der Mitte, zwischen 5 und 5 – so werden die 10 übersichtlich; nun nimmst Du die Zehnerstücke und legst sie **unter**einander und machst in der Mitte der Kolonne einen etwas größeren Abstand, also zwischen fünf Reihen und fünf Reihen; nun numerierst Du die Reihen von 1 bis 10. – Du hast, gleichsam, mit den Kugeln exzerpiert. Ich kann sagen, ich habe Eigenschaften der hundert Kugeln entfaltet. – Nun aber denk' Dir, daß dieser ganze Vorgang, dies Experiment mit den hundert Kugeln, gefilmt wurde. Ich sehe nun auf der Leinwand doch nicht ein Experiment, das Bild eines Experiments ist doch nicht selbst ein Experiment. – Aber das 'mathematisch Wesentliche' sehe ich nun auch in der Projektion! Denn es erscheinen da zuerst 100 Flecke, dann werden sie in Zehnerstücke eingeteilt, usw. usw. Ich könnte also sagen: der Beweis dient mir nicht als Experiment, wohl aber als Bild eines Experiments.

Ts-222 31[2]

37 Lege 2 Äpfel auf die leere Tischplatte, schau daß niemand in ihre Nähe kommt und der Tisch nicht erschüttert wird; nun lege noch 2 Äpfel auf die Tischplatte; nun zähle die Äpfel, die da liegen. Du hast ein Experiment gemacht; das Ergebnis der Zählung ist wahrscheinlich 4. (Wir würden das Ergebnis x so darstellen: wenn man unter den und den Umständen erst 2 dann noch 2 Äpfel auf einen Tisch legt, verschwindet zumeist keiner, noch kommt einer dazu.) Und analoge Experimente kann man, mit dem gleichen Ergebnis, mit allerlei festen Körpern ausführen. – So lernen ja die Kinder bei uns rechnen, denn man läßt sie 3 Bohnen hinlegen und noch 3 Bohnen und dann zählen, was da liegt. Käme dabei einmal 5, einmal 7 heraus (weil, *wie wir jetzt sagen würden*, einmal von selbst eine dazu, einmal eine weg käme), so würden wir zunächst Bohnen als für den Rechenunterricht ungeeignet erklären. Geschähe das Gleiche aber mit Stäben, Fingern, Strichen und den meisten andern Dingen, so hätte das Rechnen damit ein Ende. “Aber wäre dann nicht doch noch 2 + 2 = 2?” – Dieses Sätzchen wäre damit unbrauchbar geworden. –

Ts-222 32[2]

38 “Du brauchst ja nur auf die Figur

zu sehen, um zu sehen, daß 2 + 2 = 4 ist.” – Dann brauche ich nur auf die Figur

zu schauen, um zu sehen, daß 2 + 2 + 2 = 4 ist.

[→ Siehe S. 173/257]

Ts-222 33[1] **39** Wovon überzeuge ich Einen, der jene Abbildung im Film des Versuchs mit den hundert Kugeln verfolgt? Man könnte sagen: davon, daß sich dies so zugetragen hat. – Aber das wäre keine mathematische Überzeugung. − − Aber kann ich denn nicht sagen: *ich präge ihm einen Vorgang ein*? Dieser Vorgang ist die Umgruppierung einer Reihe von 100 Dingen in 10 Reihen zu 10. Und dieser Vorgang ist *tatsächlich* immer wieder leicht durchzuführen. Und davon kann er mit Recht überzeugt sein.

Ts-222 34[1] **40** Und so prägt der Beweis (238) durch Ziehen der Projektionslinien einen Vorgang ein, den der eins-zu-eins Zuordnung der H. und des D.– “Aber *überzeugt* er mich nicht auch davon, daß diese Zuordnung *möglich* ist?” – heißt hier “diese Zuordnung” die der Figuren des Beweises selbst? Es kann nicht etwas zugleich Maß & gemessen sein. Wenn das heißen soll: daß Du sie immer ausführen kannst –, so muß das durchaus nicht wahr sein. Aber das Ziehen der Projektionslinien überzeugt uns davon, daß oben soviele Striche sind, wie unten Ecken; und es liefert eine Vorlage, um danach solche Figuren einander zuzuordnen. – “Aber zeigt die Vorlage dadurch nicht, daß es geht? nicht daß es diesmal ging! Im dem Sinne, in welchem es nicht ginge, wenn oben statt | | | | | die Figur | | | | | | stünde” – Wieso? geht es denn da nicht? *So* z.B.:

Diese Figur könnte doch auch als Beweis für etwas angewandt werden! Und zwar um zu zeigen daß man Gruppen dieser Formen *nicht* 1–1 zuordnen kann. Eine 1–1 Zuordnung ist hier unmöglich heißt etwa: die Figur – – –, die Figur – – – & 1–1 Zuordnung passen nicht zusammen. “So hab’ ich’s nicht gemeint!" – Dann zeig' mir, wie Du's meinst, und ich werde es machen. Ich werde etwa auf die Figur hier eine Zuordnung zu machen versuchen, aber nicht die andere & werde sagen jene sei nicht möglich. Aber kann ich denn nicht sagen, die Figur zeige, *wie* eine solche Zuordnung möglich ist – und muß sie darum nicht auch zeigen, *daß* sie möglich ist? –

Ts-222 34[2] & 35[1] & 36[1]

41 Was war denn damals der Sinn davon, daß wir vorschlugen, den Formen der 5 parallelen Striche und des Fünfecksterns Namen beizulegen? Was ist damit geschehen, daß sie Namen erhalten haben? Es wird dadurch etwas über die Art des Gebrauchs dieser Figuren angedeutet. Nämlich – daß man sie auf einen Blick als die und die erkennt; man zählt dazu nicht ihre Striche oder Ecken; sie sind für uns Gestalttypen, wie Messer und Gabel, die Buchstaben und Ziffern. Ich kann also auf den Befehl: "Zeichne eine H." (z.B.) diese Form unmittelbar wiedergeben. – Nun lehrt mich der Beweis eine Zuordnung der beiden Formen. (Ich möchte sagen, es seien in dem Beweis nicht bloß diese individuellen Figuren zugeordnet, sondern die *Formen selbst*; aber das heißt doch nur, daß ich mir jene Formen gut einpräge.) Kann ich nun, wenn ich die Formen H. und D. einander so zuordnen will, nicht in Schwierigkeiten geraten – indem etwa eine Ecke unten zuviel, oder oben ein Strich zuviel ist? – "Aber doch nicht, wenn Du wirklich wieder H. und D. gezeichnet hast! – Und das läßt sich ja beweisen; sieh diese Figur an!"

– Diese Figur lehrt mich eine neue Art der Kontrolle dafür, daß ich wirklich die gleichen Figuren hingezeichnet habe; aber kann ich, wenn ich mich nun nach dieser Vorlage richten will, nicht dennoch in Schwierigkeiten geraten? Ich sage aber, ich bin sicher, daß ich normalerweise in keine Schwierigkeiten kommen werde.

Ts-222 36[2] 42 Es gibt ein Geduldspiel, das darin besteht, eine bestimmte Figur, z.B. ein Rechteck, aus gegebenen Stücken zusammenzusetzen. Die Teilung der Figur ist eine solche, daß es uns schwer wird, die richtige Zusammenstellung der Teile zu finden. Sie sei etwa diese

Was findet der, dem die Zusammensetzung gelingt? – Er findet: eine Lage – an welche er früher nicht gedacht hat. – Gut; aber kann man also nicht sagen: er überzeugt sich davon, daß man diese Dreiecke so zusammensetzen kann? – Aber diese Dreiecke: sind es die, welche oben im Rechteck liegen, oder sind es Dreiecke, die erst so zusammengesetzt werden sollen?

Ts-222 36[3] & 37[1] 43 Wer sagt: “Ich hätte nicht geglaubt, daß man diese Figuren so zusammensetzen kann”, dem kann man doch nicht, auf das zusammengesetzte Geduldspiel zeigend, sagen: “So, Du hast nicht geglaubt, daß man die Stücke so zusammensetzen kann?” – Er würde antworten: “Ich meine, ich habe an diese Art der Zusammensetzung garnicht gedacht.”

Ts-222 37[2] 44 Denken wir uns die physikalischen Eigenschaften der Teile des Geduldspiels so, daß sie in die gesuchte Lage nicht kommen können. Aber nicht, daß man einen Widerstand empfindet, wenn man sie in diese Lage bringen will, sondern man macht einfach alle andern Versuche, nur *den* nicht, und die Stücke kommen auch durch Zufall nicht in diese Lage. Es ist gleichsam diese Lage aus dem Raum ausgeschlossen. Als wäre hier ein ‘blinder Fleck’, etwa in unserem Gehirn. – Und *ist* es denn nicht so, wenn ich glaube, alle *möglichen* Stellungen versucht zu haben und an dieser, wie durch Verhexung, immer vorbeigegangen bin. Kann man nicht sagen: die Figur, die uns die Lösung zeigt, beseitigt eine Blindheit; oder auch, sie ändert Deine Geometrie? Sie zeigt Dir gleichsam eine neue Dimension des Raumes. (Wie wenn man einer Fliege den Weg aus dem Fliegenglas zeigte.)

Ts-222 37[3] & 38[1] 45 Ein Wesen hat diese Lage mit einem Bann umzogen und aus unserm Raum ausgeschlossen.

Ts-222 38[2] 46 Die neue Lage ist wie aus dem Nichts entstanden. Dort, wo früher nichts war, dort ist jetzt auf einmal etwas.

Ts-222 38[3] 47 Inwiefern hat Dich denn die Lösung davon überzeugt, daß man dies und dies kann? – Du konntest es ja früher *nicht* – und jetzt kannst Du es etwa. –

Ts-222 39[1] 48 Ich sagte, ‘ich lasse mir das und das als Beweis eines Satzes gefallen’ – aber kann ich mir die Figur, die die Stücke des Geduldspiels zusammengefügt zeigt, *nicht* als Beweis dafür gefallen lassen, daß man jene Stücke zu diesem Umriß zusammensetzen kann?

Ts-222 39[2]

49 Aber denk nun, eines der Stücke liege so, daß es das *Spiegelbild* des entsprechenden Teils der Vorlage ist. Er will nun die Figur nach der Vorlage zusammensetzen, sieht, es muß gehen, kommt aber nicht auf den Einfall, das Stück umzuwenden und findet, daß ihm das Zusammensetzen nicht gelingt.

Ts-222 39[3] & 40[1]

50 Man kann ein Rechteck aus zwei Parallelogrammen und zwei Dreiecken zusammensetzen. Beweis:

Ein Kind würde die Zusammensetzung eines Rechtecks aus diesen Bestandteilen schwer treffen und davon überrascht sein, daß zwei Seiten der Parallelogramme in eine gerade Linie fallen, wo doch die Parallelogramme schief sind. – Es könnte ihm vorkommen, daß das Rechteck gleichsam durch Zauberei aus diesen Figuren wird. Ja, es muß zugeben, daß sie nun ein Rechteck bilden, aber durch einen Trick, durch eine vertrackte Stellung, auf unnatürliche Weise. Ich kann mir denken, daß das Kind, wenn es die beiden Parallelogramme in *der* Weise zusammengelegt hat, seinen Augen nicht traut, wenn es sieht, daß sie *so* zusammenpassen. '*Sie sehen nicht aus* als ob sie so zusammenpaßten.' Und ich könnte mir denken, daß man sagte: Es erscheint uns nur durch ein Blendwerk, als gäben *sie* das Rechteck – in Wirklichkeit haben sie ihre Natur verändert, sie sind nicht mehr die Parallelogramme.

Ts-222 41[1] 51 “Du gibst *das* zu – dann mußt Du *das* zugeben.” – Er *muß* es zugeben – und dabei ist es möglich, daß er es nicht zugibt! Du willst sagen: “Wenn er *denkt*, muß er es zugeben.” “Ich werde Dir zeigen, warum Du es zugeben mußt. –” Ich werde Dir einen Fall vor Augen führen, welcher, wenn Du ihn bedenkst, Dich bestimmen wird, so zu urteilen.

Ts-222 41[2] 52 Wie können ihn denn die Manipulationen des Beweises dazu bringen, etwas zuzugeben?

Ts-222 41[3] 53 “Du wirst doch zugeben, daß 5 aus 3 und 2 besteht!”

Ich will es nur zugeben, wenn ich damit nichts zugebe. Außer – daß ich *dieses Bild* verwenden will.

Ts-222 41[4] & 42[1] 54 Man könnte z.B. die Figur

als Beweis dafür nehmen, daß 100 Parallelogramme, so zusammengesetzt, einen geraden Streifen geben müssen. Wenn man dann wirklich 100 zusammenfügt, erhält man nun etwa einen schwach gebogenen Streifen. – Der Beweis aber hat uns bestimmt, das Bild und die Ausdrucksweise zu gebrauchen: Wenn sie keinen geraden Streifen geben, waren sie ungenau hergestellt.

Ts-222 42[2] 55 Denke nur, wie kann mich das Bild, das Du mir zeigst (oder der Vorgang) dazu verpflichten, nun so und so immer zu urteilen! Ja, liegt hier ein Experiment vor, so ist *eines* ja doch zu wenig, mich zu irgendeinem Urteil zu verbinden.

Ts-222 42[3]

56 Der Beweisende sagt: “Schau diese Figur an! Was wollen wir dazu sagen? Nicht, daß ein Rechteck aus ..... besteht? –” Oder auch: “Das nennst Du doch ‘Parallelogramme’ und das ‘Dreiecke’ und *so* sieht es doch aus, wenn eine Figur aus andern besteht. –”

Ts-222 42[4] & 43[1]

57 “Ja, Du hast mich überzeugt: ein Rechteck besteht immer aus .....” – Würde ich auch sagen: “Ja Du hast mich überzeugt: *dieses* Rechteck (das des Beweises) besteht aus .....”? Und dies wäre ja doch der bescheidenere Satz; den auch der zugeben sollte, der etwa den allgemeinen Satz noch nicht zugibt. Seltsamerweise aber scheint der, der *das* zugibt, nicht den bescheideneren geometrischen Satz zuzugeben, sondern gar keinen Satz der Geometrie. Freilich, – denn bezüglich des Rechtecks des Beweises hat er mich ja von nichts überzeugt. (Über diese Figur, wenn ich sie früher gesehen hätte, wäre ich ja in keinem Zweifel gewesen.) Ich habe aus freien Stücken, was diese Figur anbelangt, alles zugestanden. Und er hat mich nur *mittels* ihrer überzeugt. – Aber anderseits, wenn er mich nicht einmal bezüglich *dieses* Rechtecks von etwas überzeugt hat, wie dann erst von einer Eigenschaft andrer Rechtecke?

Ts-222 44[3]

58 “Ja, die Form sieht nicht so aus, als könne sie aus zwei windschiefen Teilen bestehen.” Was überrascht Dich? Doch nicht, daß Du jetzt diese Figur vor Dir siehst! Mich überrascht etwas *in* dieser Figur. – Aber in dieser Figur geht ja nichts vor! Mich überrascht die Zusammenstellung des Schiefen mit dem Graden. Mir wird, gleichsam, schwindlig.

Ts-222 45[2]

59 Ich sage aber doch wirklich: “Ich habe mich überzeugt, daß man die Figur aus diesen Teilen legen kann”, wenn ich nämlich etwa die Abbildung der Lösung des Geduldspiels gesehen habe. Wenn ich nun Einem das sage, so soll es doch heißen: “Versuch nur! diese Stücke, richtig gelegt, geben wirklich die Figur.” Ich will ihn aufmuntern etwas zu tun und sage ihm einen Erfolg voraus. Und die Vorhersage beruht auf der Leichtigkeit, mit der man die Figur aus den Stücken zusammensetzen kann, sobald man weiß *wie*.

Ts-222 45[3]

60 Du sagst, Du bist erstaunt über das, was Dir der Beweis zeigt. Aber bist Du erstaunt darüber, daß sich diese Striche haben ziehen lassen? Nein. Du bist erstaunt nur, wenn Du Dir sagst, daß zwei solche Stücke diese Form *geben*. Wenn Du Dich also in die Situation hineindenkst, Du habest Dir etwas anderes erwartet und nun sähest Du das Ergebnis.

Ts-222 45[4] & 46[1]

61 “Aus *dem* folgt unerbittlich *das*.” Ja, in dieser Demonstration geht es aus ihm hervor. Und eine Demonstration ist dies für den, der sie als Demonstration anerkennt. Wer sie *nicht* anerkennt, wer ihr nicht als Demonstration folgt, der trennt sich von uns, noch ehe es zu der Sprache kommt.

Ts-222 46[2]

62

Hier haben wir etwas, was unerbittlich ausschaut. Und doch: ‘unerbittlich’ kann es nur in seinen Folgen sein! Denn sonst ist es nur ein Bild. Worin besteht denn die Fernwirkung – wie man’s nennen könnte – dieses Diagramms?

Ts-222 46[3] 63 Ich habe einen Beweis gelesen – nun bin ich überzeugt. – Wie wenn ich diese Überzeugtheit sofort vergäße! Denn es ist ein eigentümliches Vorgehen: daß ich den Beweis *durchlaufe* und dann sein Ergebnis annehme. − − Ich meine: so *machen* wir es eben. Das ist so bei uns der Brauch, oder eine Tatsache unserer Naturgeschichte.

Ts-222 46[4] & 47[1] 64 'Wenn ich *fünf* habe, so habe ich *drei*, und *zwei*.' − − Aber woher weiß ich, daß ich fünf habe? – Nun, wenn es so | | | | | ausschaut. – Und ist es auch gewiß, daß, wenn es *so* ausschaut, ich es immer in *solche* Gruppen zerlegen kann? Es ist Tatsache, daß wir das folgende Spiel spielen können: Ich lehre Einen, wie eine Zweier-, Dreier-, Vierer-, Fünfergruppe aussieht, und ich lehre ihn, Striche einander eins-zu-eins zuzuordnen; dann lasse ich ihn immer je zweimal den Befehl ausführen: 'Zeichne eine Fünfergruppe" – und dann den Befehl: "Ordne die beiden Gruppen einander zu"; da zeigt es sich, daß er, so gut wie *immer*, die Striche restlos einander zuordnet. Oder auch: es ist Tatsache, daß ich bei der eins-zu-eins Zuordnung dessen, was ich als Fünfergruppen hinzeichne, *so gut wie nie* in Schwierigkeiten komme.

Ts-222 47[2] 65 Ich soll das Geduldspiel zusammenlegen, ich versuche hin und her, bin zweifelhaft, ob ich es zusammenbringen werde. Nun zeigt mir jemand das Bild der Lösung: Nun sage ich – ohne irgendeinen Zweifel – "jetzt kann ich's!" – Ist es denn *sicher*, daß ich es nun zusammenbringen werde? – Aber die Tatsache ist: ich zweifle nicht daran. Wenn nun jemand fragte: "Worin besteht die Fernwirkung jenes Bildes?" – darin daß ich es anwende.

Ts-222 48[1] **66** *In* einer Demonstration *einigen* wir uns mit jemand. Einigen wir uns in ihr nicht, so trennen sich unsere Wege, ehe es zu einem Verkehr mittels dieser Sprache kommt.

Es ist ja nicht wesentlich, daß der Eine den Andern mit der Demonstration überrede. Es können ja beide sie sehen (lesen), und anerkennen.

Ts-222 48[2] **67** "Du siehst doch – es kann doch keinem Zweifel unterliegen, daß eine Gruppe wie A wesentlich aus einer wie

B und einer wie C besteht!" – Ich sage auch – d.h., ich drücke mich auch so aus – daß die Gruppe, die Du hingezeichnet hast, aus den beiden kleineren besteht; aber ich weiß nicht, ob jede Gruppe, die ich eine von der Art (oder Gestalt) der ersten nennen würde, unbedingt aus zwei Gruppen von der Art jener kleineren zusammengesetzt sein wird. − − Ich glaube aber, es wird wohl immer so sein (meine Erfahrung hat mich dies vielleicht gelehrt) und darum will ich als Regel annehmen: Ich will eine Gruppe dann, und nur dann, eine von der Gestalt A nennen, wenn sie in zwei Gruppen wie B und C zerlegt werden kann.

Ts-222 48[3] & 49[1]

68 Und so wirkt auch die Zeichnung [→ 282] als Beweis. “Ja wahrhaftig! zwei Parallelogramme stellen sich zu dieser Form zusammen!” (Das ist sehr ähnlich, wie wenn ich sagte: “Ja wirklich! eine Kurve kann aus graden Stücken bestehen.”) – Ich hätte es nicht gedacht. Ja – nicht, daß die Teile dieser Figur diese Figur ergeben. Das heißt ja nichts. – Sondern ich staune nur, wenn ich denke, ich hätte das obere Parallelogramm ahnungslos auf das untere gestellt und sähe nun dieses Ergebnis.

Ts-222 49[2]

69 [271] Und man könnte sagen: der Beweis hat mich von *dem* überzeugt – was mich überrascht.

Ts-222 49[3]

70 Denn warum sage ich, jene Figur [→ 282] überzeugt mich von etwas und nicht geradeso auch diese:

Sie zeigt doch auch, daß zwei solche Stücke ein Rechteck geben. “Aber das ist uninteressant”, will man sagen. Und warum ist es uninteressant?

Ts-222 49[4] & 50[1]

71 Wenn man sagt: “Diese Form besteht aus diesen Formen” – so denkt man sich die Form als eine feine Zeichnung, ein feines Gestell von dieser Form, auf das gleichsam die Dinge gespannt sind, die diese Form haben. (Vergleiche: Platos Auffassung der Eigenschaft als Ingredientien eines Dings.)

Ts-222 50[3] & 51[1]

72 "Diese Form besteht aus diesen Formen. Du hast mir eine wesentliche Eigenschaft dieser Form gezeigt." – Du hast mir ein neues *Bild* gezeigt. Es ist, als hätte *Gott* sie so zusammengesetzt. – – *Wir bedienen uns also eines Gleichnisses*. Die *Form* wird zum ätherischen Wesen, welches diese Form hat; es ist, als wäre sie ein für allemal so zusammengesetzt worden (von dem, der die wesentlichen Eigenschaften in die Dinge gelegt hat). Denn, wird die Form zum Ding, das aus Teilen besteht, so ist der Werkmeister der Form der, der auch Licht und Dunkelheit, Farbe und Härte, etc., gemacht hat. (Denke, jemand fragte: "Die Form ..... ist aus diesen Teilen zusammengesetzt; wer hat sie zusammengesetzt? Du?") Man hat das Wort "Sein" für eine sublimierte, ätherische Art Existieren gebraucht. Betrachte nun den Satz: "Rot *ist*" (z.B.). Freilich, niemand gebraucht ihn je. Wenn ich mir aber doch einen Gebrauch für ihn erfinden sollte, so wäre es: als einleitende Formel zu Aussagen, die dann vom Wort "rot" Gebrauch machen sollen. Beim Aussprechen der Formel blicke ich auf ein Muster der Farbe Rot. Einen Satz, wie "Rot *ist*" ist man versucht auszusprechen, wenn man die Farbe mit Aufmerksamkeit betrachtet: also in der gleichen *Situation* in welcher man die Existenz eines Ding's feststellt (eines blattähnlichen Insekts z.B.). Und ich will sagen: wenn man den Ausdruck gebraucht, "der Beweis hat mich gelehrt – hat mich davon überzeugt – daß es sich so verhält", ist man noch immer in jenem Gleichnis.

Ts-222 52[1]

73 Ich hätte auch sagen können: Wesentlich ist nie die Eigenschaft des Gegenstandes, sondern das Merkmal des Begriffes.

Ts-222 52[2] & 53[1]

74 [309]

[279] “War die Gestalt der Gruppe dieselbe, so muß sie dieselben Aspekte, Möglichkeiten der Teilung, haben. Hat sie andere, so ist es nicht die gleiche Gestalt; sie hat Dir dann vielleicht irgendwie den gleichen Eindruck gemacht; aber *dieselbe Gestalt* ist sie nur, wenn Du sie auf gleiche Weise zerteilen kannst.” Es ist doch, als würde dies das Wesen der Gestalt aussprechen. – Aber ich sage doch: Wer über das *Wesen* spricht –, konstatiert bloß eine Übereinkunft. Und da möchte man doch entgegnen: es gibt nichts Verschiedeneres, als ein Satz über die Tiefe des Wesens und einer – über eine bloße Übereinkunft. Wie aber, wenn ich antworte: der *Tiefe* des Wesens entspricht das *tiefe* Bedürfnis nach der Übereinkunft. Wenn ich also sage: “es ist, als spräche dieser Satz das *Wesen* der Gestalt aus” – so meine ich: es ist doch, als spräche dieser Satz eine Eigenschaft des Wesens *Gestalt* aus! – Und man kann sagen: Das Wesen, von dem er eine Eigenschaft aussagt, und das ich hier das Wesen ‘Gestalt’ nenne, ist das Bild, das mir mit dem Wort “Gestalt” untrennbar verbunden scheint.

Ts-222 54[1] & 55[1] & 56[1]

75 Aber was für Eigenschaften der 100 Kugeln hast Du entfaltet, oder gezeigt? – Nun, daß man diese Dinge mit ihnen tun kann. – Aber *welche* Dinge? Meinst Du: daß Du sie hast so bewegen können, daß sie nicht an der Tischfläche festgeleimt waren? – Dies auch, aber hauptsächlich, daß keine von ihnen verschwand, daß man sie verschieben, und der Verschiebung mit den Augen folgen konnte; daß sie dabei ihre Form beibehielten. – Du hast also physikalische Eigenschaften der Reihe gezeigt. Aber warum hast Du den Ausdruck "entfalten" gebraucht? Du hättest doch nicht gesagt, Du entfaltest die Eigenschaften einer Eisenstange, indem Du zeigst, daß sie bei so und soviel Grad schmilzt. Und könntest Du nicht ebenso gut sagen, Du entfaltest die Eigenschaften unseres Zahlengedächtnisses (z.B.)? Was Du eigentlich *entfaltest*, ist ja wohl die Reihe der Kugeln. – Und Du zeigst, z.B. daß, eine Reihe wenn sie so und so ausschaut, etwa so römisch numeriert ist, auf einfache Weise, und ohne daß eine Kugel dazu- oder wegkommt, in jene andere einprägsame Form gebracht werden kann. Aber ebensogut könnte das doch ein psychologisches Experiment sein, das zeigt, daß Du *jetzt* gewisse Formen einprägsam findest, in die 100 Flecke durch bloßes Verschieben gebracht werden. "Ich habe gezeigt, was sich mit 100 Kugeln machen läßt." – Du hast gezeigt, daß sich *diese* 100 Kugeln (oder diese Kugeln dort) so entfalten ließen. Das Experiment war eines des Entfaltens (im Gegensatz z.B. zu einem des Verbrennens). Und das psychologische Experiment konnte z.B. zeigen, wie leicht man Dich betrügen kann; daß Du es nämlich nicht merkst, wenn man Kugeln in die Reihe dazu- oder wegschmuggelt. Man könnte ja auch *so* sagen: Ich habe gezeigt,

was sich mit einer Reihe von 100 Flecken durch scheinbares Verschieben machen läßt, – welche Figuren sich durch scheinbares Verschieben aus ihr erzeugen lassen. – Was aber habe ich in diesem Fall entfaltet?

Ts-222 56[2] & 57[1] & 58[1]

76 Denk Dir, man sagte: wir entfalten die Eigenschaften eines Polygons indem wir je 3 Seiten durch eine Diagonale zusammennehmen. Es zeigt sich mir dann als 15-Eck. Will ich sagen: ich habe eine Eigenschaft des 15-Ecks entfaltet? Nein. Ich will sagen, ich habe eine Eigenschaft dieses (hier gezeichneten) Vielecks entfaltet. Ich weiß jetzt daß hier ein Trick besteht. Früher wußte ich's nicht. Ist dies ein Experiment? Es zeigt mir etwa, was für ein Fehler jetzt da steht. Man kann, was ich getan habe, ein Experiment des Zählens nennen. Ja, wie aber, wenn ich so einen Versuch an einem Fünfeck anstelle, das ich ja schon übersehen kann? – Nun, nehmen wir einen Augenblick an, ich könnte es nicht übersehen, – was (z.B.) geschehen kann, wenn es sehr groß ist, und ich zu nahe bin. Dann wäre das Ziehen der Diagonalen ein Mittel, um mich davon zu überzeugen, daß das ein Fünfeck ist. Hab ich gezeigt daß hier ein 5-Eck steht, & war es nur überflüssig? [Meterstab] Ich könnte wieder sagen, ich habe die Eigenschaften des Polygons, das da gezeichnet ist, entfaltet. – Kann ich es nun übersehen, dann kann sich doch *daran* nichts ändern. Es war etwa überflüssig, diese Eigenschaft zu entfalten, wie es überflüssig ist, zwei Äpfel, die vor mir liegen, zu zählen. Soll ich nun sagen: "es war wieder ein Experiment, aber ich war des Ausgangs sicher"? Aber was ist hier der Ausgang? Aber bin ich des Ausgangs in der Weise sicher, wie des Ausgangs der Elektrolyse einer Wassermenge? Nein, sondern anders! Ergäbe die Elektrolyse der Flüssigkeit nicht H_2O, so würde ich mich für närrisch halten, oder sagen, ich wisse jetzt überhaupt nicht mehr, was ich sagen soll. Sehe ich noch wieviele Striche da stehen wenn ich auf diesen Strich zeige & sage "*Eins*" (ihn also

zähle). Denk Dir, ich sagte: “Ja, hier steht ein Quadrat – aber schauen wir noch nach, ob es durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt wird!” Ich ziehe sie dann und sage: “Ja, hier haben wir zwei Dreiecke.” Da würde man mich fragen: Hast Du denn nicht *gesehen*, daß es in zwei Dreiecke zerlegt werden kann? Bist Du erst jetzt überzeugt, daß hier ein Viereck steht; und warum traust Du jetzt Deinen Augen mehr als früher?

Ts-222 58[2] 77 * Aufgaben: Zahl der Töne, die innere Eigenschaft einer Melodie; Zahl der Blätter, – äußere Eigenschaft eines Baumes. Wie hängt das mit der Identität des Begriffes zusammen? *Ramsey

Ts-222 59[1] 78 Was zeigt uns der, der 4 Kugeln in 2 und 2 trennt, sie wieder zusammenschiebt, wieder trennt etc.? Er prägt uns ein Gesicht ein und eine typische Veränderung dieses Gesichts.

Ts-222 60[1] 79 Denke an die möglichen Stellungen einer Gliederpuppe. Oder denk, Du hättest eine Kette mit, sagen wir 10 Gliedern und Du zeigst, was für charakteristische (d.h. einprägsame) Figuren man mit ihr legen kann. Die Glieder seien numeriert; dadurch werden sie zu einer leicht einprägbaren Struktur, auch wenn sie in gerader Reihe liegen. Ich präge Dir also charakteristische Lagen und Bewegungen dieser Kette ein. Wenn ich nun sage: "Sieh', man kann auch *das* aus ihr machen" (und es vorführe), zeige ich Dir da ein Experiment? – Im gewissen Sinne *ja*; ich zeige z.B., daß man sie in diese Form bringen kann; aber daran hast Du nicht gezweifelt. Und was Dich interessiert, ist nicht etwas, was diese individuelle Kette betrifft. – Aber ist, was ich vorführe, nicht doch eine Eigenschaft dieser Kette? Gewiß; aber ich führe nur solche Bewegungen, solche Umformungen, vor, die einprägsamer Art sind; und Dich interessiert, diese Umformungen *zu lernen*. Es interessiert Dich aber darum, weil es so leicht ist, sie immer wieder, an verschiedenen Gegenständen vorzunehmen. (Rechnung)

Ts-222 60[2] & 61[1] **80** Die Worte "Sieh, was ich aus ihr machen kann –" sind allerdings dieselben, die ich auch verwenden würde, wenn ich Dir zeigte, was ich alles aus einem Klumpen Ton z.B. formen kann. *Daß* ich geschickt genug bin, solche Dinge aus diesem Klumpen zu formen. In einem andern Fall: daß dies Material sich *so* behandeln läßt. Hier würde man kaum sagen: 'ich mache Dich darauf aufmerksam', daß ich dies machen kann, oder daß das Material dies aushält, – während man im Fall der Kette sagen würde: ich mache Dich darauf aufmerksam, daß sich dies mit ihr machen läßt. – Denn Du hättest es Dir auch *vorstellen* können. Aber Du kannst natürlich keine Eigenschaft der Kette durch Vorstellen erkennen. Das Experimenthafte verschwindet, indem man den Vorgang bloß als einprägsames Bild ansieht.

Ts-222 61[2] **81** Man kann daher sagen: Wir entfalten die *Rolle*, die "100" in unserm Rechensystem spielt.

Ts-222 61[3] **82** (Ich schrieb einmal: "In der Mathematik sind Prozeß und Resultat einander äquivalent.")

Ts-222 61[4] & 62[1]

83 Und doch fühle ich, daß es eine Eigenschaft von "100" sei, daß es so erzeugt wird, oder werden kann. Aber wie kann es denn eine Eigenschaft der Struktur "*100*" sein, daß sie so erzeugt wird, wenn sie z.B. garnicht so erzeugt würde? Wenn niemand so multiplizierte? Doch nur, wenn man sagen könnte, es ist eine Eigenschaft dieses Zeichens, Gegenstand dieser Regel zu sein, z.B. Es ist Eigenschaft der "5", Gegenstand der Regel "3 + 2 = 5" zu sein. Denn nur als Gegenstand der Regel ist die Zahl *das* Resultat der Addition jener andern Zahlen. Wenn ich aber nun sage: es ist Eigenschaft der Zahl …, das Resultat der Addition von ….. nach der Regel ….. zu sein? Es ist also eine Eigenschaft der Zahl, daß sie bei der Anwendung dieser Regel auf diese Zahlen entsteht. Die Frage ist: würden wir es "Anwendung der Regel" nennen, wenn diese Zahl *nicht* das Resultat wäre? Und das ist dieselbe Frage wie: "Was verstehst Du unter der 'Anwendung dieser Regel': das, was Du etwa mit ihr machst (und Du magst sie einmal so, einmal so anwenden), oder ist 'ihre Anwendung' anders erklärt."

Ts-222 62[2]

84 "Es ist eine Eigenschaft dieser Zahl, daß dieser Prozeß zu ihr führt." – Aber mathematisch gesprochen führt kein Prozeß zu ihr, sondern sie ist das Ende eines Prozesses (gehört noch zum Prozeß).

Ts-222 63[4] & 64[1]

85 Aber warum fühle ich, es werde eine Eigenschaft der Reihe entfaltet, gezeigt? – Weil ich abwechselnd, was gezeigt wird, als der Reihe wesentlich, und nicht wesentlich ansehe. Oder: weil ich an diese Eigenschaften abwechselnd als externe und interne denke. Weil ich abwechselnd etwas als selbstverständlich hinnehme und es bemerkenswert finde.

Ts-222 64[3] **86** “Du entfaltest doch die Eigenschaften der 100 Kugeln, indem Du zeigst, was aus ihnen gemacht werden kann.” – *Wie* gemacht werden kann? Denn, daß das aus ihnen gemacht werden *kann*, daran hat ja niemand gezweifelt, es muß also um die Art und Weise gehen, *wie* dies aus ihnen erzeugt wird. Aber sieh’ diese an! ob sie nicht etwa das Resultat schon voraussetzt. – Denn denke Dir, es entsteht auf *diese Weise* einmal dies, einmal ein anderes Resultat; würdest Du das nun hinnehmen? Würdest Du nicht sagen: “Ich muß mich geirrt haben; auf *dieselbe* Art und Weise mußte immer das Gleiche entstehen.” Das zeigt, daß Du das Resultat der Umformung einbeziehst in die Art und Weise der Umformung.

Ts-222 65[1] **87** Aufgabe: Soll ich es Erfahrungstatsache nennen, daß *dieses* Gesicht durch *diese* Veränderung zu *jenem* wird?

Ts-222 65[7] & 66[1] **88** Man sagt: diese Einteilung *macht klar*, was da für eine Reihe von Kugeln steht. Macht sie klar, was für eine Reihe vor der Einteilung da *stand*, oder macht sie klar, was für eine Reihe jetzt da steht?

Ts-222 66[2] **89** ‘Ich sehe auf den ersten Blick, wieviele es sind.’ Nun wieviele sind es? Ist die Antwort ‘*So* viele’? – (wobei man auf die Gruppe der Gegenstände zeigt). Wie lautet sie aber? Es sind ‘50’, oder ‘100’, etc.

Ts-222 66[3] **90** “Die Einteilung macht mir klar, was da für eine Reihe steht”. Nun, was für eine steht da? Ist die Antwort “*Diese*.”? Wie lautet eine sinnvolle Antwort?

Ts-222 66[6] & 67[1] **91** Ich entfalte doch die geometrischen Eigenschaften dieser Kette auch, indem ich die Umformungen einer andern, gleich gebauten Kette vorführe. Aber dadurch zeige ich doch nicht, was ich tatsächlich mit der ersten tun kann, wenn diese sich nämlich tatsächlich als unbiegbar, oder sonstwie physikalisch ungeeignet erweist. Also kann ich doch nicht sagen: ich entfalte die *Eigenschaften dieser Kette*.

Ts-222 67[2] **92** Kann man Eigenschaften der Kette entfalten, die sie garnicht hat?

Ts-222 67[4] **93** Ich messe einen Tisch und er ist 1 m lang. – Nun lege ich meinen Meterstab an einen andern Meterstab. Messe ich ihn dadurch? Finde ich, daß jener zweite Meterstab 1 m lang ist? Mache ich das gleiche Experiment der Messung, nur mit dem Unterschied, daß ich des Ausgangs sicher bin?

Ts-222 67[5] & 68[1] **94** Ja, wenn ich den Maßstab an den Tisch anlege, messe ich immer den Tisch; kontrolliere ich nicht manchmal den Maßstab? Und worin liegt der Unterschied zwischen dem einen Vorgehen und dem andern?

Ts-222 68[4] **95** Das Experiment des Entfaltens einer Reihe kann uns, unter anderem, zeigen, aus wievielen Kugeln die Reihe besteht, oder aber, daß wir diese (sagen wir) 100 Kugeln so und so bewegen können. Die Rechnung aber des Entfaltens zeigt uns, was wir eine ‘Umformung durch bloßes Entfalten’ nennen.

Ts-222 70[1] & 71[1]

96 Prüfe den Satz: Ich schrieb einmal, es sei keine *Erfahrungstatsache*: daß die Tangente einer visuellen Kurve ein Stück mit dieser gemeinsam läuft; und wenn dies eine Figur zeige, so nicht als das Resultat eines Experiments.

Man könnte auch sagen: Du siehst hier, daß Stücke einer kontinuierlichen visuellen Kurve gerade sind. – Aber sollte ich nicht sagen: – "Das nennst Du doch eine 'Kurve'. – Und nennst Du dieses Stückchen nun 'krumm' oder 'gerade'? – Das nennst Du doch eine 'Gerade', und sie enthält dieses Stück." Aber warum sollte man nicht für visuelle Strecken einer Kurve, die allein keine Krümmung zeigen, einen neuen Namen gebrauchen? "Das Experiment des Ziehens dieser Linien hat doch gezeigt, daß sie sich nicht in einem *Punkt* berühren." – Daß *sie* sich nicht in einem Punkt berühren? Wie sind '*sie*' definiert? Oder: kannst Du mir ein Bild davon zeigen, wie es ist, wenn sie sich 'in einem Punkt berühren'? Denn warum soll ich nicht einfach sagen: das Experiment hat ergeben, daß sie – nämlich eine krumme und eine gerade Linie – einander *berühren?* Denn ist dies *nicht*, was ich "Berührung" solcher Linien nenne?

Ts-222 71[2] & 72[1]

97 Zeichnen wir einen Kreis aus schwarzen und weißen Stücken, die kleiner und kleiner werden.

"Welches dieser Stücke – von links nach rechts – erscheint Dir schon als gerade?" Dies ist ein Experiment.

Ts-222 72[2]

98 Wie, wenn jemand sagte: "Die Erfahrung lehrt Dich, daß diese Linie

krumm ist"? – Da wäre zu sagen, daß hier die Worte "diese Linie", den auf dem Papier gezogenen *Strich* bedeuten. Man kann ja tatsächlich den Versuch anstellen und diesen Strich verschiedenen Menschen zeigen, und fragen: "was siehst Du; eine gerade, oder eine krumme Linie?" – Bemerkung über Identität Wenn aber jemand sagte: "Ich stelle mir jetzt eine krumme Linie vor", und wir ihm darauf sagen: "Da siehst Du also, daß diese Linie eine krumme ist" – was für einen Sinn hätte das? Nun kann man aber auch sagen: "Ich stelle mir einen Kreis vor aus schwarzen und weißen Stücken, eines ist groß, gekrümmt, die folgenden werden immer kleiner, das sechste ist schon gerade." Wo liegt hier das Experiment? In der Vorstellung kann ich rechnen, aber nicht experimentieren.

Ts-222 73[1] & 74[1]

99 220 Was ist die charakteristische Verwendung des Vorgangs der Ableitung als *Rechnung* – im Gegensatz zur Verwendung des Vorgangs als Experiment? Wir betrachten die Berechnung als Demonstration einer *internen Eigenschaft* (eine Eigenschaft des *Wesens*) der Strukturen. Aber was heißt das? Als Urbild der 'internen Eigenschaft' könnte dieses dienen:

$10 = 3 \times 3 + 1$

Wenn ich nun sage: 10 Striche bestehen notwendig aus 3 mal 3 Strichen und einem Strich – das heißt doch nicht: wenn 10 Striche dastehen, so stehen immer die Ziffern und Bogen rund herum. – Setze ich sie aber zu den Strichen hinzu, so sage ich, ich demonstrierte nur das Wesen jener Gruppe von Strichen. – Aber bist Du sicher, daß sich die Gruppe beim Dazuschreiben jener Zeichen nicht verändert hat? – "Ich weiß nicht; aber *eine* bestimmte Zahl von Strichen stand da; und wenn nicht 10, so eine andre und dann hatte die eben andre Eigenschaften. –"

Ts-222 74[2] **100** Man sagt: die Rechnung 'entfaltet' die Eigenschaft der Hundert. Was heißt es eigentlich: 100 bestehe aus 50 und 50? Man sagt: der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln und 50 Birnen. Aber wenn Einer sagte: "der Inhalt der Kiste besteht aus 50 Äpfeln und 50 Äpfeln" –, wir wüßten zunächst nicht, was er meint. – Wenn man sagt: "Der Inhalt der Kiste besteht aus 2 mal 50 Äpfeln", so heißt das entweder, es seien da zwei Abteilungen zu 50 Äpfeln; oder es handelt sich etwa um eine Verteilung, in der Jeder 50 Äpfel erhalten soll, und ich höre nun, daß man aus dieser Kiste zwei Leute beteilen kann.

Ts-222 74[3] **101** "Die 100 Äpfel in der Kiste bestehen aus 50 und 50" – hier ist wichtig der unzeitliche Charakter von 'bestehen'. Denn es heißt nicht, sie bestünden *jetzt*, oder für einige Zeit aus 50 und 50.

Ts-222 75[1] **102** Was ist denn das Charakteristikum der 'internen Eigenschaften'? Daß sie immer, unveränderlich in dem Ganzen bestehen, das sie bilden; gleichsam unabhängig von allen äußeren Geschehnissen. Wie die Konstruktion einer Maschine auf dem Papier nicht bricht, wenn die Maschine selbst äußeren Kräften erliegt. – Oder ich möchte sagen: daß sie nicht Wind und Wetter unterworfen sind, wie das Physikalische der Dinge; sondern unangreifbar wie Schemen.

Ts-222 76[1] **103** Wenn wir sagen: "dieser Satz folgt aus jenem", so ist hier "folgen" wieder *unzeitlich* gebraucht. (Und das zeigt, daß dieser Satz nicht das Resultat eines Experiments ausspricht.)

Ts-222 76[2] **104** Vergleiche damit: “Weiß ist heller als Schwarz”. Auch dieser Ausdruck ist unzeitlich und auch er spricht das Bestehen einer *internen* Relation aus.

Ts-222 77[1] & 78[1] **105** “Diese Relation *besteht* aber eben” – möchte man sagen. Aber die Frage ist: Hat dieser Satz einen Gebrauch – und welchen? Denn einstweilen weiß ich nur, daß mir dabei ein Bild vorschwebt (aber dies garantiert mir die Verwendung nicht) und daß die Worte einen deutschen Satz geben. Aber es fällt Dir auf, daß die Worte hier anders gebraucht werden, als im alltäglichen Fall einer nützlichen Aussage. (Wie etwa der Radmacher bemerken kann, daß die Aussagen, die er gewöhnlich über Kreisförmiges und Gerades macht, anderer Art sind, als die, die im Euklid stehen.) Denn wir sagen: dieser *Gegenstand* ist heller als jener, oder, die Farbe dieses Dings ist heller als die Farbe jenes, und dann ist etwas jetzt heller und kann später dunkler sein. Woher die Empfindung, “Weiß ist heller als Schwarz” sage etwas über das *Wesen* der beiden Farben aus? – Aber ist die Frage überhaupt richtig gestellt? Was meinen wir denn mit dem ‘Wesen’ von Weiß oder Schwarz? Wir denken etwa an ‘das Innere’, ‘die Konstitution’, aber das ergibt hier doch keinen Sinn. Wir sagen etwa auch: “Es liegt im Weiß, daß es heller ist ....”. [→ Siehe Bemerkung über Identität] Ist es nicht so: das Bild eines schwarzen und eines weißen Flecks

dient uns *zugleich* als Paradigma dessen, was wir unter “heller” und “dunkler” verstehen und als Paradigma für “weiß” und für “schwarz”. In *so* fern ‘liegt’ nun die Dunkelheit ‘im’ Schwarz, als sie *beide* von diesem Fleck dargestellt werden. Er ist dunkel, *dadurch daß* er schwarz ist. – Aber richtiger gesagt: er *heißt* “schwarz” und damit, in unserer Sprache, auch “dunkel”. Jene Verbindung, eine Verbindung der Paradigmen und Namen ist in unsrer Sprache hergestellt. Und unser Satz ist unzeitlich, weil er nur die Verbindung der Worte “weiß”, “schwarz” und “heller” mit einem Paradigma ausspricht. Man kann Mißverständnisse vermeiden, dadurch daß man erklärt, es sei Unsinn, zu sagen: “die Farbe dieses Körpers ist heller, als die Farbe jenes”, es müsse heißen: “dieser Körper ist heller als jener”. D.h., man schließt jene Ausdrucksform aus unserer Sprache aus. Wem sagen wir “weiß ist heller als schwarz”? Was teilt ihm das mit.

Ts-222 79[1] & 80[1]

106 Aber kann ich den Satz der Geometrie nicht auch ohne Beweis glauben, z.B. auf die Versicherung eines Andern hin? – Und was verliert der Satz, wenn er seinen Beweis verliert? – Ich soll hier wohl fragen: “Was kann ich mit ihm anfangen?”, denn darauf kommt es an. Den Satz auf die Versicherung des Andern *annehmen* – wie zeigt sich das? Ich kann ihn z.B. in weiteren Rechenoperationen verwenden, oder ich verwende ihn bei der Beurteilung eines physikalischen Sachverhalts. Versichert mich jemand z.B., 13 mal 13 sei 396, und ich glaube ihm, so werde ich mich nun wundern, daß ich 396 Nüsse nicht in 13 Reihen zu je 13 Nüssen legen kann und vielleicht annehmen, die Nüsse hätten sich von selbst vermehrt. Aber ich fühle mich versucht zu sagen: man könne nicht ***glauben***, daß 13 × 13 = 396 ist, man könne diese Zahl nur mechanisch vom Andern *annehmen*. Aber warum soll ich nicht sagen, ich glaube es? Ist denn, es glauben, ein geheimnisvoller Akt, der sozusagen unterirdisch mit der richtigen Rechnung in Verbindung steht? Ich kann doch jedenfalls *sagen*: “ich glaube es”, und nun danach handeln. Man möchte fragen: “Was tut der, der glaubt, daß 13 × 13 = 396 ist?” Und die Antwort kann sein: Nun, das wird davon abhängen, ob er z.B. die Rechnung selber gemacht und sich dabei verschrieben hat, – oder ob sie zwar ein Andrer gemacht hat, er aber doch weiß, wie man so eine Rechnung macht, – oder ob er nicht multiplizieren kann, aber weiß, daß das Produkt die Zahl der Leute ist, die in 13 Reihen zu je 13 stehen, – kurz davon, was er denn mit der Gleichung 13 × 13 = 396 anfangen kann. Denn, sie prüfen, ist etwas mit ihr anfangen.

Ts-222 107 Denkt man nämlich an die arithmetische Gleichung als
80[2] den Ausdruck einer internen Relation, so möchte man sagen: "Er kann ja garnicht glauben, daß 13 × 13 *dies* ergibt, weil das ja keine Multiplikation von 13 mit 13, oder kein *Ergeben* ist, wenn 396 am Ende steht." Das heißt aber, daß man das Wort "glauben" für den Fall einer Rechnung und ihres Resultats nicht anwenden will, – oder nur dann, wenn man die richtige Rechnung vor sich hat.

Ts-222 108 "Was glaubt der, der glaubt 13 × 13 ist 396?" – Wie tief
81[1] dringt er – könnte man sagen, mit seinem Glauben in das Verhältnis dieser Zahlen ein? Denn bis zum Ende – will man sagen – kann er nicht dringen, oder er könnte es nicht glauben. Aber wann dringt er in die Verhältnisse der Zahlen ein? Gerade während er sagt, daß er glaubt ……? Darauf wirst Du nicht bestehen – denn es ist leicht zu sehen, daß dieser Schein nur durch die Oberflächenform unsrer Grammatik (wie man es nennen könnte) erzeugt wurde.

Ts-222 109 Denn ich will sagen: "Man kann nur *sehen*, daß 13 × 13 =
81[2] 369 ist, und man kann auch das nicht *glauben*. Und man kann – mehr oder weniger blind – eine Regel annehmen." Und was tue ich, wenn ich dies sage? Ich mache einen Schnitt; zwischen der *Rechnung* mit ihrem Resultat (d.i. einem bestimmten Bild, einer bestimmten Vorlage) und einem Versuch mit seinem Ergebnis.

Ts-222 81[3] & 82[1]

110 Ich möchte sagen: “Wenn ich glaube, daß x × y = z ist – und es kommt ja vor, daß ich so etwas glaube – sage, daß ich es glaube – so glaube ich nicht den mathematischen Satz, denn der steht am Ende eines Beweises, ist das Ende eines Beweises; sondern ich glaube: daß dies die Formel ist, die dort und dort steht, die ich so und so erhalten werde u. dergl.” – Und dies klingt ja, als dränge ich in den Vorgang des Glaubens eines solchen Satzes ein. Während ich nur – in ungeschickter Weise – auf den *fundamentalen* Unterschied bei scheinbarer Ähnlichkeit der Rollen deute – eines arithmetischen Satzes und eines Erfahrungssatzes. Denn ich *sage* eben unter gewissen Umständen: “ich glaube daß x × y = z ist”. Was *meine* ich damit? – Was ich sage! − − Wohl aber ist die Frage interessant: unter was für Umständen sage ich dies, und wie sind sie charakterisiert, im Gegensatz zu denen einer Aussage: “ich glaube, es wird regnen”? Denn was uns beschäftigt, ist ja dieser Gegensatz. Wir verlangen danach, ein Bild zu erhalten von der Verwendung der mathematischen Sätze und der Sätze “ich glaube, daß ….”, wo ein mathematischer Satz der Gegenstand des Glaubens ist. [→ [Siehe S. 173]]

Ts-222 82[2] & 83[1]

111 “Du glaubst doch nicht den mathematischen Satz. –” Das heißt: “mathematischer Satz” bezeichnet mir eine Rolle für den Satz, eine Funktion, in der ein Glauben nicht vorkommt. Vergleiche: “Wenn du sagst: ‘ich glaube, daß das Rochieren so und so geschieht’, so glaubst Du nicht die Schachregel, sondern Du glaubst etwa, daß *so* eine Regel des Schach lautet.”

Ts-222 83[2]

112 "Man kann nicht *glauben*, die Multiplikation 13 × 13 liefere 369, weil das Resultat zur Rechnung gehört." – Was nenne ich "die Multiplikation 13 × 13"? Nur das richtige Multiplikationsbild, an dessen unterem Ende 369 steht? oder auch eine 'falsche Multiplikation'? Wie ist festgelegt, welches Bild die Multiplikation 13 × 13 ist? – Ist es nicht durch die Multiplikationsregeln *bestimmt*? – Aber wie, wenn Dir mit Hilfe dieser Regeln heute etwas anderes herauskommt, als was in allen Rechenbüchern steht? Ist das nicht möglich? – "Nicht, wenn Du die Regeln anwendest, wie *sie*!" – Freilich nicht! aber das ist ja ein Pleonasmus. Und wo steht, wie sie anzuwenden sind – und wenn es wo steht: wo steht, wie *dies* anzuwenden ist? Und das heißt nicht nur: in welchem Buch steht es, sondern auch, in welchem *Kopf*? – Was ist also die Multiplikation 13 × 13 – oder, wonach soll ich mich beim Multiplizieren richten: nach den Regeln, oder nach der Multiplikation, die in den Rechenbüchern steht – – wenn diese beiden nämlich nicht übereinstimmen? – Nun, es kommt tatsächlich nie vor, daß der, welcher rechnen gelernt hat, bei dieser Multiplikation hartnäckig etwas anderes herausbringt, als was in den Rechenbüchern steht. Sollte es aber geschehen; so würden wir ihn für abnorm erklären, und von seiner Rechnung weiter keine Notiz nehmen.

Ts-222 84[1] **113** 209˙1 Bemerkung über Identität. "Aber bin ich also in einer Schlußkette nicht gezwungen, zu gehen, wie ich gehe?" – Gezwungen? Ich kann doch wohl gehen, wie ich will! – "Aber wenn Du im Einklang mit den Regeln bleiben willst, *mußt* Du so gehen." – Durchaus nicht; ich nenne *das* 'Einklang'. – "Dann hast du den Sinn des Wortes 'Einklang' verändert, oder den Sinn der Regel." – Nein, – wer sagt, was hier 'verändern' und was 'gleichbleiben' heißt?

Wieviele Regeln immer Du mir angibst – ich gebe Dir eine Regel, die *meine* Verwendung Deiner Regeln rechtfertigt.

Ts-222 85[1] **114** Wir könnten auch sagen: Wenn wir den Schlußgesetzen (Schlußregeln) *folgen*, so liegt in einem Folgen immer auch ein Deuten.

Ts-222 86[1] & 87[1] **115** "Du darfst doch das Gesetz jetzt nicht auf einmal anders anwenden!" – Wenn ich darauf antworte: "Ach ja, ich hatte es ja *so* angewandt!" oder: "Ach, *so* sollte ich es anwenden – !"; dann spiele ich mit. Antworte ich aber einfach: "Anders? – Das *ist* doch nicht anders!" – was willst Du tun? Das heißt eigentlich, daß ein Mensch mit Zeichen des Verstandes auch so handeln könnte daß wir es närrisch nennen würden.

Ts-222 88[1] & 89[1]

116 "Nach Dir könnte also jeder die Reihe fortsetzen, wie er will; und also auch auf *irgend* eine Weise schließen!" Wir werden es dann nicht "die Reihe fortsetzen" nennen und auch wohl nicht "schließen". Und Denken & Schließen (sowie das Zählen) ist für uns natürlich nicht durch eine willkürliche Definition umschrieben, sondern durch natürliche Grenzen, dem Körper dessen entsprechend, was wir die Rolle des Denkens & Schließens in unserm Leben nennen können. Denn, daß ihn Schlußgesetze nicht wie die Gleise den Zug zwingen, das und das zu reden, oder zu schreiben, darüber sind wir einig. Und wenn du sagst, er könne es zwar *reden*, aber er kann es nicht *denken*, so sage ich nur, das heiße nicht: er könne es, quasi trotz aller Anstrengung, nicht denken, sondern es heißt: zum 'Denken' gehört für uns wesentlich, daß er – beim Reden, Schreiben, etc. – *solche* Übergänge macht. Und ferner sage ich, daß die Grenze zwischen dem, was wir noch 'denken' und dem, was wir nicht mehr so nennen, so wenig scharf gezogen ist, wie die Grenze zwischen dem, was noch "Gesetzmäßigkeit" genannt wird und dem, was wir nicht mehr so nennen. Man kann aber dennoch sagen, daß die Schlußgesetze uns zwingen; in dem Sinne nämlich, wie andere Gesetze in der menschlichen Gesellschaft. Der Kanzlist, der so schließt, wie in (210), *muß* es so tun; er wäre bestraft worden, wenn er anders schlösse. Wer anders schließt, kommt allerdings in Konflikt: z.B. mit der Gesellschaft; aber auch mit andern praktischen Folgen. Und auch *daran* ist etwas, wenn man sagt: er kann es nicht *denken*. Man will etwa sagen: Er kann es nicht mit persönlichem Inhalt erfüllen: er kann nicht wirklich *mitgehen* – mit seinem Verstand, mit seiner Person. Es ist ähnlich, wie man sagt: Diese Tonfolgen

geben keinen Sinn, ich kann sie nicht mit Ausdruck singen. Ich kann nicht *mitschwingen*. Oder, was hier auf dasselbe hinauskommt: ich schwinge nicht mit. "Wenn er es redet – könnte man sagen – kann er es nur gedankenlos reden". Und hierzu muß nur bemerkt werden, daß das 'gedankenlose' Reden sich von einem anderen wohl auch manchmal durch das unterscheidet, was beim Reden im Redenden an Vorstellungen, Empfindungen, und anderem, vor sich geht, daß aber diese Begleitung nicht das 'Denken' ausmacht und ihr Fehlen noch nicht die 'Gedankenlosigkeit'. [→ [Siehe Lesen] Experiment

> Bd. XII S. 103/1]

Ts-222 90[1] **117** [193] Inwiefern ist das logische Argument ein Zwang? "Du gibst doch *das* zu, – und *das* zu; dann mußt du auch *das* zugeben!" Das ist die Art, jemanden zu zwingen. D.h., man kann so tatsächlich Menschen zwingen, etwas zuzugeben. – Nicht anders, als wie man Einen etwa dazu zwingen kann, dorthin zu gehen, indem man gebietend mit dem Finger dorthin zeigt. Siehe Gesetz unerbittlich Denke, ich zeige in so einem Fall mit zwei Fingern zugleich in zwei verschiedenen Richtungen und stelle es damit dem Andern frei, in welcher der beiden Richtungen er gehen will – ein andermal zeige ich nur in *einer* Richtung; so kann man das auch so ausdrücken: mein erster Befehl habe ihn nicht gezwungen, in *einer* Richtung zu gehen, wohl aber der zweite. Das ist aber eine Aussage, die angeben soll, welcher Art meine Befehle waren; aber nicht, in welcher Art sie wirken, ob sie den und den tatsächlich zwingen, d.h., ob er ihnen gehorcht.

Ts-222 91[1] & 92[1]

118 Es schien zuerst, als sollten diese Überlegungen zeigen, daß, 'was ein logischer Zwang zu sein scheint, in Wirklichkeit nur ein psychologischer ist' – und da fragte es sich doch: kenne ich also beide Arten des Zwanges?! – Denke Dir, es würde der Ausdruck gebraucht: "Das Gesetz § …. bestraft den Mörder mit dem Tode." Das könnte doch nur heißen, dieses Gesetz laute: u.s.w. Jene Form des Ausdrucks aber könnte sich uns aufdrängen, weil das Gesetz Mittel ist, wenn der Schuldige der Bestrafung zugeführt wird. – Nun reden wir von 'Unerbittlichkeit' bei denen, die jemand bestrafen. Da könnte es uns einfallen, zu sagen:das Gesetz ist *unerbittlich*– die Menschen können den Schuldigen laufen lassen, das Gesetz richtet ihn hin." (Ja auch: "das Gesetz richtet ihn *immer* hin".) – Wozu ist so eine Ausdrucksform zu gebrauchen? – Zunächst sagt dieser Satz ja nur, im Gesetz stehe das und das, und die Menschen richten sich manchmal nicht danach. Dann aber zeigt er doch das Bild des einen unerbittlichen – und vieler laxer Richter. Er dient darum als Ausdruck des Respekts vor dem Gesetz. Endlich aber kann man die Ausdrucksform auch so gebrauchen, daß man ein Gesetz 'unerbittlich' nennt, wenn es eine Möglichkeit der Begnadigung nicht vorsieht, und im entgegengesetzten Fall etwa 'einsichtig'. Bemerkung: "…. die Wellen der Sprache …"

Siehe Bemerkungen gegen das Ende, Bd. XIII Wir reden nun von der 'Unerbittlichkeit' der Logik; und denken uns die logischen Gesetze unerbittlich, unerbittlicher noch, als die Naturgesetze. Wir machen nun darauf aufmerksam, wie das Wort "unerbittlich" auf mehrerlei Weise angewendet wird. Es entsprechen unsern logischen Gesetzen sehr allgemeine Tatsachen der täglichen Erfahrung. Es sind die, die es uns möglich machen, jene Gesetze immer wieder auf einfache Weise (mit Tinte auf Papier z.B.) zu demonstrieren. Sie sind zu vergleichen mit jenen Tatsachen, welche die Messung mit dem Metermaß leicht ausführbar und nützlich machen. Das legt den Gebrauch gerade dieser Schlußgesetze nahe, und nun sind *wir* unerbittlich in der Anwendung dieser Gesetze. Weil wir '*messen*'; und es gehört zum Messen, daß Alle das gleiche Maß haben. Außerdem aber kann man unerbittliche, d.h. *eindeutige*, von nichteindeutigen Schlußregeln unterscheiden, ich meine von solchen, die uns eine Alternative freistellen.

Ts-222 93[1] **119** "Ich kann doch nur folgern, was wirklich folgt!" – D.h.: was die logische Maschine wirklich hervorbringt. Die logische Maschine, das wäre ein alles durchdringender ätherischer Mechanismus. – Vor diesem Bild ist zu warnen.

Ts-222 94[1] & 95[1]

Denk Dir ein Material härter und fester als irgend ein anderes. Aber wenn man einen Stab aus diesem Stoff aus der horizontalen in die vertikale Lage bringt, so zieht er sich zusammen; oder er biege sich, wenn man ihn aufrichtet und ist dabei so hart, daß man ihn auf keine andere Weise biegen kann. – (Ein Mechanismus aus diesem Stoff hergestellt, etwa eine Kurbel, Pleuelstange und Kreuzkopf. Andere Bewegungsweise des Kreuzkopfs.) Oder: eine Stange biegt sich, wenn man ihr eine gewisse Masse nähert; gegen alle Kräfte aber, die wir auf sie wirken lassen, ist sie vollkommen starr. Denk Dir, die Führungsschienen des Kreuzkopfs biegen sich und strecken sich wieder, wenn die Kurbel sich ihnen nähert und sich wieder entfernt. Ich nähme aber an, daß keinerlei besondere äußere Kraft dazu nötig ist, dies hervorzurufen. Dieses Benehmen der Schienen würde wie das eines lebenden Wesens anmuten. Wenn wir sagen: "Wenn die Glieder des Mechanismus ganz starr wären, würden sie sich so und so bewegen", was ist das Kriterium dafür, daß sie ganz starr sind? Ist es, daß sie gewissen Kräften widerstehen? oder, daß sie sich so und so bewegen? Denke, ich sage: "das ist das Bewegungsgesetz des Kreuzkopfes (die Zuordnung seiner Lage – zur Lage der Kurbel etwa), wenn sich die Länge der Kurbel und der Pleuelstange nicht ändern". Das heißt wohl: Wenn sich die Lagen der Kurbel und des Kreuzkopfes so zueinander verhalten, dann sage ich, daß die Länge der Pleuelstange gleich bleibt.

Ts-222 95[2] & 96[1]

120 "Wenn die Teile ganz starr wären, würden sie sich so bewegen": ist das eine Hypothese? Es scheint, nein. Denn wenn wir sagen: "die Kinematik beschreibt die Bewegungen des Mechanismus unter der Voraussetzung, daß seine Teile vollkommen starr sind", so geben wir einerseits zu, daß diese Voraussetzung in der Wirklichkeit nie zutrifft, anderseits soll es keinem Zweifel unterliegen, daß vollkommen starre Teile sich so bewegen würden. Aber woher diese Sicherheit? Es handelt sich hier wohl nicht um Sicherheit, sondern um eine Bestimmung, die wir getroffen haben. Wir *wissen* nicht, daß Körper, wenn sie (nach den und den Kriterien) starr wären, sich so bewegen würden; wohl aber würden wir (unter Umständen) Teile 'starr' nennen, die sich so bewegen – denke in so einem Fall immer daran, daß ja die Geometrie (oder Kinematik) keine Meßmethode spezifiziert, wenn sie von gleichen Längen oder vom Gleichbleiben einer Länge spricht. Wenn wir also die Kinematik etwa die Lehre von der Bewegung vollkommen starrer Maschinenteile nennen, so liegt hierin einerseits eine Andeutung über die (mathematische) Methode: wir bestimmen gewisse Distanzen als die Längen der Maschinenteile, die sich nicht ändern; anderseits eine *Andeutung* über die Anwendung des Kalküls.

Ts-222 97[1] & 98[1]

121 Die Härte des logischen Muß. Wie, wenn man sagte: das Muß der Kinematik ist viel härter, als das kausale Muß, das einen Maschinenteil zwingt, sich *so* zu bewegen, wenn der andere sich *so* bewegt? – Denk Dir, wir würden die Bewegungsweise des ‘vollkommen starren’ Mechanismus durch ein kinematographisches Bild, einen Zeichenfilm, darstellen. Wie, wenn man sagen würde, dies Bild sei *vollkommen hart*, und damit meinte, wir hätten dieses Bild als Darstellungsweise genommen, – was immer die Tatsachen seien, wie immer sich die Teile des wirklichen Mechanismus biegen, oder dehnen mögen. –

Ts-222 98[2] & 99[1] & 100[1]

122 Die Maschine (ihr Bau) als Symbol für ihre Wirkungsweise: Die Maschine – könnte ich zuerst sagen – 'scheint ihre Wirkungsweise schon in sich zu haben'. Was heißt das? Indem wir die Maschine kennen, scheint alles Übrige, nämlich die Bewegungen, die sie machen wird, schon ganz bestimmt zu sein. [→ Siehe Anfang des zweiten Teiles] "Wir reden so, als *könnten* sich diese Teile nur so bewegen, als könnten sie nichts andres tun." Wie ist es –: vergessen wir also die Möglichkeit, daß sie sich biegen, abbrechen, schmelzen können, etc.? *Ja*; wir denken in *vielen* Fällen garnicht daran. Wir gebrauchen eine Maschine, oder das Bild einer Maschine, als Symbol für eine bestimmte Wirkungsweise. Wir teilen z.B. Einem dieses Bild mit und setzen voraus, daß er die Erscheinungen der Bewegungen der Teile aus ihm ableitet. (So wie wir jemand eine Zahl mitteilen können, indem wir sagen, sie sei die fünfundzwanzigste der Reihe: 1, 4, 9, 16, ….) "Die Maschine scheint ihre Wirkungsweise schon in sich zu haben" heißt: Du bist geneigt, die künftigen Bewegungen der Maschine in ihrer Bestimmtheit Gegenständen zu vergleichen, die schon in einer Lade liegen und von uns nun herausgeholt werden. So aber reden wir nicht, wenn es sich darum handelt, das wirkliche Verhalten einer Maschine vorauszusagen; da vergessen wir, im allgemeinen, nicht die Möglichkeiten der Deformation der Teile etc. Wohl aber, wenn wir uns darüber wundern, wie wir denn die Maschine als Symbol einer Bewegungsweise verwenden können – da sie sich doch auch ganz *anders* bewegen kann. Nun, wir könnten sagen, die Maschine, oder ihr Bild, stehe als Anfang einer Bilderreihe, die wir aus diesem Bild abzuleiten gelernt haben. Wenn wir aber bedenken, daß sich die Maschine auch anders hätte bewegen können, so erscheint es uns leicht, als müßte in der Maschine als Symbol ihre Bewegungsart noch viel bestimmter enthalten sein, als in der wirklichen Maschine. Es genüge da nicht, daß dies die erfahrungsmäßig vorausbestimmten Bewegungen seien, sondern sie müßten eigentlich – in einem mysteriösen Sinne – bereits *gegenwärtig* sein. Und es ist ja wahr: die Bewegung des Maschinensymbols ist in anderer Weise vorausbestimmt, als die einer gegebenen wirklichen Maschine.

Ts-222 100[2] 123 "Es ist, als könnten wir die ganze Verwendung des Wortes mit einem Schlag erfassen." – Wie *was* z.B.? – *Kann* man sie nicht – in gewissem Sinne – mit einem Schlag erfassen? Und in *welchem* Sinne kannst Du dies nicht? Es ist eben, als könnten wir sie in einem noch viel direkteren Sinne mit einem Schlag erfassen. Aber hast Du dafür ein Vorbild? Nein. Es bietet sich uns nur diese Ausdrucksweise an als das Resultat sich kreuzender Gleichnisse.

Ts-222 100[3] 124 Du hast kein Vorbild dieser übermäßigen Tatsache, aber Du wirst dazu verführt, einen *ÜberAusdruck* zu gebrauchen. [→ Siehe "Ist es eine Verwechslung?"]

Ts-222 100[4] & 101[1] & 102[1]

125 Wann denkt man denn: die Maschine habe ihre möglichen Bewegungen schon in irgend einer mysteriösen Weise in sich? – Nun, wenn man philosophiert. Und was verleitet uns, das zu denken? Die Art und Weise, wie wir von der Maschine reden. Wir sagen z.B., die Maschine *habe* (*besäße*) diese Bewegungsmöglichkeiten, wir sprechen von der ideal starren Maschine, die sich nur so und so bewegen *könne*. − − Die Bewegungs**möglichkeit**, was ist sie? Sie ist nicht die *Bewegung*; aber sie scheint auch nicht die bloße physikalische *Bedingung* der Bewegung zu sein, etwa, daß zwischen Lager und Zapfen ein gewisser Zwischenraum ist, der Zapfen nicht zu streng ins Lager paßt. Denn dies ist zwar *erfahrungsmäßig* die Bedingung der Bewegung, aber man könnte sich die Sache auch anders vorstellen. Die Bewegungsmöglichkeit soll mehr wie ein Schatten der Bewegung selber sein. Aber kennst Du so einen Schatten? Und unter Schatten verstehe ich nicht irgendein Bild der Bewegung; denn dies Bild müßte ja nicht das Bild gerade *dieser* Bewegung sein. Aber die Möglichkeit dieser Bewegung muß die Möglichkeit gerade dieser Bewegung sein. (Sieh', wie hoch die Wellen der Sprache hier gehen.) Die Wellen legen sich, so wie wir uns fragen: wie gebrauchen wir denn, wenn wir von einer Maschine reden, das Wort "Möglichkeit der Bewegung"? – Woher kamen aber dann diese seltsamen Ideen? Nun, ich zeige Dir die Möglichkeit der Bewegung etwa durch ein *Bild* der Bewegung: 'also ist die Möglichkeit etwas der Wirklichkeit Ähnliches'. Wir sagen: "es bewegt sich noch nicht, aber es hat schon die Möglichkeit sich zu bewegen", 'also ist die Möglichkeit etwas der Wirklichkeit sehr Nahes'. Wir mögen zwar bezweifeln, ob die und die

physikalische Bedingung diese Bewegung möglich macht, aber wir diskutieren nie, ob *dies* die Möglichkeit dieser oder jener Bewegung *sei*: 'also steht die Möglichkeit der Bewegung zur Bewegung selbst in einer einzigartigen Relation, enger, als die des Bildes zu seinem Gegenstand', denn es kann bezweifelt werden, ob dies das Bild dieses oder jenes Gegenstandes ist. Wir sagen: "die Erfahrung wird lehren, ob dies dem Zapfen diese Bewegungsmöglichkeit gibt", aber wir sagen nicht: "die Erfahrung wird lehren, ob dies die Möglichkeit dieser Bewegung ist": 'also ist es nicht Erfahrungstatsache, daß diese Möglichkeit die Möglichkeit gerade dieser Bewegung ist'. Wir achten auf unsere eigene Ausdrucksweise, diese Dinge betreffend, verstehen sie aber nicht, sondern mißdeuten sie. Wir sind, wenn wir philosophieren, wie Wilde, wie primitive Menschen, die die Ausdrucksweise zivilisierter Menschen hören, sie mißdeuten und nun seltsame Schlüsse aus dieser Deutung ziehen. Denke Dir, es verstünde Einer unsre Vergangenheitsform nicht: "er ist hier gewesen". − − Er sagt: "'er *ist*', das ist die Gegenwart, also sagt jener Satz, daß die Vergangenheit in einem gewissen Sinne gegenwärtig ist".

Ts-222 102[1] & 103[1]

126 "Aber ich meine nicht, daß, was ich jetzt (beim Erfassen) tue, die künftige Verwendung *kausal* und erfahrungsgemäß bestimmt, sondern daß, in einer *seltsamen* Weise diese Verwendung selbst in irgendeinem Sinne, gegenwärtig ist." – Aber 'in **irgend**einem Sinne' ist sie es ja! (Wir sagen ja auch: "die Ereignisse der vergangenen Jahre sind mir gegenwärtig".) Eigentlich ist an dem, was Du sagst, falsch nur der Ausdruck: "in seltsamer Weise". Das Übrige ist richtig; und seltsam erscheint der Satz nur, wenn man sich zu ihm ein anderes Sprachspiel vorstellt, als das, worin wir ihn tatsächlich verwenden. (Jemand sagte mir, er habe sich als Kind darüber gewundert, wie denn der Schneider *'ein Kleid nähe'* – er dachte, dies heiße, es werde durch *bloßes* Nähen ein Kleid erzeugt, indem nämlich Faden an Faden genäht würde.)

Ts-222 103[2]

127 Die unverstandene Verwendung des Wortes wird als Ausdruck eines seltsamen *Vorgangs* gedeutet. (Wie man sich die Zeit als seltsames Medium, die Seele als seltsames Wesen denkt.) Die Schwierigkeit aber entsteht hier in allen Fällen durch die Vermischung von "ist" und "heißt".

Ts-222 103[3]

128 Die Verbindung, die keine kausale, erfahrungsmäßige, sondern eine viel strengere und härtere sein soll, ja, so fest, daß das Eine irgendwie schon das Andere *ist*, ist immer eine Verbindung in der Grammatik.

Ts-222 103[4]

129 Woher weiß ich, daß dies Bild meine Vorstellung von der *Sonne* ist? – Ich *nenne* es Vorstellung von der Sonne. Ich *verwende* es als Bild der *Sonne*.

Ts-222 104[1]

130 "Es ist, als könnten wir die ganze Verwendung des Wortes mit einem Schlag erfassen." – Wir sagen ja, daß wir es tun. D.h., wir beschreiben ja, manchmal, was geschieht , mit diesen Worten. Aber es ist an dem, was geschieht, nichts Erstaunliches, nichts Seltsames. Seltsam wird es, wenn wir dazu geführt werden, zu denken, daß die künftige Entwickelung auf irgendeine Weise schon im Akt des Erfassens gegenwärtig sein muß und doch nicht gegenwärtig ist. – Denn wir sagen, es bestehe kein Zweifel, daß wir das Wort ..... verstehen und anderseits liegt seine Bedeutung in seiner Verwendung. Es ist kein Zweifel, daß ich jetzt *Schach* spielen will; aber das Schachspiel ist dies Spiel durch *alle seine Regeln* (u.s.f.). Weiß ich also nicht, was ich spielen wollte, ehe ich gespielt *habe*? Oder aber, sind alle Regeln in meinem Akt der Intention enthalten? Ist es nun Erfahrung, die mich lehrt, daß auf diesen Akt der Intention für gewöhnlich diese Art des Spielens folgt? Kann ich also doch nicht sicher sein, was ich zu tun beabsichtigte? Und wenn dies Unsinn ist, welcherlei überstarre Verbindung besteht zwischen dem Akt der Absicht und dem Beabsichtigten? − − Wo ist die Verbindung gemacht zwischen dem Sinn der Worte "Spielen wir eine Partie Schach!" und allen Regeln des Spiels? – Im Regelverzeichnis des Spiels, im Schachunterricht, in der täglichen Praxis des Spielens.

Ts-222 105[1] & 106[1]

131 Die logischen Gesetze sind allerdings der Ausdruck von 'Denkgewohnheiten', aber auch von der Gewohnheit *zu denken*. D.h., man kann sagen, sie zeigten: wie Menschen denken und auch, *was* Menschen "denken" nennen. [→ Bemerkung über Denkgewohnheiten & Denkfaulheit im Notizbuch]

Siehe auch S. 173

Ts-222 106[2] **132** Frege nennt 'ein Gesetz des menschlichen Fürwahrhaltens': "Es ist den Menschen …. unmöglich, einen Gegenstand als von ihm selbst verschieden anzuerkennen". – Wenn ich denke, daß mir das unmöglich ist, so denke ich, daß ich *versuche*, es zu tun. Ich schaue also auf meine Lampe und sage: "diese Lampe ist verschieden von ihr selbst". (Aber es rührt sich nichts.) Ich sehe nicht etwa, daß es falsch ist, sondern ich kann damit garnichts anfangen. (Außer, wenn die Lampe im Sonnenlicht flimmert, dann kann ich das ganz gut durch diesen Satz ausdrücken.) Man kann sich auch in eine Art Denkkrampf versetzen, in welchem man *tut*, als versuchte man, das Unmögliche zu denken und es gelänge nicht. Ähnlich, wie man auch *tun* kann, als versuchte man (vergeblich) einen Gegenstand aus der Ferne durch bloßes Wollen an sich heran zu ziehen. (Dabei schneidet man etwa gewisse Gesichter, so, als wollte man dem Ding durch Mienen zu verstehen geben, es solle herkommen.) [→ Siehe Bemerkung über Identität]

Ts-222 107[1] **133** Die Sätze der Logik sind 'Denkgesetze', 'weil sie das Wesen des menschlichen Denkens zum Ausdruck bringen' – richtiger aber: weil sie das Wesen, die Technik (Watson), des Denkens zum Ausdruck bringen, oder zeigen. Sie zeigen, was das Denken ist, und auch Arten des Denkens.

Ts-222 108[1] **134** Die Logik – kann man sagen – zeigt, was wir unter "Satz" und unter "Sprache" verstehen. –

Ts-222 109[1] **135** Denk Dir diese seltsame Möglichkeit: Wir hätten uns bisher immer in der Multiplikation 12 × 12 verrechnet. Ja, es ist unbegreiflich, wie das geschehen konnte, aber es ist geschehen. Also ist alles falsch, was man so ausgerechnet hat! − − Aber was macht das? Es macht ja garnichts! – Dann muß also etwas falsch sein in unsrer Idee von Wahrheit und Falschheit der mathematischen Sätze.

Ts-222 110[1] **136** Aber ist es denn unmöglich, daß ich mich in der Rechnung geirrt habe? Und wie, wenn mich ein Teufelchen irrt, so daß ich irgend etwas immer wieder übersehe, so oft ich auch, Schritt für Schritt nachrechne. Sodaß, wenn ich aus der Verhexung erwachte, ich sagen würde: “ja, war ich denn blind!” – Aber welchen Unterschied macht es, wenn ich dies ‘annehme’? Ich könnte dann sagen: “Ja ja, die Rechnung ist gewiß falsch – aber so rechne ich. Und das nenne ich nun addieren, und diese Zahl die Summe dieser beiden.”

Ts-222 110[2] **137** Denke, jemand würde so behext, daß er rechnete:

also 4 × 3 + 2 = 10

Nun soll er seine Rechnung anwenden. Er nimmt viermal 3 Nüsse und noch 2, und verteilt sie unter 10 Leute; und jeder erhält *eine* Nuß: denn er teilt sie, den Bögen der Rechnung entsprechend, aus und so oft er Einem eine zweite Nuß gibt, ist sie verschwunden.

Widerspruch

Ts-222 110[3] & 111[1]

138 Man könnte auch sagen; Du schreitest in dem Beweis von Satz zu Satz; aber läßt Du Dir denn auch eine Kontrolle dafür gefallen, daß Du richtig gegangen bist? – Oder sagst Du bloß, "Es *muß* stimmen" und mißt alles andere mit dem Satz, den Du erhältst?

Ts-222 111[2]

139 Denn, wenn es *so* ist, dann schreitest Du nur von Bild zu Bild.

Ts-222 111[3]

140 Es könnte praktisch sein, mit einem Maßstab zu messen, der die Eigenschaft hat, sich auf etwa die Hälfte seiner Länge zusammen zu ziehen, wenn er aus diesem Raum in jenen gebracht wird. Eine Eigenschaft, die ihn unter andern Verhältnissen zum Maßstab untauglich machen würde. Es könnte praktisch sein, beim Abzählen einer Menge, unter gewissen Umständen, Ziffern auszulassen; sie abzuzählen: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.

Ts-222 112[1] & 113[1]

141 Was geht da vor, wenn Einer versucht, eine Figur mit ihrem Spiegelbild durch Verschieben in der Ebene zur Deckung zu bringen und es ihm nicht gelingt? Er legt sie in verschiedener Weise aufeinander, blickt auf die Teile, die sich nicht decken, ist unbefriedigt, sagt etwa: "es *muß* doch gehen", und legt die Figuren wieder anders zusammen. Was geht vor, wenn Einer versucht ein Gewicht aufzuheben und es ihm nicht gelingt, weil das Gewicht zu schwer ist? Er nimmt die und die Stellung ein, faßt das Gewicht an und spannt die und die Muskeln an, dann läßt er es los und gibt etwa Zeichen der Unbefriedigung. Worin zeigt sich die geometrische, logische, Unmöglichkeit der ersten *Aufgabe*? "Nun er hätte doch an einem Bild oder in andrer Weise zeigen können, wie das aussieht, was er im zweiten Versuch anstrebt." Aber er behauptet, das auch im ersten Fall zu können, indem er zwei gleiche, *kongruente*, Figuren miteinander zur Deckung bringt. – Was sollen wir nun sagen? Daß diese beiden Fälle eben verschieden sind? Aber so sind ja auch Bild und Wirklichkeit im zweiten Fall.

Ts-222 114[1]

142 Was wir liefern, sind eigentlich Bemerkungen zur Naturgeschichte des Menschen; aber nicht kuriose Beiträge, sondern Feststellungen von Fakten, an denen niemand gezweifelt hat, und die dem Bemerktwerden nur entgehen, weil sie sich ständig vor unsern Augen herumtreiben.

Ts-222 115[1] & 116[1] **143** Wir lehren jemand eine Methode, Nüsse unter Leute zu verteilen; ein Teil dieser Methode ist das Multiplizieren zweier Zahlen im Dezimalsystem. Wir lehren jemand ein Haus errichten; dabei auch, wie er sich die genügenden Mengen von Material, etwa Brettern, anschaffen soll, hiezu eine Technik des Rechnens. Die Technik des Rechnens ist ein Teil der Technik des Hausbaues. Leute verkaufen und kaufen Scheitholz; die Stöße werden mit einem Maßstab gemessen, die Maßzahlen der Länge, Breite, Höhe multipliziert, und was dabei herauskommt, ist die Zahl der Groschen, die sie zu fordern und zu geben haben. Sie wissen nicht, 'warum' dies so geschieht, sondern sie machen es einfach so: so wird es gemacht. – Rechnen diese Leute nicht?

Ts-222 116[2] **144** Wer so rechnet, muß er einen 'arithmetischen *Satz*' aussprechen? Wir lehren freilich die Kinder das Einmaleins in Form von *Sätzchen*, aber ist das wesentlich? Warum sollten sie nicht einfach: *rechnen lernen*? Und wenn sie es können, haben sie nicht Arithmetik gelernt?

Ts-222 116[3] **145** Aber in welchem Verhältnis steht dann die *Begründung* eines Rechenvorgangs zu der Rechnung selbst?

Ts-222 116[4] **146** "Ja, ich verstehe, daß dieser Satz aus diesem folgt." – Verstehe ich, *warum* er folgt, oder verstehe ich nur, *daß* er folgt?

Ts-222 116[5] **147** Wie, wenn ich gesagt hätte: Jene Leute zahlen für's Holz *auf Grund der Rechnung*; sie lassen sich die Rechnung als Beweis dafür gefallen, daß sie soviel zu zahlen haben. – Nun, es ist einfach eine Beschreibung ihres Vorgehens (Benehmens).

Ts-222 117[1] 148 Jene Leute – würden wir sagen – verkaufen das Holz nach dem Kubikmaß – – aber haben sie darin recht? Wäre es nicht richtiger, es nach dem Gewicht zu verkaufen – oder nach der Arbeitszeit des Fällens – oder nach der Mühe des Fällens, gemessen am Alter und an der Stärke des Holzfällers? Und warum sollten sie es nicht für einen Preis hergeben, der von alledem unabhängig ist: jeder Käufer zahlt ein und dasselbe, wieviel immer er nimmt (man hat gefunden, daß man so leben kann). Und ist etwas dagegen zu sagen, daß man das Holz einfach verschenkt?

Ts-222 117[2] & 118[1] 149 Gut; aber wie, wenn sie das Holz in Stöße von beliebigen, verschiedenen Höhen schlichteten und es dann zu einem Preis proportional der Grundfläche der Stöße verkauften? Und wie, wenn sie dies sogar mit den Worten begründeten: “Ja, wer mehr Holz kauft, muß auch mehr zahlen.”

Ts-222 118[2] 150 Wie könnte ich ihnen nun zeigen, daß – wie ich sagen würde – der nicht wirklich mehr Holz kauft, der einen Stoß von größerer Grundfläche kauft? – Ich würde z.B. einen, nach ihren Begriffen, kleinen Stoß nehmen und ihn durch Umlegen der Scheiter in einen ‘großen’ verwandeln. Das *könnte* sie überzeugen – vielleicht aber würden sie sagen: “ja, jetzt ist es *viel* Holz und kostet mehr” – und damit wäre es Schluß. – Wir würden in diesem Falle wohl sagen: sie meinen mit “viel Holz” und “wenig Holz” einfach nicht das Gleiche, wie wir; und sie haben ein ganz anderes System der Bezahlung, als wir.

Ts-222 118[4] 151 (Eine Gesellschaft, die so handelt, würde uns vielleicht an die “Klugen Leute” in dem Märchen erinnern.) [→ [Der Satz S. 173 “Die Logik .....” könnte vielleicht hierher kommen]]

Ts-222 118[3] 152 Frege sagt im Vorwort der Grundgesetze der Arithmetik: “..... hier haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit” – aber er hat nie angegeben, wie diese ‘Verrücktheit’ wirklich aussehen würde.

Ts-222 119[1] 153 Worin besteht die Übereinstimmung der Menschen bezüglich der Anerkennung einer Struktur als der eines Beweises? Darin. daß sie Worte als *Sprache* gebrauchen? Als das, was wir “Sprache” nennen. Denke Dir Menschen, die Geld im Verkehr gebrauchten, nämlich Münzen, die so aussehen wie unsere Münzen, aus Gold oder Silber sind und geprägt; und sie geben sie auch für Waren her – – aber jeder gibt für die Waren, was ihm gerade gefällt und der Kaufmann gibt dem Kunden nicht mehr, oder weniger, je nachdem er bezahlt; kurz, dies Geld, oder was so aussieht, spielt bei ihnen eine ganz andere Rolle als bei uns. Wir würden uns diesen Leuten viel weniger verwandt fühlen, als solchen, die noch gar kein Geld kennen und eine primitive Art des Tauschhandels treiben. – “Aber die Münzen dieser Leute werden doch auch einen Zweck haben!” – Hat denn alles, was man tut, einen Zweck? Etwa religiöse Handlungen –. Es ist schon möglich, daß wir geneigt wären, Menschen, die sich so benehmen, Verrückte zu nennen. Aber doch nennen wir nicht alle die Verrückte, die in den Formen unserer Kultur ähnlich handeln, Worte ‘zwecklos’ verwenden. (Denke an die Krönung eines Königs!)

Ts-222 120[1] & 121[1] **154** Zum Beweis gehört Übersichtlichkeit. Wäre der Prozeß, durch den ich das Resultat erhalte, unübersehbar, so könnte ich zwar das Ergebnis, daß diese Zahl herauskommt, vermerken – welche Tatsache aber soll es mir bestätigen? ich weiß nicht: 'was herauskommen *soll*'.

Ts-222 122[1] **155** Wäre es möglich, daß Leute heute eine unsrer Berechnungen durchgingen und von den Schlüssen befriedigt wären, morgen aber ganz andere Schlüsse ziehen wollen, und einen andern Tag wieder andere? Ja, kann man sich nicht denken, daß dies mit einer *Gesetzmäßigkeit* so geschähe; daß, wenn er einmal *diesen* Übergang macht, er '*eben darum*' das nächste Mal einen andern macht, und darum (etwa) das nächste Mal wieder den ersten? (Ähnlich, wie wenn in einer Sprache die Farbe, die einmal "rot" genannt wird, darum beim nächsten Male anders genannt würde und beim übernächsten wieder "rot", u.s.f.; dies könnte Menschen so natürlich sein. Man könnte es ein Bedürfnis nach Abwechslung nennen.) Sind unsere Schlußgesetze ewig & unveränderlich?

Ts-222 124[1] & 125[1]

156 Ist es nicht so: Solange man denkt, es kann nicht anders sein, zieht man logische Schlüsse. Das heißt wohl: solange *das und das gar nicht in Frage gezogen wird*. Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie nicht darum *nicht* in Frage, weil sie 'sicher der Wahrheit entsprechen' – oder dergl. – sondern, dies ist eben, was man 'Denken', 'Sprechen', 'Schließen', 'Argumentieren', nennt. Es handelt sich hier garnicht um irgendeine Entsprechung des Gesagten mit der Realität; vielmehr ist die Logik *vor* einer solchen Entsprechung; nämlich in dem Sinne, in welchem die Festlegung der Meßmethode *vor* der Richtigkeit oder Falschheit einer Längenangabe ist.

[→ *Siehe S. 173*

Ist die Maßeinheit willkürlich

> 3 Bemerkungen Bd. XIII auch Bd. XII / S. 133/3]

Ts-222 126[1]

157 Wird es nun experimentell festgestellt, ob sich ein Satz aus dem andern ableiten läßt? – Es scheint, ja! Denn ich schreibe gewisse Zeichenfolgen hin, richte mich dabei nach gewissen Paradigmen – dabei ist es allerdings wesentlich, daß ich kein Zeichen übersehe, oder daß es sonstwie abhanden kommt – und was bei diesem Vorgang entsteht, davon sage ich, es folge. − − Dagegen ist ein Argument dies: Wenn 2 und 2 Äpfel nur 3 Äpfel geben, d.h., wenn 3 Äpfel daliegen, nachdem ich zwei und wieder zwei hingelegt habe, sage ich nun nicht: "2 + 2 ist also doch nicht immer 4"; sondern: "Einer muß irgendwie weggekommen sein".

Ts-222 126[2] **158** Aber inwiefern mache ich ein Experiment, wenn ich dem schon hingeschriebenen Beweis nur *folge*? Man könnte sagen: "Wenn Du diese Kette von Umformungen ansiehst, – *kommt* es *Dir nicht auch so vor, als stimmten sie* mit den Paradigmen?"

Ts-222 127[1] **159** Wenn das also ein Experiment genannt werden soll, dann wohl ein psychologisches. – Der Anschein des Stimmens kann ja auf einer Sinnestäuschung beruhen. Und so ist es ja auch manchmal, wenn wir uns verrechnen. Man sagt auch: "Das kommt mir heraus." Und es ist doch wohl ein Experiment, das zeigt, daß dies *mir* herauskommt.

Ts-222 127[2] **160** Man könnte sagen: Das Resultat des Experiments ist dies, daß ich, am Ende, beim Resultat des Beweises angelangt, mit Überzeugung sage: "Ja, es stimmt."

Ts-222 128[1] & 129[1] **161** Ist eine Berechnung ein Experiment? – Ist es ein Experiment, wenn ich morgens aus dem Bett steige? Aber könnte dies nicht ein Experiment sein, – welches zeigen soll, ob ich nach so und soviel Stunden Schlafes die Kraft habe, mich zu erheben? Und was fehlt dieser Handlung dazu, dies Experiment zu sein? – Bloß, daß sie nicht zu diesem Zwecke, d.h., in der Verbindung mit einer solchen Untersuchung ausgeführt wird. *Experiment* ist etwas durch den Gebrauch, der davon gemacht wird.

Ts-222 130[1] Ist ein Experiment, in welchem wir die Beschleunigung beim freien Fall beobachten, ein physikalisches Experiment, oder ist es ein psychologisches, das zeigt, was Menschen, unter solchen Umständen, sehen? − − Kann es nicht beides sein? Hängt das nicht von seiner *Umgebung* ab: von dem, was wir damit machen, darüber sagen?

Ts-222 131[1] & 132[1] 162 Wenn man einen Beweis als Experiment auffaßt, so ist das Resultat des Experiments jedenfalls nicht das, was man das Resultat des Beweises nennt. Das Resultat der Rechnung ist der Satz, mit welchem sie abschließt; das Resultat des Experiments ist: daß ich von diesen Sätzen durch diese Regeln zu diesem Satz geführt wurde.

Ts-222 132[2] 163 Aber nicht daran haftet unser Interesse, daß die und die (oder alle) Menschen von diesen Regeln so geleitet worden sind (oder so gegangen sind); es gilt uns als selbstverständlich, daß die Menschen – ‘wenn sie richtig denken können’ – *so* gehen. Wir haben jetzt aber einen *Weg* erhalten, sozusagen durch die Fußstapfen derer, die so gegangen sind. Und auf diesem Weg geht nun der Verkehr vor sich – zu verschiedenen Zwecken.

Ts-222 133[1] 164 Erfahrung lehrt mich freilich, wie die Rechnung ausgeht; aber damit erkenne ich sie noch nicht an.

Ts-222 **165** Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß das diesmal
133[2] herausgekommen ist, daß es für gewöhnlich herauskommt; aber sagt das der Satz der Mathematik? Die Erfahrung hat mich gelehrt, daß ich diesen Weg gegangen bin. Aber ist *das* die mathematische Aussage? – Was sagt er aber? In welchem Verhältnis steht er zu diesen Erfahrungssätzen? Der mathematische Satz hat die Würde einer Regel. *Das* ist wahr daran, daß Mathematik Logik ist: sie bewegt sich in den Regeln unsrer Sprache. Und das gibt ihr ihre besondere Festigkeit, ihre abgesonderte und unangreifbare Stellung.

Mathematik unter den Urmaßen niedergelegt

Ts-222 **166** Aber wie –, dreht sie sich in diesen Regeln *hin* und *her*? –
133[3] & Sie schafft neue und neue Regeln: baut immer neue Straßen des
134[1] Verkehrs; indem sie das Netz der alten weiterbaut.

Ts-222 **167** Aber bedarf sie denn dazu nicht einer Sanktion? Kann sie
134[3] das Netz denn *beliebig* weiterführen? Nun, ich könnte ja sagen: der Mathematiker erfindet immer neue Darstellungsformen. Die einen, angeregt durch praktische Bedürfnisse, andre aus ästhetischen Bedürfnissen, und noch mancherlei anderen. Und denke Dir hier einen Gartenarchitekten, der Wege für eine Gartenanlage entwirft; es kann wohl sein, daß er sie bloß als ornamentale Bänder auf dem Reißbrett zieht und garnicht daran denkt, daß jemand je auf ihnen gehen wird.

Ts-222 **168** Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker.
134[4]

Ts-222 134[5] & 135[1]

169 Erfahrung lehrt, daß beim Auszählen, wenn wir die Finger einer Hand brauchen, oder irgend eine Gruppe von Dingen, die so | | | | | ausschaut, und an ihnen abzählen: Ich, Du, Ich, Du, etc. das erste Wort auch das letzte ist. “Aber *muß* es denn nicht so sein?” − − Ist es denn so unvorstellbar, daß Einer die Gruppe | | | | | (z.B.) als Gruppe | | | | | | sieht, in der die beiden Mittelstriche verschmolzen sind und dementsprechend den Mittelstrich zweimal zählt. (Ja, das Gewöhnliche ist es nicht. –)

Ts-222 135[2]

170 Wie aber ist es, wenn ich Einen erst darauf aufmerksam mache, daß das Ergebnis des Auszählens durch den Anfang vorausbestimmt ist, und er es nun versteht und sagt: “Ja freilich, – es muß ja so sein!” Was ist das für eine Erkenntnis? – Er hat sich etwa das Schema aufgezeichnet:

Und sein Raisonnement wäre etwa: “Es ist doch *so*, wenn ich auszähle. – Also muß ……”

Ts-222 148[1] & 149[1]

171 (Damit hängt zusammen: Wir möchten manchmal sagen, "es muß doch einen Grund haben, warum auf dieses Thema – in einem Sonatensatz etwa – gerade *das* Thema folgt". Als Grund würden wir eine gewisse Beziehung der beiden Themen, eine Verwandtschaft, einen Gegensatz, oder dergleichen, anerkennen. – Aber wir können ja eine solche Beziehung konstruieren: sozusagen eine Operation, die das eine Thema aus dem andern erzeugt; aber damit ist uns nur gedient, wenn diese Beziehung eine uns wohlbekannte ist. Es ist also, als müßte die Folge dieser Themen einem in uns schon vorhandenen Paradigma entsprechen. Von einem Gemälde, das zwei menschliche Gestalten zeigt, könnte man ähnlich sagen: "Es muß einen Grund haben, warum gerade *diese* zwei Gesichter uns einen solchen Eindruck machen." Wir möchten – heißt das – diesen Eindruck der beiden Gesichter wo anders wieder finden – in einem anderen Gebiet. – Aber ob er wieder zu finden ist? Man könnte auch fragen: Welche Zusammenstellung von Themen hat eine *Pointe*, welche *keine*? Oder: *Warum* hat diese Zusammenstellung eine Pointe und *die* keine? Das mag nicht leicht zu sagen sein! Oft können wir sagen: "Diese entspricht einer Geste, diese nicht.")

I App I

Ts-222 136[1] 1 Könnte ich nicht sagen, zwei Wörter – schreiben wir sie “non” und “ne” – hätten dieselbe Bedeutung, sie seien beide Verneinungszeichen– aber

non non p = p

und

ne ne p = ne p?

(In den Wortsprachen bedeutet eine doppelte Verneinung sehr oft eine Verneinung.) Warum nenne ich dann aber beide “Verneinungen”? Was haben sie miteinander gemein? Nun, es ist klar, ein großer Teil ihrer Verwendung ist ihnen gemeinsam. Das löst aber unser Problem noch nicht. Denn wir möchten doch sagen: Auch, daß die doppelte Verneinung eine Bejahung ist, muß für beide stimmen, wenn wir nur die Verdoppelung entsprechend auffassen. Aber *wie*? – Nun so, wie es z.B. durch Klammern ausgedrückt werden kann.

(ne ne) p = ne p, ne (ne p) = p

Wir denken gleich an einen analogen Fall der Geometrie: “Zwei halbe Drehungen addiert heben einander auf”, “Zwei halbe Drehungen addiert sind eine halbe Drehung”.

[Figuren]

I II

Es kommt eben darauf an, wie wir sie addieren

Ts-222 137[1] 2 (Wir stoßen hier auf eine merkwürdige (und charakteristische) Erscheinung in philosophischen Untersuchungen: Die Schwierigkeit – könnte ich sagen – ist nicht, die Lösung zu finden, sondern, etwas als die Lösung anzuerkennen, was aussieht, als wäre es erst eine Vorstufe zu ihr. Wir haben schon alles gesagt. – Nicht etwas, was daraus folgt, sondern eben *das* ist die Lösung! Das hängt, glaube ich, damit zusammen, daß wir fälschlich eine Erklärung erwarten; während eine Beschreibung die Lösung der Schwierigkeit ist, wenn wir sie richtig in unsere Betrachtung einordnen. Wenn wir bei ihr verweilen und nicht versuchen, über sie hinauszukommen.)

Ts-222 137[2] & 138[1] 3 "Das ist bereits alles, was sich darüber sagen läßt." –

"non non p" als Verneinung des verneinten Satzes *auffassen*, das ist im besonderen Fall etwa: eine Erklärung der Art "non non p = non (non p)" geben.

Ts-222 137[2] & 138[1].2

4 "Wenn 'ne' eine Verneinung ist, so muß 'ne ne p', wenn es nur entsprechend aufgefaßt wird, gleich p sein." "Wenn man 'ne ne p' als Negation von p nimmt, muß man die Verdoppelung anders auffassen." Man möchte sagen: "'Verdoppelung' *heißt* dann etwas anderes, *darum* ergibt sie jetzt eine Verneinung", also: daß sie jetzt eine Verneinung ergibt ist die Folge ihrer anderen Bedeutung. "Ich meine sie jetzt als Verstärkung", würde man sagen. Wir setzen statt der Meinung den Ausdruck der Meinung. Richte Deinen Blick auf den Ausdruck der Meinung

[→ Siehe № 60]

Ts-222 138[2]

5 Worin mag das gelegen haben, als ich die doppelte Verneinung sagte, daß ich sie als Verstärkung meinte? Die Verdoppelung als Aufhebung meinen, war z.B. die Klammern zu setzen. – "Ja, aber diese Klammern selbst können doch verschiedene Rollen spielen; denn wer sagt, daß sie in 'non (non p)' im gewöhnlichen Sinn als Klammern aufzufassen seien und nicht z.B. die erste als Trennungsstrich zwischen den beiden 'non', die zweite als Schlußpunkt des Satzes?" – Niemand sagt es. Und Du hast ja Deine Auffassung jetzt wieder durch Worte ersetzt. Was die Klammern bedeuten, wird sich in ihrem Gebrauch zeigen und, in anderm Sinn, liegt es etwa im Rhythmus des Gesichtseindrucks von 'non (non-p)'.

Ts-222 138[3] & 139[1]

6 Soll ich nun sagen: die Bedeutungen von "non" und "ne" seien *etwas* verschieden? Sie seien verschiedene Abarten der Verneinung? – Das würde niemand sagen. Denn, würde man einwenden, heißt dann "geh nicht in dieses Zimmer!" vielleicht nicht genau dasselbe wie gewöhnlich, wenn wir die Regel aufstellen "nicht nicht" solle als Verneinung gebraucht werden? – Dagegen aber möchte man einwenden: "Wenn die beiden Sätze 'ne P' und 'non P' ganz dasselbe sagen, wie kann dann 'ne ne' nicht dasselbe bedeuten wie 'non non'?" Aber hier setzen wir eben einen Symbolismus voraus – d.h., nehmen ihn zum Vorbild – in welchem aus 'ne p = non p' folgt, daß die beiden Wörter in allen Fällen gleich verwendet werden. Die Drehung um 180° und die Verneinung sind im besonderen Fall tatsächlich dasselbe, und die Anwendung des Satzes 'non non p = p' von der Art der Anwendung einer bestimmten Geometrie.

Ts-222 139[3] & 140[1]

7 Was meint man damit: 'ne ne p', auch wenn es nach dem Übereinkommen 'ne p' bedeutet, *könnte* auch als aufgehobene Verneinung gebraucht werden? – Man möchte sagen: "'ne', mit der Bedeutung, die wir ihm gegeben haben, könnte sich selbst aufheben, wenn wir es nur richtig applizieren." Was meint man damit? (Die beiden halben Drehungen in der gleichen Richtung könnten einander aufheben, wenn sie entsprechend zusammengesetzt würden.) "Die *Bewegung* der Verneinung 'ne' kann sich selbst aufheben". Aber wo ist diese Bewegung? Man möchte natürlich von einer geistigen Bewegung der Verneinung reden, zu deren Ausführung das Zeichen 'ne' nur das Signal gibt.

Ts-222 140[2] **8** Wir können uns (leicht) Menschen mit einer 'primitiveren' Logik denken, in der es etwas unserer Verneinung Entsprechendes nur für gewisse Sätze gibt; für solche etwa, die keine Verneinung enthalten. In der Sprache dieser Menschen könnte man dann einen Satz wie "Er geht in dieses Haus" verneinen; sie würden aber eine Verdoppelung der Verneinung als bloße Wiederholung, nie als Aufhebung der Verneinung verstehen.

Ts-222 140[3] **9** Die Frage, ob für diese Menschen die Verneinung dieselbe Bedeutung hat, wie für uns, wäre dann analog der, ob die Ziffer '2' für Menschen, deren Zahlenreihe mit 5 endigt dasselbe bedeutet wie für uns.

[→ Y *§2 S. 258*]

Ts-222 139[2] **10** Denken wir, ich fragte: Zeigt es sich uns klar, wenn wir die Sätze aussprechen "dieser Stab ist 1 m lang" und "hier steht 1 Soldat", daß wir mit '1' verschiedenes meinen, daß '1' verschiedene Bedeutungen hat? – Es zeigt sich uns garnicht. Besonders, wenn wir einen Satz sagen wie: "Auf je 1 m steht 1 Soldat, auf 2 m 2 Soldaten u.s.w.". Gefragt, "Meinst Du dasselbe mit den beiden Einsern", würde man etwa antworten: "freilich meine ich dasselbe: – ***eins***!" (wobei man etwa einen Finger in die Höhe hebt).

Ts-222 140[5] & 141[1]

11 Wer "~~p = p" (oder auch "~~p ≡ p") einen "notwendigen Satz der Logik" nennt (nicht, eine Bestimmung über die von uns angenommene Darstellungsart) der hat auch die Tendenz zu sagen, dieser Satz gehe aus der Bedeutung der Verneinung hervor. Wenn in einer dialektischen Redeweise die doppelte Verneinung als Verneinung gebraucht wird, wie in "er hat nirgends nichts gefunden", so sind wir geneigt zu sagen: *eigentlich* heiße das, er habe überall etwas gefunden. Überlegen wir, was dieses "eigentlich" heißt! –

Ts-222 141[2]

12 Angenommen, wir hätten zwei Systeme der Längenmessung; eine Länge wird in beiden durch ein Zahlzeichen ausgedrückt, diesem folgt ein Wort, welches das Maßsystem angibt. Das eine System bezeichnet eine Länge als "n Fuß" und Fuß ist eine Längeneinheit im gewöhnlichen Sinne; im andern System wird eine Länge mit "n W" bezeichnet und

1 Fuß = 1 W.

Aber: 2 W = 4 Fuß, 3 W = 9 Fuß, usw. – Also heißt der Satz "dieser Stock ist 1 W lang" dasselbe wie, "dieser Stock ist 1 Fuß lang". Frage: Hat in diesen beiden Sätzen "W" und "Fuß" dieselbe Bedeutung? Die Frage sollte lauten: "Ist W = Fuß?" Nun wir sagten ja ……

Ts-222 141[3] & 142[1]

13 Die Frage ist falsch gestellt. Das sieht man, wenn wir Bedeutungsgleichheit durch eine Gleichung ausdrücken. Die Frage kann dann nur lauten: "Ist W = Fuß, oder nicht?" – Die Sätze, in denen diese Zeichen stehen, verschwinden in dieser Betrachtung. – Ebensowenig kann man natürlich in dieser Terminologie fragen, ob "ist" das gleiche bedeutet wie "ist"; wohl aber, ob "ε" das gleiche bedeutet wie " = ". Nun, wir sagten ja: 1 Fuß = 1 W, aber Fuß ≠ W.

Ts-222 142[2]

14 Hat nun "ne" dieselbe Bedeutung wie "non"? – Kann ich "ne" statt "non" setzen? – "Nun, an gewissen Stellen wohl, an andern nicht." – Aber danach fragte ich nicht. Meine Frage war: kann man, ohne weitere Qualifikation "ne" statt "non" gebrauchen? – Nein.

Ts-222 142[3]

15 "'ne' und 'non' heißen in *diesem* Fall genau dasselbe." – Und zwar *was*? – "Nun, man solle das und das *nicht* tun." – Aber damit hast Du nur gesagt, daß in diesem Fall ne p = non p ist und das leugnen wir nicht. Wenn Du erklärst ne ne p = ne p, non non p = p, so gebrauchst Du die beiden Wörter eben in verschiedener Weise; und hält man dann an der Auffassung fest, daß, was sie in gewissen Kombinationen ergeben, von ihrer Bedeutung 'abhängt', der Bedeutung, die sie mit sich herumtragen, dann muß man also sagen, sie müssen verschiedene Bedeutungen haben, wenn sie, auf gleiche Weise zusammengesetzt, verschiedene Resultate ergeben können.

Ts-222 142[4] & 143[1]

16 Man möchte etwa von der *Funktion*, der Tätigkeit, Wirkungsweise des Wortes in diesem Satz reden wie von der Funktion eines Hebels in einer Maschine. Aber worin besteht diese Funktion? Wie tritt sie zutage? Denn es ist ja nichts verborgen! wir sehen ja den ganzen Satz. Die Funktion muß sich im Laufe des Kalküls zeigen. Man will aber sagen: "'non' *tut* dasselbe mit 'p', was 'ne' tut: es kehrt ihn um". Aber das sind nur andere Worte für: "non p = ne p". Immer wieder der Gedanke, das Bild daß, was wir vom Zeichen sehen, nur eine Außenseite zu einem Innern ist, worin sich die eigentlichen Prozesse des Sinnes und der Bedeutung abspielen.

Ts-222 143[2]

17 Wenn aber der Gebrauch der Zeichen seine Bedeutung ist ... Ist es nun nicht merkwürdig, daß ich sage, das Wort "ist" werde in zwei verschiedenen Bedeutungen (als 'ε' und ' = ') gebraucht, und nicht sagen möchte, seine Bedeutung sei sein Gebrauch als Man möchte sagen, diese beiden Arten des Gebrauchs geben nicht *eine* Bedeutung; die Personalunion durch das gleiche Wort sei ein unwesentlicher Zufall.

Ts-222 143[3] & 144[1]

18 Aber wie kann ich entscheiden, welches ein wesentlicher und welches ein unwesentlicher, zufälliger Zug der Notation ist? Liegt denn eine Realität hinter der Notation, nach der sich ihre Grammatik richtet? Denken wir an einen ähnlichen Fall im Spiel: Im Damespiel wird eine Dame dadurch gekennzeichnet, daß man zwei Spielsteine aufeinanderlegt. Wird man nun nicht sagen, es sei für das Spiel unwesentlich, daß eine Dame aus zwei Steinen besteht?

Ts-222 144[2] **19** Sagen wir: die Bedeutung eines Steines (einer Figur) ist ihre Rolle im Spiel. – Nun werde vor Beginn jeder Schachpartie durch das Los entschieden, welcher der Spieler Weiß erhält. Dazu halte der eine Spieler in jeder geschlossenen Hand einen Schachkönig und der andere wähle auf gut Glück eine der beiden Hände. Wird man es nun zur Rolle des Königs im Schachspiel rechnen, daß er beim Auslosen verwendet wird?

Ts-222 144[3] **20** Ich bin also geneigt auch im Spiel zwischen wesentlichen und unwesentlichen Regeln zu unterscheiden. Das Spiel, möchte ich sagen, hat nicht nur Regeln, sondern auch einen Witz.

Ts-222 144[4] **21** Wozu das gleiche Wort? Wir machen ja im Kalkül keinen Gebrauch von dieser Gleichheit! Wozu für Beides die gleichen Steine? – Aber was heißt es hier "von der Gleichheit Gebrauch machen"? Ist es denn nicht ein Gebrauch, wenn wir eben das gleiche Wort gebrauchen?

Ts-222 144[5] & 145[1] **22** Hier scheint es nun, als hätte der Gebrauch des gleichen Worts, des gleichen Steines, einen *Zweck* – wenn die Gleichheit nicht zufällig, unwesentlich, ist. Und als sei der Zweck, daß man den Stein wiedererkennen, und wissen könne, wie man zu spielen hat. Ist da von einer physikalischen oder einer logischen Möglichkeit die Rede? Wenn das Letztere, so gehört eben die Gleichheit der Steine zum Spiel.

Ts-222 145[2] 23 Das Spiel soll doch durch die Regeln bestimmt sein! Wenn also eine Spielregel vorschreibt, daß zum Auslosen vor der Schachpartie die Könige zu nehmen sind, so gehört das, wesentlich, zum Spiel. Was könnte man dagegen einwenden? Daß man den Witz dieser Vorschrift nicht einsehe. Etwa, wie man auch den Witz einer Vorschrift nicht einsähe, jeden Stein dreimal umzudrehen, ehe man mit ihm zieht. Fänden wir diese Regel in einem Brettspiel, so würden wir uns wundern, und Vermutungen über den Zweck so einer Regel anstellen. ("Sollte diese Vorschrift verhindern, daß man ohne Überlegung zieht?")

Ts-222 145[3] 24 "Wenn ich den Charakter des Spiels richtig verstehe", könnte ich sagen, "so gehört das nicht wesentlich dazu".

Ts-222 145[4] 25 Denken wir uns aber die beiden Ämter in einer Person vereinigt als ein altes Herkommen.

Ts-222 145[5] & 146[1] 26 Man sagt: der Gebrauch des gleichen Wortes ist *hier* unwesentlich, weil die Gleichheit keine Übergänge überbrückt. Aber damit beschreibt man nur den Charakter des Spiels, welches man spielen will.

Ts-222 147[1] 27 "Was bedeutet das Wort 'a' im Satz F(a)'"? "Was bedeutet das Wort a im Satze Fa den Du soeben ausgesprochen hast?" "Was bedeutet das Wort .... in diesem Satz?"

I App II

Ts-224 214bottom[1]

1 Das Überraschende kann in der Mathematik zweierlei völlig verschiedene Rollen spielen. Man kann den Wert einer mathematischen Gedankenreihe darin erblicken, daß sie etwas uns Überraschendes zutage fördert: – weil es von großem Interesse, von großer Wichtigkeit ist, zu sehen, wie ein *Sachverhalt* durch die und die Art seiner Darstellung überraschend, oder erstaunlich, oder auch paradox wird.

Ts-224 215[1]

Hievon aber verschieden ist, eine, heute herrschende Auffassung, der das Überraschende, das Erstaunliche, darum als Wert gilt, weil es zeige, in welche Tiefe die mathematische Untersuchung dringt; – wie wir den Wert eines Teleskops daran ermessen könnten, daß es uns Dinge zeigt, die wir ohne dieses Instrument nicht hätten *ahnen* können. Der Mathematiker sagt gleichsam: "Siehst Du, das ist doch wichtig, das hättest Du ohne mich nicht gewußt." So als wären durch diese Überlegungen, als durch eine Art höheren Experiments, erstaunliche, ja die erstaunlichsten Tatsachen ans Licht gefördert worden.

Ts-224 215[1].2

2 Der Mathematiker aber ist kein Entdecker, sondern ein Erfinder.

Ts-224 204[1] & 205[1] & 206[1] "Das ist ein überraschendes Resultat!" – Wenn es Dich überrascht, dann hast Du es noch nicht verstanden. Denn die Überraschung ist hier nicht legitim, wie beim Ausgang eines Experiments. *Da* – möchte ich sagen – darfst Du Dich ihrem Reiz hingeben; aber nicht, wenn sie Dir am Ende einer Schlußkette zuteil wird. Denn da ist sie nur ein Zeichen dafür, daß noch Unklarheit, oder ein Mißverständnis herrscht. "Aber warum soll ich nicht überrascht sein, daß ich *dahin* geleitet worden bin?" – Denk Dir Du hättest einen langen algebraischen Ausdruck vor Dir; es sieht zuerst aus, als ließe er sich nicht wesentlich kürzen; dann aber siehst Du eine Möglichkeit der Kürzung und nun geht sie weiter, bis der Ausdruck zu einer kompakten Form zusammenschrumpft. Können wir (hier) nicht über dies Resultat überrascht sein? (Beim Patience-Legen geschieht ähnliches.) Gewiß, und es ist eine angenehme Überraschung; und sie ist von psychologischem Interesse, denn sie zeigt ein Phänomen des Nicht-Überblickens und der Änderung des Aspekts eines gesehenen Komplexes. Es ist interessant, daß man es diesem Komplex nicht immer ansieht, daß er sich so kürzen läßt; ist aber der Weg der Kürzung übersichtlich vor unsern Augen, so verschwindet die Überraschung. Wenn man sagt, man sei eben überrascht, daß man *dahin* geführt worden sei, so ist dies keine ganz richtige Darstellung des Sachverhalts. Denn diese Überraschung hat man doch nur dann, wenn man den Weg noch nicht kennt. Nicht, wenn man ihn ganz vor sich sieht. Daß dieser Weg, den ich ganz vor mir habe, da anfängt, wo er anfängt, und da aufhört, wo er aufhört, das ist keine Überraschung. Die Überraschung und das Interesse kommen dann sozusagen von außen. Ich meine– man kann sagen: “Diese mathematische Untersuchung hat großes psychologisches Interesse”, oder “großes physikalisches Interesse”.

Ts-224 206[2] 3 Ich staune immer wieder bei dieser Wendung des Themas; obwohl ich es unzählige Male gehört habe und es auswendig weiß. Es ist vielleicht sein *Sinn*, Staunen zu erwecken. Was soll es dann heißen, wenn ich sage: ‘Du *darfst* nicht staunen!’? Denke an mathematische Rätselfragen. Sie werden gestellt, weil sie überraschen; das ist ihr ganzer Sinn. Ich will (also) sagen: Du sollst nicht glauben, es sei hier etwas verborgen, in das man nicht Einsicht nehmen kann– –als seien wir durch einen unterirdischen Gang gegangen und kämen nun irgendwo ans Licht, ohne aber wissen zu können, wie wir dahin gekommen sind, oder welches die Lage des Anfangs zum Ausgang des Tunnels ist. Wie aber konnte man denn überhaupt in dieser Einbildung sein? Was gleicht in der Rechnung einer Bewegung unter der Erde? Was konnte uns denn dieses Bild nahe legen? Ich glaube: daß kein Tageslicht auf diese Schritte fällt; daß wir den Anfangs- und Endpunkt der Rechnung in einem Sinne verstehen, in dem wir den übrigen Gang der Rechnung nicht verstehen.

Ts-224 207[1] 4 “Hier ist kein Geheimnis!” – aber wie konnten wir denn *glauben*, daß eines sei? – Nun, ich bin immer wieder den Weg gegangen und war immer wieder überrascht; und auf den Gedanken, daß man hier etwas *verstehen* kann, bin ich nicht gekommen. – “Hier ist kein Geheimnis”, heißt also: Schau Dich doch um!

Ts-224 207[2] **5** Ist es nicht, als sähe man in einer Rechnung eine Art Kartenaufschlagen? Man hat die Karten gemischt; man weiß nicht, was dabei vor sich ging: aber am Ende lag obenauf der Zehner, und das bedeutet …

Ts-224 207[3] **6** Unterschied zwischen dem Werfen des Loses und dem Auszählen vor einem Spiel. Könnten aber nicht naive Menschen auch im Ernstfalle statt einen Mann auszulosen sich des Auszählens bedienen?

Ts-224 207[4] **7** Was tut der, der uns darauf aufmerksam macht, daß beim Auszählen das Ergebnis abgekartet ist?

Ts-224 207[5] & 208[1]

8 Ich will sagen: "Wir haben keinen Überblick über das, was wir gemacht haben, und deshalb kommt es uns geheimnisvoll vor". Denn nun steht ein Resultat vor uns, und wir wissen nicht mehr, wie wir dazu gekommen sind, aber wir sagen (wir haben gelernt zu sagen): "also muß es so sein"; und wir nehmen es hin – und staunen darüber. Könnten wir uns nicht diesen Fall denken: Jemand hat eine Reihe von Befehlen, von der Form "Du mußt jetzt so & so handeln" einzeln auf Karten geschrieben. Er mischt diese Karten, liest die, welche obenauf zu liegen kommt – und sagt: Also, ich *muß das* tun! – Denn das Lesen eines geschriebenen Befehls macht nun einmal einen bestimmten Eindruck, hat eine bestimmte Wirkung. Und ebenso auch das Anlagen bei einer Schlußfolgerung. – Man könnte aber vielleicht den Bann eines solchen Befehls brechen, indem man diesem Menschen noch einmal klar vor Augen führt, *wie* er zu diesen Worten gelangt ist, und diesen Vorgang mit anderen Vorgängen vergleicht, – indem man z.B. sagt: "Es hat Dir doch niemand den Befehl gegeben!" Und ist es nicht auch *so*, wenn ich sage: "Hier ist kein Geheimnis"? – Er hatte ja, in gewissem Sinne, nicht geglaubt, daß ein Geheimnis vorliegt. Aber er war unter dem *Eindruck* des Geheimnisses (wie der Andere unter dem *Eindruck* eines Befehles). In *einem* Sinne kannte er ja die Situation, aber er verhielt sich zu ihr (im Gefühl und im Handeln) 'als läge ein andrer Sachverhalt vor' – wie wir sagen würden.

Ts-224 212[1] & 213[1]

9 "Eine Definition führt Dich doch nur wieder einen Schritt zurück, zu etwas anderem nicht Definiertem." Was sagt uns das? Wußte das irgend jemand nicht? – Nein; aber konnte er es nicht aus dem Auge verlieren?

Ts-224 213[2] **10** Oder: "Wenn Du schreibst '1, 4, 9, 16, ...', so hast Du nur vier Zahlen angeschrieben, und vier Pünktchen" – worauf machst Du da aufmerksam? Konnte jemand etwas anderes glauben? Man sagt Einem in so einem Falle auch: "Damit hat Du weiter nichts hingeschrieben als vier Zahlzeichen und ein fünftes Zeichen– die Pünktchen". Ja, wußte er das nicht? Aber kann er nicht doch sagen: Ja wirklich, ich habe die Pünktchen nie als *ein* weiteres Zeichen in dieser Reihe aufgefaßt, – das hier so allerdings so aussieht, wie weitere flüchtig geschriebene Ziffern, aber auch anders geschrieben werden könnte, daß es den Charakter eines Buchstabens oder Zahlzeichens hätte.

Ts-224 213[3] **11** Oder wie ist es, wenn man darauf aufmerksam macht, daß eine Linie im Sinne Euklids eine Farbengrenze ist und nicht ein Strich; und ein Punkt der Schnitt solcher Farbengrenzen und kein Tupfen? (Wie oft ist gesagt worden, daß man sich einen Punkt nicht vorstellen kann.)

Ts-224 213[4] & 214top[1] **12** Man kann in der Einbildung leben, denken– daß es sich so und so verhält, ohne es zu *glauben*; d.h.: wenn man gefragt wird, so weiß man es, hat man aber nicht auf die Frage zu antworten, so weiß man es *nicht*, sondern man handelt und denkt dann nach einer andern Ansicht.

Ts-224 214top[2] **13** Denn eine Ausdrucksform läßt uns so und so handeln. Wenn sie unser Denken beherrscht, so möchten wir trotz aller Einwendungen sagen: "in gewissem Sinne verhält es sich *doch* so." Obwohl er gerade auf den 'gewissen Sinn' ankommt. (Sieh' doch nur die Technik unserer elenden Zeitungen an!)

I App III

Ts-221a 246[1]

1 Man kann sich leicht eine Sprache denken, in der es keine Frage- und keine Befehlsform gibt, sondern in der Frage und Befehl in der Form der Behauptung ausgedrückt wird, in Formen z.B., entsprechend unserem: “Ich möchte wissen, ob .....” und “Ich wünsche, daß .....”. Niemand würde doch von einer Frage (etwa, ob es draußen regnet) sagen, sie sei wahr oder falsch. Es ist freilich deutsch, dies von einem Satz, “ich wünsche zu wissen, ob .....”, zu sagen. Wenn nun aber diese Form immer statt der Frage verwendet wird? –

Ts-221a 246[2]

2 Die große Mehrzahl der Sätze, die wir aussprechen, schreiben und lesen, sind Behauptungssätze. Und – sagst Du – diese Sätze sind wahr oder falsch. Oder, wie ich auch sagen könnte, mit ihnen wird das Spiel der Wahrheitsfunktionen gespielt. Denn die Behauptung ist nicht etwas, was zu dem Satz hinzutritt, sondern ein wesentlicher Zug des Spiels, das wir mit ihm spielen. Etwa vergleichbar dem Charakteristikum des Schachspiels, daß es ein Gewinnen und Verlieren dabei gibt, und daß der gewinnt, der dem Andern den König nimmt. Freilich, es könnte ein dem Schach sehr verwandtes Spiel geben, das darin besteht, daß man die Schachzüge macht, aber ohne daß es dabei ein Gewinnen und Verlieren gibt, oder die Bedingungen des Gewinnens sind andere.

Ts-221a 247[1] 3 Denke, man sagte: Ein Befehl besteht aus einem Vorschlag ('Annahme') und dem Befehlen des Vorgeschlagenen.

Ts-221a 247[2] 4 Könnte man nicht Arithmetik treiben, ohne auf den Gedanken zu kommen, arithmetische *Sätze* auszusprechen, und ohne daß uns die Ähnlichkeit einer Multiplikation mit einem Satz je auffiele? Aber würden wir nicht den Kopf schütteln, wenn Einer uns eine falsch gerechnete Multiplikation zeigte, wie wir es tun, wenn er uns sagt, es regne, wenn es nicht regnet? – Doch; und hier liegt ein Punkt der Anknüpfung. Wir machen aber auch abwehrende Gesten, wenn ein Hund sich nicht benimmt, wie wir es wünschen. Wir sind gewohnt, zu sagen "2 mal 2 ist 4" und das Verbum "ist" macht dies zum Satz und stellt scheinbar eine nahe Verwandtschaft her mit allem, was wir 'Satz' nennen; während es sich nur um eine sehr äußerliche Beziehung handelt.

Ts-221a 248[1] 5 Gibt es wahre Sätze in Russell's System, die nicht in seinem System zu beweisen sind? – Was nennt man denn einen wahren Satz in Russell's System?

Ts-221a 248[2]

6 Was heißt denn, ein Satz '*ist wahr*'? p *ist wahr* = p. (dies ist die Antwort.) Man will also etwa fragen: unter welchen Umständen behauptet man einen Satz? oder: wie wird die Behauptung des Satzes im Sprachspiel gebraucht? Und die "Behauptung des Satzes" ist hier entgegengesetzt dem Aussprechen des Satzes etwa als Sprachübung, – oder als *Teil* eines andern Satzes, u. dergl.. Fragt man also in diesem Sinne: "Unter welchen Umständen behauptet man in Russell's Spiel einen Satz", so ist die Antwort: Am Ende eines seiner Beweise, oder als 'Grundgesetz' (p.p.). Anders werden in diesem System Behauptungssätze in den Russell'schen Symbolen nicht verwendet.

Ts-221a 248[3] & 249[1]

7 "Kann es aber nicht wahre Sätze geben, die in diesem Symbolismus angeschrieben sind, aber in dem System Russell's nicht beweisbar?" – 'Wahre Sätze', das sind also Sätze, die in einem *andern* System wahr sind, d.h. in einem andern Spiel mit Recht behauptet werden können. Gewiß; warum soll es keine solchen Sätze geben; oder vielmehr: warum soll man nicht Sätze – der Physik z.B. – in Russell's Symbolen anschreiben? Die Frage ist ganz analog der: Kann es wahre Sätze in Euklids Sprache geben, die in seinem System nicht beweisbar, aber wahr sind? – Aber es gibt ja sogar Sätze, die in Euklid's System beweisbar, aber in einem andern System *falsch* sind. Können nicht Dreiecke – in einem andern System – ähnlich (*sehr* ähnlich) sein, die nicht gleiche Winkel haben? – "Aber das ist doch ein Witz! sie sind ja dann nicht im selben Sinne einander 'ähnlich'!" – Freilich; und ein Satz, der nicht in Russell's System zu beweisen ist, ist im andern Sinne "wahr" oder "falsch", als ein Satz der 'Principia Mathematica'.

Ts-221a 249[2] & 250[1]

8 Ich stelle mir vor, es fragte mich Einer um Rat; er sagt: "Ich habe einen Satz (ich will ihn mit "P" bezeichnen) in Russell's Symbolen konstruiert, und den kann man durch gewisse Definitionen und Transformationen so deuten, daß er sagt: 'P ist nicht in Russell's System beweisbar'. Muß ich nun von diesem Satz nicht sagen: einerseits er sei wahr, anderseits er sei unbeweisbar? Denn angenommen, er wäre falsch, so ist es also wahr, daß er beweisbar ist! Und das kann doch nicht sein. Und ist er bewiesen, so ist bewiesen, daß er nicht beweisbar ist! So kann er also nur wahr, aber unbeweisbar sein." So wie wir fragen: "in welchem System 'beweisbar'?", so müssen wir auch fragen: "in welchem System 'wahr'?". 'In Russell's System wahr' heißt, wie gesagt: in Russell's System bewiesen; und 'in Russell's System falsch' heißt: das Gegenteil sei in Russell's System bewiesen. – Was heißt nun Dein: "angenommen, er sei falsch"? *In Russell's Sinne* heißt es: "angenommen das Gegenteil sei in Russell's System bewiesen"; *ist das Deine Annahme*, so wirst Du jetzt die Deutung, er sei unbeweisbar, wohl aufgeben. Und unter dieser Deutung verstehe ich die Übersetzung in diesem deutschen Satz. – Nimmst Du an, der Satz sei in Russell's System beweisbar, so ist er damit *in Russell's Sinne* wahr und die Deutung "P ist nicht beweisbar" ist wieder aufzugeben. Nimmst Du an, der Satz sei in Russell's Sinne wahr, so folgt das *Gleiche*. Ferner: soll der Satz in einem andern als Russell's Sinne falsch sein: so widerspricht dem nicht, daß er in Russell's System bewiesen ist. (Was im Schach "verlieren" heißt, kann doch in einem andern Spiel das Gewinnen ausmachen.)

Ts-221a 250[2]

9 Was heißt es denn: "P" und "P ist unbeweisbar" seien der gleiche Satz? Es heißt, daß diese *zwei* deutschen Sätze in der und der Notation *einen* Ausdruck haben.

Ts-221a 250[3] & 251[1]

10 "Aber P kann doch nicht beweisbar sein, denn, angenommen es wäre bewiesen, so wäre der Satz bewiesen, er sei nicht beweisbar." Aber wenn dies nun bewiesen wäre, oder wenn ich glaubte – vielleicht durch Irrtum – ich hätte es bewiesen, warum sollte ich den Beweis nicht gelten lassen und sagen, ich müsse meine Deutung "*unbeweisbar*" zurückziehen?

Ts-221a 251[2]

11 Nehmen wir an, ich beweise die Unbeweisbarkeit (in Russell's System) von P; so habe ich mit diesem Beweis P bewiesen. Wenn nun dieser Beweis einer in Russell's System wäre, – dann hätte ich also zu gleicher Zeit seine Zugehörigkeit und Unzugehörigkeit zum Russell'schen System bewiesen. – Das kommt davon, wenn man solche Sätze bildet. – Aber hier ist ja ein Widerspruch! – Nun so ist hier ein Widerspruch. Schadet er hier etwas?

Ts-221a 251[3]

12 Schadet der Widerspruch, der entsteht wenn Einer sagt: "Ich lüge. – Also lüge ich nicht. – Also lüge ich. Etc." Ich meine: ist unsere Sprache dadurch weniger brauchbar, daß man in diesem Fall aus einem Satz nach den gewöhnlichen Regeln sein Gegenteil und daraus wieder ihn folgern kann? – der Satz *selbst* ist unbrauchbar, und ebenso dieses Schlüsseziehen; aber warum soll man es nicht tun? – Es ist eine brotlose Kunst! – Es ist ein Sprachspiel, das Ähnlichkeit mit dem Spiel des Daumenfangens hat.

Ts-221a 252[1]

13 Interesse erhält so ein Widerspruch nur dadurch, daß er Menschen gequält hat und dadurch zeigt, wie aus der Sprache quälende Probleme wachsen können; und was für Dinge uns quälen können.

Ts-223 252[2]

14 Ein Beweis der Unbeweisbarkeit ist quasi ein geometrischer Beweis; ein Beweis, die Geometrie der Beweise betreffend. Ganz analog einem Beweise etwa, daß die und die Konstruktion nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Nun enthält so ein Beweis ein Element der Vorhersage, ein physikalisches Element. Denn als Folge dieses Beweises sagen wir ja einem Menschen: "Bemüh' Dich nicht, eine Konstruktion (der Dreiteilung des Winkels, etwa) zu finden, – man kann beweisen, daß es nicht geht." Das heißt: es ist wesentlich, daß sich der Beweis der Unbeweisbarkeit in dieser Weise soll anwenden lassen. Er muß – könnte man sagen – für uns ein *triftiger Grund* sein, die Suche nach einem Beweis (also einer Konstruktion der und der Art) aufzugeben. Ein Widerspruch ist als eine solche Vorhersage unbrauchbar.

Ts-223 252[3] & 253[1]

15 Ob etwas mit Recht der Satz genannt wird "X ist unbeweisbar", hängt davon ab, wie wir diesen Satz beweisen. Nur der Beweis zeigt, was als das Kriterium der Unbeweisbarkeit gilt. Der Beweis ist ein Teil des Systems von Operationen, des Spiels, worin der Satz gebraucht wird, und zeigt uns seinen 'Sinn'. Es ist also die Frage ob der "Beweis der Unbeweisbarkeit' von p hier ein triftiger Grund ist zur Annahme daß ein Beweis von p nicht gefunden werden wird.

Ts-223 252[3] & 253[1].2

16 Der Satz “p ist unbeweisbar” hat einen andern Sinn, nach dem – als ehe er bewiesen ist. Ist er bewiesen, so ist er die Schlußfigur des Unbeweisbarkeitsbeweises. – Ist er unbewiesen, so ist ja noch nicht *klar*, *was* als Kriterium seiner Wahrheit zu gelten hat, und sein Sinn ist – kann man sagen – noch verschleiert.

Ts-221a 253[2] & 254[1]

17 Wie, soll ich nun annehmen, ist P bewiesen? Durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis? oder auf eine andere Weise? Nimm an, durch einen Unbeweisbarkeitsbeweis. Nun, um zu sehen, *was* bewiesen ist, schau auf den Beweis! Vielleicht ist hier bewiesen, daß die und die Form des Beweises nicht zu P führt. – Oder, es sei P auf eine direkte Art bewiesen – wie ich einmal sagen will –, dann folgt also der Satz "P ist unbeweisbar", und es muß sich nun zeigen, wie diese Deutung der Symbole von P mit der Tatsache des Beweises kollidiert und warum sie hier aufzugeben sei. Angenommen aber, ~ P sei bewiesen. – *Wie* bewiesen? Etwa dadurch, daß P direkt bewiesen ist – denn daraus folgt, daß es beweisbar ist, also ~ P. Was soll ich nun aussagen: "P", oder "~ P"? Warum nicht beides? Wenn mich jemand fragt: "Was ist der Fall – P, oder nicht-P?", so antworte ich: "⊢ P" steht am Ende eines Russell'schen Beweises, Du schreibst also im Russell'schen System: " ⊢ P"; anderseits ist es aber eben beweisbar und dies drückt man durch " ⊢ ~ P" aus, dieser Satz aber steht nicht am Ende eines Russell'schen Beweises, gehört also nicht zum Russell'schen System. – Als die Deutung "P ist unbeweisbar" für P gegeben wurde, da kannte man ja diesen Beweis für P nicht und man kann also nicht sagen "P" sage: *dieser* Beweis existierte nicht. – Ist der Beweis hergestellt, so ist damit eine *neue Lage* geschaffen: Und wir haben nun zu entscheiden, ob wir *dies* einen Beweis (*noch* einen Beweis), oder ob wir *dies* noch die Aussage der Unbeweisbarkeit nennen wollen. Angenommen ~ P sei direkt bewiesen; es ist also bewiesen, daß sich P direkt beweisen läßt! Das ist also wieder eine Frage der Deutung – es sei denn, daß wir nun auch einen direkten Beweis von P haben. Wäre es nun

so, nun, so wäre es so. – (Die abergläubische Angst und Verehrung der Mathematiker vor dem Widerspruch.)

Ts-221a 254[2] **18** "Aber angenommen, der Satz wäre nun *falsch* – und daher beweisbar! –" Warum nennst Du ihn 'falsch'? Weil Du einen Beweis siehst? – Oder aus andern Gründen? Dann macht es ja nichts. Man kann ja den Satz des Widerspruchs sehr wohl falsch nennen, mit der Begründung z.B., daß wir sehr oft mit gutem Sinn auf eine Frage antworten: "Ja, und nein." Und ebenso den Satz "p ≡ ~~p": weil wir die Verdoppelung der Verneinung als eine *Verstärkung* der Verneinung verwenden und nicht bloß als ihre Aufhebung.

Ts-221a 255[1] **19** Du sagst: "….." also ist P wahr und unbeweisbar." Das heißt wohl: "Also ⊢ P." Von mir aus – aber zu welchem Zweck schreibst Du diese 'Behauptung' hin? (Das ist, als hätte jemand aus gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustil abgeleitet, auf den Mount Everest, wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlößchen im Barockstile.) Und wie könntest Du mir die Wahrheit der Behauptung plausibel machen, da Du sie ja zu nichts weiter brauchen kannst als zu jenen Kunststückchen?

Ts-221a 255[2]

20 Man muß sich hier daran erinnern, daß die Sätze der Logik so konstruiert sind, daß sie als *Information keine* Anwendung in der Praxis haben. Man könnte also sehr wohl sagen, sie seien garnicht *Sätze*; und daß man sie überhaupt hinschreibt, bedarf einer Rechtfertigung. Fügt man diesen ‘Sätzen’ nun ein weiteres satzartiges Gebilde andrer Art hinzu, so sind wir hier schon erst recht im Dunkeln darüber, was dieses System von Zeichenkombinationen nun für eine Anwendung, für einen Sinn haben soll, denn der bloße *Satzklang* dieser Zeichenverbindungen gibt ihnen ja eine Bedeutung noch nicht.

II

Ms-117 97[3] & 98[1]

1 —

Ansätze

In wiefern beweist die Diagonalmethode, daß es eine Zahl gibt die – sagen wir – keine Quadratwurzel ist? –

Es ist natürlich äußerst leicht zu zeigen 'daß es Zahlen gibt die keine Quadratwurzeln sind' – aber wie zeigt es *diese* Methode?

[*Ansätze*]

Haben wir denn einen allgemeinen Begriff davon, was es heißt: zeigen daß es eine Zahl gibt die keine dieser unendlichen Menge ist? Denken wir, jemand hätte diese Aufgabe erhalten eine Zahl zu nennen die von allen $\sqrt[2]{n}$ verschieden ist; er hätte aber vom Diagonalverfahren nichts gewußt & hätte die Zahl $\sqrt[3]{2}$ als Lösung genannt; & gezeigt daß sie keine $\sqrt[2]{n}$ ist. – Oder er hätte gesagt: nimm die $\sqrt{2} = 1\dot{}4142$ ... & subtrahiere 1 von der ersten Dezimale, im übrigen aber sollen die Stellen mit $\sqrt{2}$ übereinstimmen $1\dot{}3142$ ... kann keine $\sqrt{n}$ sein.

Ms-117 98[2] 2 “Nenne mir eine Zahl die mit $\sqrt{2}$ an jeder zweiten Dezimalstelle übereinstimmt!” Was fordert diese Aufgabe? – Die Frage ist: ist sie befriedigt durch die Antwort: Es ist die Zahl die man nach der Regel erhält: entwickle $\sqrt{2}$ & addiere 1 oder − 1 zu jeder zweiten Dezimalstelle? Es ist ebenso wie die Aufgabe: Teile einen Winkel in 3 Teile dadurch als gelöst betrachtet werden kann, daß man 3 gleiche Winkel an einander legt.

Ms-117 99[1] 3 [*Ansätze*]

Wenn einem auf die Aufforderung: “Zeige mir eine Zahl die von allen diesen verschieden ist”, die Diagonalregel zur Antwort gegeben wird, warum soll er nicht sagen: “Aber so hab ich’s ja nicht gemeint!”? Was Du mir gegeben hast ist eine Regel Zahlen sukzessive herzustellen, die von jeder von diesen nach der Reihe verschieden sind. “Aber warum willst Du das nicht auch eine Methode nennen, eine Zahl zu kalkulieren?” – Aber was ist hier die Methode des Kalkulierens & was das Kalkulierte? Du wirst sagen sie seien *eins*, denn man kann nun z.B. sagen: die Zahl D ist größer als … & kleiner als …; man kann sie quadrieren etc. etc.. Ist die Frage nicht eigentlich: Wozu kann man diese Zahl *brauchen*. Ja, das klingt sonderbar. – Aber es heißt eben in welcher mathematischen Umgebung steht sie.

Ms-117 99[3] & 100[1] 4 [*Ansätze*]

Ich vergleiche also Methoden des Kalkulierens. – Aber da gibt es ja sehr verschiedene Methoden des Vergleichens. Ich soll aber in irgend einem Sinne die *Resultate* der Methoden mit einander vergleichen. Aber da wird schon alles unklar, denn in *einem* Sinne haben sie nicht jede *ein* Resultat, oder es ist nicht von vornherein klar was hier in jedem Falle als *das* Resultat zu betrachten ist. Ich will sagen es ist hier jede Gelegenheit gegeben die Bedeutungen zu drehen & zu wenden. –

Ms-117 100[2]

5 Sagen wir einmal – nicht: “Die Methode gibt ein Resultat”, sondern: “sie gibt eine unendliche Reihe von Resultaten”. Wie vergleiche ich unendliche Reihen von Resultaten? Ja, da gibt es sehr Verschiedenes, was ich so nennen kann.

Ms-117 100[3]

6 Es heißt hier immer: Blicke *weiter* um Dich!

Ms-117 100[4] & 101[1]

7 [*Ansätze*]

Das Resultat einer Kalkulation in der Wortsprache ausgedrückt ist mit Mißtrauen zu betrachten. Die *Rechnung* beleuchtet die Bedeutung des Wortausdrucks. Sie ist das *feinere* Instrument zur Bestimmung der Bedeutung. Willst Du wissen was der Wortausdruck bedeutet, so schau auf die Rechnung; nicht umgekehrt. Der Wortausdruck wirft nur einen matten allgemeinen Schein auf die Rechnung; die Rechnung aber ein grelles Licht auf den Wortausdruck. (Als wolltest Du die Höhen zweier Berge nicht durch Höhenmessung vergleichen sondern durch ihr scheinbares Verhältnis wenn man sie von unten anschaut.)

Ms-117 101[2]

8 'Ich will Dich eine Methode lehren wie Du in einer Entwicklung allen diesen Entwicklungen nach der Reihe *ausweichen* kannst.' So eine Methode ist das Diagonalverfahren. – "Also erzeugt sie eine Reihe, die von allen diesen verschieden ist." Ist das richtig? – Ja; wenn Du nämlich diese Worte auf diesen, oben beschriebenen Fall anwenden willst.

Ms-117 101[3] & 102[1]

9 [*Ansätze*]

Wie wäre es mit dieser Konstruktionsmethode: Die Diagonalzahl wird durch Addition oder Subtraktion von 1 erzeugt, aber ob zu addieren oder zu subtrahieren ist erfährt man erst, wenn man die ursprüngliche Reihe um mehrere Stellen fortgesetzt hat. Wie wenn man nun sagte: die Entwicklung der Diagonalreihe holt die Entwicklung der andern Reihen nie ein; – gewiß die Diagonalreihe weicht jeder der Reihen aus wenn sie sie trifft, aber das nützt ihr nichts da die Entwicklung der andern Reihen ihr wieder voraus ist. Ich kann hier doch sagen: es gibt *immer* eine der Reihen für die nicht bestimmt ist ob sie von der Diagonalreihe verschieden ist oder nicht. Man kann sagen: sie laufen einander ins Unendliche nach aber immer die ursprüngliche Reihe voran. "Aber Deine Regel reicht doch schon in's Unendliche, also weißt Du doch schon genau daß die Diagonal-Reihe von jeder andern verschieden sein wird!"– – –

Ms-117 102[2] & 103[1]

10 [*Ansätze*]

Es heißt nichts zu sagen: "*Also* sind die X-Zahlen nicht abzählbar". Man könnte etwa sagen: Den Zahlbegriff X nenne ich unabzählbar, wenn festgesetzt ist, daß, welche der unter ihn fallenden Zahlen immer Du in eine Reihe bringst die Diagonalzahl dieser Reihe auch unter ihn fällt.

Ms-117 103[2] & 103[3] & 104[1]

11 [*Ansätze*]

Da meine Zeichnung ja doch nur die *Andeutung* der Unendlichkeit ist, warum muß ich so zeichnen:

& nicht so:

Hier haben wir eben verschiedene Bilder; & ihnen entsprechen verschiedene Redeweisen. Aber kommt denn dabei etwas Nützliches heraus, wenn wir über *ihre* Berechtigung streiten? Das Wichtige muß doch woanders liegen; wenn auch diese Bilder unsre *Phantasie* am stärksten erhitzen.

Ms-117 104[2]

12 Wozu läßt sich der Begriff 'unabzählbar' verwenden?

Ms-117 104[3]

13 Man könnte doch sagen– wenn Einer tagaus tagein versuchte 'alle Irrationalzahlen in eine Reihe zu bringen': "Laß das! es heißt nichts; siehst Du nicht: wenn Du eine Reihe aufgestellt hättest, so käme ich Dir mit der Diagonalreihe!" Das könnte ihn von seiner Beschäftigung abbringen. Nun, das wäre ein Nutzen. Und mir kommt vor das wäre auch der ganze & eigentliche Zweck dieser Methode. Sie bedient sich des vagen Begriffes dieses Menschen, der gleichsam idiotisch drauflos arbeitet & bringt ihn durch ein Bild zur Ruhe. (Man könnte ihn aber durch ein andres Bild auch wieder zur Weiterführung seines Unternehmens bringen.)

Ms-117 105[1] 14 Die Methode führt etwas vor, – was man auf sehr vage Weise die Demonstration davon nennen kann, daß sich *diese* Rechnungsmethoden nicht in eine Reihe ordnen lassen. Und die Bedeutung des "*diese*" ist hier eben vag gehalten.

Ms-117 105[2] 15 Ein gescheiter Mann hat sich in diesem Sprachnetz gefangen: Also muß es ein interessantes Sprachnetz sein.

Ms-117 105[3] & 106[1] & 107[1]

16 Der Fehler beginnt damit daß man sagt die Kardinalzahlen ließen sich in eine Reihe ordnen. Welchen Begriff hat man denn von diesem Ordnen? Ja man hat natürlich einen von einer endlichen Reihe, aber das gibt uns ja hier höchstens eine vage Idee einen Leitstern für die Bildung eines Begriffs.) Der Begriff selbst ist ja von dieser & einigen andern Reihen *abstrahiert*; oder: der Ausdruck bezeichnet eine gewisse Analogie von Fällen & man kann ihn etwa dazu benützen um ein Gebiet, von dem man reden will vorläufig abzugrenzen. Damit ist aber nicht gesagt, daß die Frage einen klaren Sinn hat: "Ist die Menge R. in eine Reihe zu ordnen?" Denn diese Frage bedeutet nun etwa: Kann man mit diesen Gebilden etwas tun was dem Ordnen der Kardinalzahlen in eine Reihe entspricht. Wenn man also fragt: "Kann man die Reellen Zahlen in eine Reihe ordnen?" So könnte die gewissenhafte Antwort sein: "Ich kann mir vorläufig gar nichts Genaues darunter vorstellen". – "Aber Du kannst doch z.B. die Wurzeln & die algebraischen Zahlen in eine Reihe ordnen; also verstehst Du doch den Ausdruck!" – Richtiger gesagt ich *habe* hier gewisse analoge Gebilde, die ich mit dem gemeinsamen Namen "Reihen" benenne. Aber ich habe noch keine sichere Brücke von diesen Fällen zu dem 'aller reellen Zahlen'. Ich habe auch keine allgemeine Methode um zu versuchen ob sich die oder die Menge 'in eine Reihe ordnen läßt'. Nun zeigt man mir das Diagonalverfahren & sagt: "hier hast Du nun den Beweis, daß dieses Ordnen hier nicht geht". Aber ich kann antworten: "Ich weiß – wie gesagt – nicht, was es ist, was hier *nicht geht*." Wohl aber sehe ich: Du willst einen Unterschied zeigen in der Verwendung von "Wurzel", "algebraische Zahl", etc. einerseits

& “reelle Zahl” anderseits. Und zwar etwa so: Die Wurzeln nennen wir “reelle Zahlen” & die Diagonalzahl, die aus den Wurzeln gebildet ist *auch*. Und ähnlich mit allen Reihen reeller Zahlen. Daher hat es keinen Sinn von einer “Reihe *aller* reellen Zahlen” zu reden, weil man ja auch die Diagonalzahl der Reihe eine “reelle Zahl” nennt. – Wäre das nicht etwas ähnlich, wie wenn man gewöhnlich jede Reihe von Büchern selbst ein Buch nennte & nun sagte: “Es hat keinen Sinn von ‘der Reihe aller Bücher’ zu reden, da jede Reihe selbst ein Buch ist.”

Ms-117 107[2] & 108[1]

17 Es ist hier sehr nützlich sich vorzustellen, daß das Diagonalverfahren zur Erzeugung einer reellen Zahl längst vor der Erfindung der Mengenlehre bekannt & auch den Schulkindern geläufig gewesen wäre, wie es ja sehr wohl hätte sein können. So wird nämlich der Aspekt der Entdeckung Cantors geändert. Diese Entdeckung hätte sehr wohl *bloß* in der Interpretation dieser altbekannten, elementaren Rechnung liegen können.

Ms-117 108[2]

18 Die Rechnung selbst ist ja nützlich. Die Aufgabe wäre etwa: Schreibe eine Dezimalzahl an die verschieden ist von den Zahlen:

$0 \cdot 1246798$ $0 \cdot 3469876$ $0 \cdot 0127649$ $0 \cdot 3426794 \cdots$
$\cdots\cdot$

Man denke sich eine lange Reihe.

Das Kind denkt sich: Wie soll ich das machen ich müßte ja auf alle die Zahlen zugleich schauen um zu vermeiden daß ich nicht doch eine von ihnen anschreibe. Die Methode sagt nun:

durchaus nicht; ändere die erste Stelle der ersten Zahl, die zweite der zweiten, etc. etc. & Du bist sicher eine Zahl hingeschrieben zu haben, die mit keiner der gegebenen übereinstimmt. Die Zahl die man so erhält könnte immer die Diagonalzahl genannt werden.

Ms-117 108[3] & 109[1]

19 Das Gefährliche, Täuschende, der Fassung "Man kann die reellen Zahlen nicht in eine Reihe ordnen" oder gar "Die Menge ... ist nicht abzählbar" liegt darin, daß sie das was eine Begriffsbestimmung Begriffsbildung ist als eine Naturtatsache erscheinen lassen.

Ms-117 109[2]

20 Bescheiden heißt der Satz: "Wenn man etwas eine Reihe reeller Zahlen nennt, so heißt die Entwicklung des Diagonalverfahrens auch eine 'reelle Zahl' & zwar eine die 'von allen Gliedern der Reihe verschieden' sei.

Ms-117 109[3]

21 Unser Verdacht sollte immer rege sein, wenn ein Beweis mehr beweist, als seine Mittel ihm erlauben. Man könnte so etwas einen 'prahlerischen Beweis' nennen.

Ms-117 109[4] & 110[1]

22 Der gebräuchliche Ausdruck fingiert einen Vorgang eine Methode des Ordnens die hier zwar anwendbar ist aber nicht zum Ziele führt wegen der Zahl der Gegenstände die größer ist als selbst die der Kardinalzahlen. Wenn gesagt würde: "Die Überlegung über das Diagonalverfahren zeigt Euch, daß der *Begriff* 'reelle Zahl' viel weniger Analogie mit dem Begriff Kardinalzahl hat, als man, durch gewisse Analogien verführt, zu glauben geneigt ist" so hätte das einen guten & ehrlichen Sinn. Es geschieht aber gerade das *Gegenteil*: indem die 'Menge' der reellen Zahlen angeblich der Größe nach mit der der Kardinalzahlen verglichen wird. Die Artverschiedenheit der beiden Konzeptionen wird durch eine schiefe Ausdrucksweise als Verschiedenheit der Ausdehnung dargestellt. Ich glaube & hoffe eine künftige Generation wird über diesen Hokus Pokus lachen.

Ms-121 27r[4] & 27v[1]

23 30.05.1938

Die Krankheit einer Zeit heilt sich durch eine Veränderung in der Lebensweise der Menschen & die Krankheit der philosophischen Probleme konnte nur durch eine veränderte Denkweise & Lebensweise geheilt werden nicht durch eine Medizin die ein Einzelner erfand. Denke, daß der Gebrauch des Wagens gewisse Krankheiten hervorruft oder begünstigt & die Menschheit von dieser Krankheit geplagt wird, bis sie sich, aus irgendwelchen Ursachen, als Resultat irgendeiner Entwickelung, das Fahren wieder abgewöhnt.

Ms-121 28v[2]

24 31.05.1938

Wie macht man denn von dem Satz Verwendung: “Es gibt keine größte Kardinalzahl”? Wann, & bei welcher Gelegenheit, würde man ihn sagen? Diese Verwendung ist jedenfalls eine ganz andere, als die des mathematischen Satzes “25 × 25 = 625”.

Ms-121 28v[3] & 29r[1]

25 Vor allem ist zu bemerken, daß wir dies überhaupt fragen, was darauf deutet, daß die Antwort nicht (ganz) auf der Hand liegt. Und ferners, wenn man die Frage rasch beantworten will gleitet man leicht aus. Es ist hier ähnlich wie mit der Frage, welche Erfahrung uns zeigt, daß unser Raum dreidimensional ist.

Ms-121 29r[2]

26 Von einer *Erlaubnis* sagen wir, sie habe kein Ende.

Ms-121 29r[3]

27 Und man kann sagen, die Erlaubnis Sprachspiele mit Kardinalzahlen zu spielen habe kein Ende. Dies würde man etwa Einem sagen, dem wir unsere Sprache & Sprachspiele lehrten. Es wäre also wieder ein grammatischer Satz, aber von *ganz* anderer Art als “25 × 25 = 625”. Er wäre aber von großer Bedeutung, wenn der Schüler etwa geneigt wäre (vielleicht weil er einer ganz andern Kultur erzogen worden wäre) ein definitives Ende dieser Reihe von Sprachspielen zu erwarten.

Ms-121 35v[3]

28 10.06.1938

Warum sollen wir sagen: die Irrationalzahlen können nicht geordnet werden? – Wir haben eine Methode, jede Ordnung zu zerstören.

Ms-121 36r[2] & 36v[1]

29 Das Cantorsche Diagonalverfahren zeigt uns nicht eine Irrationalzahl die vor allen im System verschieden ist, aber es gibt dem mathematischen Satz Sinn die Zahl so & so sei von allen des Systems verschieden. Cantor könnte sagen: Du kannst *dadurch* beweisen, daß eine Zahl von allen des Systems verschieden ist, daß Du beweist, daß sie in der ersten Stelle von der ersten Zahl, in der zweiten Stelle von der zweiten Zahl u.s.f. verschieden ist. Cantor sagt etwas über die Multiplizität des Begriffs "Reelle Zahl, verschieden von allen eines Systems."

Ms-121 36v[2]

30 12.06.1938

Cantor zeigt, wenn wir ein System von Extensionen haben, daß es dann Sinn hat, von einer Extension zu reden, die von ihnen allen verschieden ist. – Aber damit ist die Grammatik des Wortes "Extension" noch nicht bestimmt.

Ms-121 36v[3] & 37r[1]

31 Cantor gibt dem Ausdruck "Extension die von allen Extensionen eines Systems verschieden ist" einen Sinn indem er sagt, eine Extension solle so genannt werden, wenn von ihr bewiesen werden kann, daß sie von den Extensionen eines Systems diagonal verschieden ist.

Ms-121 37r[2]

32 Es gibt also eine *Aufgabe*: Finde eine Zahl deren Entwicklung von denen dieses Systems diagonal verschieden ist.

Ms-121 38v[1]

33 13.06.1938

Man könnte sagen: Außer den rationalen Punkten befinden sich auf der Zahlenlinie *diverse Systeme* irrationaler Punkte. Es gibt kein System der Irrationalzahlen – aber auch kein Über-

System, keine ‘Menge der irrationalen Zahlen’ von einer Unendlichkeit höherer Ordnung.

Ms-121 38v[2] & 39r[1]

34 Cantor definiert eine *Verschiedenheit höherer Ordnung* nämlich eine ‘Verschiedenheit’ einer Entwicklung von einem *System* von Entwicklungen. Man kann diese Erklärung so benützen, daß man zeigt daß eine Zahl in diesem Sinne von einem System von Zahlen verschieden ist: sagen wir π von dem System der algebraischen Zahlen. Aber wir können nicht gut sagen, die Regel, die Stellen in der Diagonale so & so zu verändern, sei dadurch als von den Regeln des Systems verschieden bewiesen, weil diese Regel selbst ‘höherer Ordnung’ ist denn sie *handelt* von der Veränderung eines Systems von Regeln & daher aber ist es von vornherein nicht klar, in welchem Fall wir die Entwickelung *so einer* Regel von allen Entwicklungen des Systems verschieden erklären wollen.

Ms-121 41v[2] & 42r[1]

35 12.07.1938

‘*Diese Überlegungen können uns dahin führen, zu sagen*, daß $2\aleph_0>\aleph_0$’. D.h.: wir können die Überlegungen uns dahin führen *lassen*. Oder: Wir können *dies* sagen, & *dies* als Grund dafür angeben. Aber wenn wir es nun sagen – was ist weiter damit anzufangen? In welcher Praxis ist dieser Satz *verankert*?

Er ist vorläufig ein Stück mathematischen Gerüsts, das in der Luft hängt, so aussieht als wäre es, sagen wir, ein Architrav, aber von nichts getragen wird & nichts trägt.

Ms-121 42r[2]

36 Gewisse Überlegungen können uns dahin führen, zu sagen daß 10^{10} Seelen in einem cm^3 Platz haben. Warum sagen wir es aber trotzdem nicht? Weil es zu nichts nütze ist. Weil es zwar ein Bild heraufruft, aber eins, womit wir weiter nichts machen können.

Ms-121 42r[3]

37 Der Satz gilt soviel, als seine Gründe gelten. Er trägt soviel, wie seine Gründe tragen, die ihn stützen.

Ms-121 43r[1] & 43v[1] & 44r[1] & 44v[1]

38 Eine interessante Frage ist: Welchen Zusammenhang hat $\aleph_0$ mit den Kardinalzahlen, deren Zahl es sein soll? $\aleph_0$ wäre offenbar das _Prädikat "endlose Reihe_", in seiner Anwendung auf die Reihe der Kardinalzahlen & ähnliche mathematische Bildungen. Es ist hier wichtig, das Verhältnis zwischen einer Reihe im nicht-mathematischen Sinn & einer im mathematischen Sinn zu erfassen. Es ist natürlich klar, daß wir in der Mathematik das Wort "Zahlenreihe" *nicht* im Sinne von "Reihe von Zahlzeichen" gebrauchen, wenn, natürlich, auch ein Zusammenhang zwischen dem Gebrauch des einen Ausdrucks & des andern besteht. Eine Eisenbahn ist nicht ein Eisenbahnzug; sie ist auch nicht etwas einem Eisenbahnzug ähnliches. Reihe im mathematischen Sinn ist eine Konstruktionsart für Reihen sprachlicher Ausdrücke. Wir haben also eine grammatische Klasse "endlose Folge" & äquivalent mit diesem Ausdruck ein Wort, dessen Grammatik (eine gewisse) Ähnlichkeit mit der eines Zahlworts hat: "endlos", oder "א0". Dies hängt damit zusammen, daß wir unter den Kalkülen der Mathematik eine Technik haben, die wir 'mit einem gewissen Recht 1-1 Zuordnung der Glieder zweier endloser Folgen' nennen können, weil sie mit einem solchen gegenseitigen Zuordnen der Glieder sogenannter 'endlicher' Klassen Ähnlichkeit hat. Daraus nun, daß wir (eine) Verwendung für eine *Art von* Zahlwort haben, welches, gleichsam, die Anzahl der Glieder einer endlosen Reihe bezeichnet, folgt nicht daß es auch irgendeinen Sinn hat von der Zahl des Begriffes "endlose Folge" zu reden, daß wir *hier* irgendwelche Verwendung für etwas Zahlwortähnliches haben. Es gibt eben keine grammatische Technik, die die Verwendung

so eines Wortes nahelegte. Denn ich kann freilich den Ausdruck bilden: “Klasse aller Klassen, die (mit) der Klasse ‘endlose Folge’ zahlengleich sind” (wie auch den: “Klasse aller Engel die auf einer Nadelspitze Platz haben”) aber dieser Ausdruck ist leer, solang es keine Verwendung für ihn gibt. Eine solche ist nicht: noch zu entdecken, sondern: erst zu *erfinden*

Ms-121 44v[2]

39 Denke, ich legte ein dem Schachbrett ähnliches Spielbrett vor Dich, setzte Schachfiguren ähnliche Figuren darauf, – erklärte: “Das ist der ‘*König*’, das sind die ‘*Ritter*’, das die ’*Bürger*. – Mehr wissen wir von dem Spiel noch nicht; aber das ist immerhin etwas. – Und mehr wird vielleicht noch entdeckt werden.”

Ms-121 60r[2] & 60v[1]

40 25.12.1938

“Man kann die Brüche nicht ihrer Größe nach ordnen. – Dies klingt vor allem sehr interessant & merkwürdig. Es klingt interessant in ganz anderem Sinne, als, etwa, ein Satz aus der Differentialrechnung. Der Unterschied liegt, glaube ich, darin, daß ein solcher sich leicht mit einer Anwendung auf Physikalisches assoziiert, während *jener* Satz ganz & gar der Mathematik anzugehören gleichsam die Physik der mathematischen Gegenstände selbst zu betreffen scheint. Man möchte von ihm etwa sagen: er führe uns in die Geheimnisse der mathematischen Welt ein. Es ist *dieser* Aspekt vor dem ich warnen will.

Ms-121 60v[2]

41 Wenn es den Anschein hat ... (Littlewood), dann ist Vorsicht geboten.

Ms-121 61v[1] & 62r[1] & 62v[1] & 63r[1]

42 Wenn ich mir bei dem Satz, die Brüche können nicht ihrer Größe nach in eine Reihe geordnet werden, das Bild einer unendlichen Reihe von Dingen mache, & zwischen je zwei Nachbarbäumen neue Bäume in die Höhe schießen & nun wieder zwischen jedem Baum & seinem Nachbar neue Bäume & so fort ohne Ende, so haben wir hier (sicher) etwas, wovor einem schwindlig werden kann. Sehen wir aber, daß dieses Bild zwar sensationell, aber ganz unzutreffend ist, daß wir uns nicht von den Worten "Reihe", "ordnen", "existieren" & andern fangen lassen dürfen, so werden wir auf eine Darstellung des Sachverhalts zurückgehen, in der alles wieder trivial & gewöhnlich aussieht. so werden wir (wieder) auf die (Darstellung der) Technik des Bruchrechnens zurückgreifen an der nun nichts *Seltsames* mehr ist.

Ms-121 63r[2]

43 Daß wir eine Technik erfinden, in der der Ausdruck "der nächst größere Bruch" keinen Sinn hat, daß wir ihm keinen Sinn gegeben haben, ist nichts Erstaunliches.

Ms-121 63r[3]

44 Wenn wir eine Technik des fortgesetzten Interpolierens von Brüchen anwenden, so werden wir keinen Bruch den "nächst größeren" nennen wollen.

Ms-121 63r[4] & 63v[1]

45 Von einer Technik zu sagen, sie sei unbegrenzt, heißt *nicht*, sie laufe ohne aufzuhören weiter, *wachse* ins Ungemessene; sondern, es fehle ihr die Institution des Endes, sie sei nicht abgeschlossen. Wie man von einem Satz sagen könnte, es mangle ihm der Abschluß, wenn der Schlußpunkt fehlt oder von einem Spielfeld es sei nicht begrenzt , wenn ihm die Regeln des Spiels keine gezogene Grenze vorschreiben.

Ms-121 63v[2] & 64r[1]

46 Eine neue Rechentechnik soll uns ja eben ein *neues* Bild liefern, eine *neue Ausdrucksweise*; & wir können nichts Absurderes tun, als dieses neue Schema, diese neue Art von Gerüst, vermittels der alten Ausdrücke beschreiben zu wollen.

Ms-121 64r[2]

47 Was ist die Funktion eines solchen Satzes wie: "Es gibt zu einem Bruch nicht einen nächst größeren Bruch, aber zu einer Kardinalzahl eine nächst größere"? Es ist doch gleichsam ein Satz, der zwei Spiele vergleicht, [wie: im Damespiel gibt es ein Überspringen eines Steines, aber nicht im Schachspiel.]

Ms-121 64r[3]

48 Wir nennen etwas "die nächst größere Kardinalzahl konstruieren" aber nichts "den nächst größeren Bruch konstruieren".

Ms-121 64v[2]

49 Wie vergleicht man Spiele? Indem man sie beschreibt – indem man das eine als Variation des andern beschreibt – indem man sie beschreibt & die Unterschiede & Analogien *hervorhebt*.

Ms-121 64v[3] & 65r[1] & 65v[1]

50 “Im Damespiel gibt es keinen König” – was sagt das? (Es klingt kindisch.) Heißt es nur, daß man keinen Damestein “König” nennt; & wenn man nun einen so nennte, gäbe es im Damespiel einen König? Wie ist es aber mit *dem* Satz: “Im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt, aber nicht im Schach”? – Wem teile ich dies mit? Dem, der die beiden Spiele (schon) kennt, oder einem der sie noch nicht kennt. Da scheint es, daß der erste unserer Mitteilung nicht bedarf & der zweite nichts von ihr hat.. Aber wie wenn ich sagte: “Schau! im Damespiel sind alle Steine gleichberechtigt ...” oder noch besser: “Schau! in diesen Spielen sind alle Steine gleichberechtigt, in jenen nicht”. Aber was tut so ein Satz? Er führt einen neuen *Begriff* ein, einen neuen Einteilungsgrund (Einteilungsprinzip). Ich lehre Dich, die Aufgabe beantworten: nenne mir Spiele der ersten Art! etc. Ähnlich aber könnte man Aufgaben stellen: “Erfinde ein Spiel, in dem es einen König gibt”.

Ms-121 67r[3] & 67v[1]

51 ‘Wir können die Brüche nicht ihrer Größe nach in eine Reihe, aber wir *können* sie in eine unendliche Reihe ordnen.’ Was hat der gelernt, der das nicht wußte? Er hat eine neue Art der Rechnung gelernt z.B.: “bestimme die Nummer des Bruches ...”.

Ms-121 67v[2]

52 Er lernt diese Technik – aber lernt er nicht auch, daß es so eine Technik gibt? Ich habe allerdings in einem wichtigen Sinne gelernt, daß es so eine Technik gibt; ich habe nämlich eine Technik gelernt, die sich jetzt auf alles mögliche Andre anwenden läßt.

Ms-121 67v[3] & 68r[1]

53 27.12.1938

'Wie würdest Du nun *das* nennen?'

Nicht, "eine Methode die Zahlenpaare fortlaufend zu numerieren"? Und könnte ich nicht auch sagen: "die Zahlenpaare in eine Reihe zu ordnen"?

Ms-121 68r[2]

54 Lehrt mich nun die Mathematik, daß ich die Zahlenpaare in eine Reihe ordnen kann? Kann ich denn sagen: sie lehrt mich, daß ich *das* machen kann? Hat es denn Sinn zu sagen, ich lehre ein Kind, daß man multiplizieren kann – indem ich es lehre zu multiplizieren. Eher könnte man natürlich sagen, ich lehre ihm daß man Brüche multiplizieren kann, nachdem er Kardinalzahlen mit einander zu multiplizieren gelernt hat. Denn nun, könnte man sagen, weiß er schon was "multiplizieren" heißt. Aber wäre nicht auch das irreführend.

Ms-121 68v[1]

55 Wenn Einer sagt, ich habe den Satz bewiesen, daß man Zahlenpaare in eine Reihe ordnen könne; so ist zu antworten, daß dies ja kein mathematischer Satz ist, da man mit den Worten "Man", "kann", "die", "Zahlenpaare" etc. nicht rechnet. Der Satz "man kann die etc." ist vielmehr nur eine beiläufige Beschreibung der Technik die man lehrt, etwa ein nicht unpassender *Titel*, eine Überschrift zu diesem Kapitel. Aber ein Titel mit dem man (vorderhand) nicht *rechnen* kann.

Ms-121 68v[2] & 69r[1]

56 Aber, sagst Du, das ist es eben, was der logische Kalkül Freges & Russells tut: in ihm hat jedes Wort, was in der Mathematik gesprochen wird, exakte Bedeutung ist ein Element des Kalküls. In diesem Kalkül kann man also wirklich beweisen: "man kann multiplizieren". Wohl nun ist er ein mathematischer Satz; aber wer sagt, daß man mit diesem Satz etwas anfangen kann? Wer sagt, *wozu* er nütze ist? Denn, daß er interessant klingt, ist nicht genug! Weil wir im Unterricht vielleicht den Satz gebrauchen: "Du siehst also, man kann die Brüche in eine Reihe ordnen", sagt nicht daß wir für diesen Satz andere Verwendung haben, als die, ein einprägsames Bild mit dieser Rechnungsart zu verknüpfen.

Ms-121 69v[1]

Wenn hier das Interesse an dem Satz haftet der 'bewiesen wurde', so haftet es an einem Bild, das (eine) äußerst schwächliche Berechtigung hat, (uns) aber durch seine Seltsamkeit reizt, wie etwa das Bild von der 'Richtung' des Verlaufs der Zeit. Es bewirkt einen leisen leichten Taumel der Gedanken

Ms-121 69v[2]

57 Ich kann hier nur sagen: Trenne Dich so bald wie möglich von diesem Bild & sieh' das Interesse der Rechnung in ihrer Anwendung. (Es ist als wären wir auf einem Maskenball, auf dem jede Rechnung in seltsamer Verkleidung erscheint.)

Ms-121 87v[3] & 88r[1]

58 "Soll man das Wort 'unendlich' in der Mathematik vermeiden?" Ja; dort, wo es eine Bedeutung in den Kalkül mitzubringen scheint statt sie erst von ihm zu erhalten.

Ms-121 88r[2] & 88v[1]

59 Die Redeweise: “wenn man aber in den Kalkül sieht, ist gar nichts Unendliches da” – natürlich eine ungeschickte Redeweise – aber sie bedeutet: ist es hier wirklich nötig das Bild des Unendlichen (der ungeheuern Größe) hier heraufzubeschwören? & wie ist dieses Bild mit dem *Kalkül* in Verbindung? denn seine Verbindung ist nicht die des Bildes |||| mit 4.

Ms-121 88v[2] & 88v[3] & 88v[4] & 89r[1]

60 So zu tun, als sei man enttäuscht, nichts Unendliches im Kalkül gefunden zu haben ist (freilich) komisch; nicht aber, die Frage zu stellen: : welches ist denn die alltägliche Verwendung des Wortes “unendlich”, die ihm seine Bedeutung für uns gibt, & was ist nun seine Verbindung mit diesen mathematischen Kalkülen?

Ms-121 89r[2]

61 Finitism & Behaviourism sind ganz ähnliche Richtungen. Beide sagen: hier ist doch nur ... Beide leugnen die Existenz von etwas, beide zu dem Zweck, um (aus) einer Verwirrung zu entkommen.

Ms-121 89r[3] & 89v[1]

62 Was ich (hier) tue ist nicht Rechnungen als falsch zu erweisen; sondern das *Interesse* von Rechnungen einer Prüfung zu unterziehen. Ich prüfe etwa die Berechtigung, hier noch das Wort ... zu gebrauchen. Eigentlich aber: ich fordere immer wieder zu so einer Untersuchung auf. Zeige, daß es sie gibt, & was da etwa zu untersuchen ist. Ich darf also nicht sagen: “So darf man sich nicht ausdrücken”, oder “Das ist absurd”, oder “Das ist uninteressant”, sondern: “Prüfe diesen Ausdruck in dieser Weise auf seine Berechtigung”; denn man kennt seine Berechtigung, weil seine Verwendung, noch nicht, damit, daß man ...

III

Ms-122 5r[2] & 5v[1]

1 25.10.1939

‘Ein Mathematischer Beweis muß übersichtlich sein.’ “Beweis” nennen wir nur eine Struktur, deren Reproduktion eine leicht lösbare Aufgabe ist. Es muß sich mit Sicherheit entscheiden lassen, ob wir hier wirklich zweimal den gleichen Beweis vor uns haben, oder nicht. Der Beweis muß ein Bild sein, welches sich mit Sicherheit genau reproduzieren läßt. Oder auch: was dem Beweise wesentlich ist muß sich mit Sicherheit genau reproduzieren lassen. Er kann z.B. in zwei verschiedenen Handschriften oder Farben niedergeschrieben sein. Zur Reproduktion eines Beweises soll nichts gehören was von der Art einer genauen Reproduktion eines Farbtones oder einer Handschrift ist.

Ms-122 5v[2] & 6r[1] & 6v[1]

Es muß leicht sein *genau* diesen Beweis wieder anzuschreiben. Hierin liegt der Vorteil des Geschriebenen im Vergleich zum gezeichneten Beweis. Dieser ist oft seinem Wesen nach mißverstanden worden. Die Zeichnung eines Euklidischen Beweises kann ungenau sein, in dem Sinne, daß die Geraden nicht gerade sind die Kreisbögen nicht genau kreisförmig etc. etc. & dabei ist die Zeichnung doch ein exakter Beweis & dies zeigt daß diese Zeichnung nicht – z.B. – demonstriert daß eine solche Konstruktion ein Vieleck mit 5 gleichlangen Seiten ergibt, daß sie einen Satz der Geometrie, nicht einen über die Eigenschaften von Papier, Zirkel, Lineal & Bleistift beweist.

Ms-122 7r[2]

Denken wir uns nun einen Russellschen Beweis für einen Additionssatz der Art a + b = c der aus ein paar tausend Zeichen bestünde. Du wirst sagen: Zu sehen, ob dieser Beweis stimmt, oder nicht, ist eine rein äußerliche Schwierigkeit, die von keinem mathematischen Interesse ist. (“Ein Mensch übersieht leicht, was ein anderer schwer oder garnicht übersieht”– etc. etc.)

Ms-122 6v[3] & 7r[1]

2 27.10.1939

Ich will sagen: Wenn man eine nicht übersichtliche Beweisfigur durch Veränderung der Notation übersehbar macht, dann schafft man erst einen Beweis, wo früher keiner war.

Ms-122 7v[2]

Die Annahme ist, daß die Definitionen nur zur Abkürzung des Ausdrucks dienen, zur Bequemlichkeit des Rechnenden; während sie doch ein Teil der Rechnung sind.

Mit ihrer Hilfe werden Ausdrücke erzeugt, die ohne ihre Hilfe nicht erzeugt werden könnten.

Ms-122 8r[2] & 8v[1] 3 Wie ist es aber damit: “Man kann zwar im R’schen Kalkül nicht 234 mit 537 multiplizieren – im gewöhnlichen Sinn – aber es gibt eine R’sche Rechnung die dieser Multiplikation entspricht”? – Welcher Art ist diese Entsprechung? Es könnte so sein:

Man kann auch im R’schen Kalkül diese Multiplikation ausführen nur in einem andern Symbolismus – wie wir ja auch sagen würden wir könnten sie auch in einem andern Zahlensystem ausführen. Wir könnten dann also z.B. die praktischen Aufgaben, zu deren Lösung man jene Multiplikation benützt auch durch die Rechnung im R’schen Kalkül lösen, nur umständlicher.

Ms-122 8v[2] & 9r[1] Denken wir uns nun die Kardinalzahlen erklärt als 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, ((1 + 1) + 1) + 1, u.s.f.. Du sagst, die Definitionen welche die Ziffern des Dezimalsystems einführen dienen bloß zur Bequemlichkeit; man könnte die Rechnung 703000 × 40000101 auch in jener langwierigen Schreibweise ausführen. Aber stimmt das? – “Freilich stimmt es! Ich kann doch eine Rechnung in jener Notation anschreiben, konstruieren, die der Rechnung in der Dezimalnotation entspricht.” – Aber wie weiß ich, daß sie ihr entspricht? – Nun, weil ich sie nach einer gewissen Methode aus der andern abgeleitet habe. – Aber wenn ich sie nun nach einer halben Stunde wieder anschaue, kann sie sich da nicht verändert haben? Sie ist ja nicht übersehbar.

Ms-122 9r[2] Ich frage nun: könnten wir uns von der Wahrheit des Satzes 7034174 + 6594321 = 13628495 auch durch einen Beweis überzeugen, der in der ersten Notation geführt wäre? – Gibt es so einen Beweis dieses Satzes? – Die Antwort ist: nein.

Ms-122 11r[2] 4 Aber lehrt uns Russell nicht doch *eine* Art des Addierens?

Ms-122 11r[3] & 11v[1] 30.10.1939

Angenommen wir bewiesen auf R's Methode daß (∃a.....g) .... (∃a.....i) ⊃ (∃a.....s) eine Tautologie ist; könnten wir nun unser Resultat dahin ausdrücken, g + i sei s? Das setzt doch voraus, daß ich die drei Stücke des Alphabets als Repräsentanten des Beweises nehmen kann. Aber zeigt denn das R's Beweis? Den R'schen Beweis hätte ich doch offenbar auch mit solchen Gruppen von Zeichen in den Klammern führen können, deren Reihenfolgen für mich nichts Charakteristisches gehabt hätten, so daß es nicht möglich gewesen wäre die Zeichengruppe in einer Klammer durch ihr letztes Glied zu repräsentieren.

Ms-122 11v[2] & 12r[1] Angenommen sogar, der R'sche Beweis werde mit einer Notation der Art x1x2...x10x11...x100... als in der Dezimalnotation geführt, & es seien 100 Glieder in der ersten 300 Glieder in der zweiten & 400 Glieder in der dritten Klammer, zeigt der Beweis selbst dann, daß 100 + 300 = 400 ist? – Wie wenn dieser Beweis einmal zu diesem einmal zu einem andern Resultat führte z.B. 100 + 300 = 420? Was bedarf es, um zu sehen daß das Resultat des Beweises, wenn er richtig geführt ist, immer nur von den letzten Ziffern der ersten zwei Klammern abhängt?

Ms-122 12r[2] & 12v[1] Aber für kleine Zahlen lehrt uns doch Russell addieren; denn dann übersehen wir eben die Zeichengruppen in den Klammern & können *sie* als Zahlzeichen nehmen; z.B. 'xy', 'xyz', 'xyzuv'.

Russell lehrt uns also einen anderen Kalkül, um von 2 und 3 zu 5 zu gelangen; & das stimmt auch dann, wenn wir sagen der logische Kalkül sei nur – 'frills', die dem arithmetischen Kalkül angehängt seien.

Ms-122 12v[2] & 13r[1] Die *Anwendung* der Rechnung muß für sich selber sorgen. Und das ist, was am 'Formalismus' richtig ist. Die Zurückführung der Arithmetik auf symbolische Logik soll die Applikation der Arithmetik zeigen; gleichsam den Ansatz, mittels welchem sie auf ihrer Anwendung sitzt. So als zeigte man Einem erst eine Trompete ohne das Mundstück – & nun das Mundstück, welches uns zeigt, wie eine Trompete verwendet, geblasen, wird. Das Ansatzstück aber, das uns Russell gibt, ist einerseits zu eng anderseits zu weit; zu allgemein und zu speziell. Die Rechnung sorgt für ihre eigene Anwendung.

Ms-122 13r[2] & 13v[1]

Wir dehnen unsre Ideen von den Rechnungen mit kleinen Zahlen auf die mit großen Zahlen aus, ähnlich wie wir uns vorstellen, daß wenn die Distanz von hier zur Sonne mit dem Zollstock gemessen werden *könnte* dann eben das herauskäme was wir heute auf ganz andere Art herausbringen. Das heißt, wir sind geneigt die Längenmessung mit dem Zollstab zum Modell zu nehmen auch für die Messung des Abstandes zweier Sterne. Und man sagt, etwa in der Schule: "Wenn wir uns Zollstäbe von hier bis zur Sonne gelegt denken, ..." & scheint damit zu erklären, was wir unter dem Abstand zwischen Sonne und Erde verstehen. Und der Gebrauch eines solchen Bildes ist ganz in Ordnung, so lange es uns klar ist daß wir den Abstand von uns zur Sonne messen können & daß wir ihn nicht mit Zollstäben messen können.

Ms-122 13v[2] & 14r[1]

5 31.10.1939

Wie, wenn jemand sagen würde: "der eigentliche Beweis von 1000 + 1000 = 2000 ist doch erst der Russellsche, der zeigt, daß der Ausdruck ... eine Tautologie ist"? Kann ich denn nicht beweisen, daß eine Tautologie herauskommt, wenn ich in den beiden ersten Klammern je 1000 Glieder & in der dritten 2000 habe? Und wenn ich das beweisen kann, so kann ich das als Beweis des arithmetischen Satzes ansehen.

Ms-122 14r[2]

In der Philosophie ist es immer gut, statt einer Beantwortung einer Frage eine *Frage* zu setzen. Denn eine Beantwortung der philosophischen Frage könnte ungerecht sein; ihre Erledigung mittels einer andern Frage ist es nicht.

Ms-122 14r[3] Soll ich also z.B. hier eine *Frage* setzen statt der Antwort, man könne jenen arithm. Satz mit R's Methode nicht beweisen?

Ms-122 14v[1] & 15r[1] 6 01.11.1939

Der Beweis, daß $(1)(2) \supset (3)$

eine Tautologie ist, besteht darin, daß man immer ein Glied der 3^{ten} Klammer für ein Glied von 1 oder 2 abstreicht. Und es gibt ja viele Methoden dieses Kollationierens. Oder man könnte auch sagen: es gibt viele Arten & Weisen, das Gelingen der 1 → 1 Zuordnung festzustellen. Eine Art wäre z.B. sternförmige Muster eins für die linke eins für die rechte Seite der Implikation zu konstruieren & diese wieder dadurch zu vergleichen daß man ein Ornament aus beiden bildet. Man könnte also die Regel geben: "Wenn Du wissen willst, ob die Zahlen A & B zusammen wirklich C ergeben, schreib einen Ausdruck der Form ... an & ordne die Variablen in den Klammern einander zu indem Du den Beweis dafür anschreibst (oder anzuschreiben trachtest) daß der Ausdruck eine Tautologie ist." Mein Einwand dagegen ist nun *nicht*, daß es willkürlich ist, gerade diese Art des Kollationierens vorzuschreiben, sondern, daß man auf diese Weise nicht feststellen kann, daß $1000 + 1000 = 2000$ ist.

Ms-122 16r[4] & 16v[1] 7 03.11.1939

Denke, Du hättest eine meilenlange 'Formel' angeschrieben, & zeigtest durch Transformation, daß sie tautologisch ist ('wenn sie sich inzwischen nicht verändert hat', müßte man sagen). Nun *zählen* wir die Glieder in den Klammern oder teilen sie ab

& machen den Ausdruck übersichtlich & es zeigt sich, daß in der ersten Klammer 7566 in der zweiten 2434 in der dritten 10000 Glieder stehen. Habe ich nun bewiesen, daß 2434 + 7566 = 10000 ist? – Das kommt drauf an – könnte man sagen – ob Du sicher bist, daß das Zählen wirklich die Zahlen der Glieder ergeben hat, die während des Beweises in den Klammern standen.

Ms-122 16v[2] & 17r[1]

Könnte man so sagen: "R. lehrt uns in die 3te Klammer so viele Zeichen schreiben als in den beiden ersten zusammen stehen"? Aber eigentlich: er lehrt uns für je eine Variable in (1) & in (2) eine Variable in (3) schreiben. Aber lernen wir dadurch welche Zahl die Summe zweier gegebener Zahlen ist? Vielleicht sagt man: "Freilich, denn in der 3ten Klammer steht nun das Paradigma, Urbild, der neuen Zahl." Aber inwiefern ist |||||||||||||| das Paradigma einer Zahl? Bedenke, wie man es als solches verwenden kann.

Ms-122 21v[3] & 22r[1]

8 09.11.1939

Die R'sche Tautologie, die dem Satz a + b = c entspricht, zeigt uns vor allem nicht in welcher Notation die Zahl c zu schreiben ist & es ist kein Grund warum sie nicht in der Form a + b geschrieben werden soll. –Denn R. lehrt uns ja nicht die Technik des Addierens, etwa, im Dezimalsystem. – Aber könnten wir sie vielleicht aus seiner Technik ableiten? Fragen wir einmal so: Kann man die Technik des Dezimalsystems aus der des Systems 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, etc. ableiten? Könnte man diese Frage nicht auch so stellen: Wenn man eine

Rechentechnik in dem einen System & eine im andern System hat, – wie zeigt man, daß die beiden äquivalent sind?

Ms-122 26v[2] 9 "Ein Beweis soll nicht nur zeigen, daß es so ist, sondern daß es so sein muß."

Ms-122 26v[3] Unter welchen Umständen zeigt dies das Zählen?

Ms-122 26v[4] & 27r[1] 17.11.1939

{ Man möchte sagen: wenn die Ziffern & das Gezählte ein einprägsames Bild ergeben. Wenn dieses Bild nun statt jedes neuen Zählens dieser Menge gebraucht wird. – Aber hier scheinen wir nur von *räumlichen* Bilden zu reden: wenn wir aber eine Reihe von Wörtern auswendig wissen & nun zwei solche Reihen einander eins zu eins zuordnen indem wir z.B. sagen

"der erste – Montag; der zweite – Dienstag; der dritte – Mittwoch; etc." – können wir so nicht *beweisen* daß vom Montag zum Donnerstag vier Tage sind? Es fragt sich eben: Was nennen wir ein "einprägsames Bild". Was ist das Kriterium davon, daß wir es uns eingeprägt haben? Oder ist die Antwort hierauf: "Daß wir es als Paradigma der Identität benützen!"?

Ms-122 27r[2] 10 Wir machen nicht *Versuche*, an einem Satz, oder Beweis, um seine Eigenschaften festzustellen.

Ms-122 27r[3] & 27v[1] Wie reproduzieren wir, kopieren wir einen Beweis? – Nicht, z.B., indem wir Messungen an ihm anstellen.

Ms-122 27v[2] & 28r[1] Wie wenn ein Beweis so ungeheuer lang wäre, daß man ihn unmöglich übersehen könnte – oder sehen wir einen anderen Fall an: Man habe als Paradigma der Zahl die wir 1000 nennen eine lange Reihe von Strichen in einen harten Fels gegraben. Diese Reihe nennen wir die Ur-Tausend & um zu erfahren, ob tausend Menschen auf einem Platz sind ziehen wir Striche, oder spannen Schnüre ($1 \rightarrow 1$ Zuordnung). Hier hat nun das Zahlzeichen für 1000 nicht die Identität einer Gestalt sondern eines physikalischen Gegenstandes. Wir können uns ähnlich eine Ur-Hundert etc. denken & einen Beweis daß $10 \times 100 = 1000$ ist, den wir nicht *übersehen* könnten.

Ms-122 28r[2] Die Ziffer für 1000 im $1 + 1 + 1 + 1$... System kann nicht durch ihre *Gestalt* erkannt werden.

Ms-122 28r[4] & 28v[1]

11 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

Ist diese Figur ein Beweis für $27 + 16 = 43$: weil man zu “27” kommt, wenn man die Striche der linken Seite zählt, zu “16” auf der rechten Seite, & zu “43” wenn man die ganze Reihe zählt?

Worin liegt hier das Seltsame – wenn man die Figur den Beweis dieses Satzes nennt? Doch darin, wie dieser Beweis zu reproduzieren ist, oder wiederzuerkennen ist, darin, daß er keine charakteristische visuelle Gestalt hat. –

Ms-122 28v[3] & 29r[1] Wenn nun jener Beweis auch keine visuelle Gestalt hat, so kann ich ihn dennoch genau kopieren(, reproduzieren) – ist die Figur also nicht doch der Beweis? Ich könnte ihn etwa in ein Stahlstück einritzen & von Hand zu Hand gehen lassen. Ich würde also Einem sagen: "Hier hast Du den Beweis, daß 27 + 16 = 43 ist." – – Nun, kann man nicht *doch* sagen: er beweise den Satz mit Hilfe der Figur? Doch; aber die Figur ist nicht der Beweis.

Ms-122 29r[2] & 29v[1] Das aber würde man doch einen Beweis von 250 + 3220 = 3470 nennen: man zählt über 250 hinaus & fängt zugleich auch bei 1 zu zählen an & ordnet die beiden Zählungen einander zu: 251 ... 1 252 ... 2 253 ... 3 etc. 3470 ...3220 Man könnte das einen Beweis nennen, der durch 3220 Stufen fortschreitet. Das ist doch ein Beweis – & kann man ihn übersichtlich nennen??

Ms-122 30r[2] & 30v[1] 12 Wie kannst Du sagen, daß Russell den Satz "250 + 3220 = 3470" nicht beweisen kann?! Denk Dir einfach, daß man die Definitionen 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, etc. nicht *darum* auswendig weiß, weil sie einem System folgen – man weiß sie eben auswendig. Was ist die Erfindung des Dezimalsystems eigentlich? Die Erfindung eines Systems von Kürzungen – – aber was ist das System der Kürzungen ? ist es bloß das System der neuen Zeichen, oder auch ein System ihrer Anwendungen als Abkürzung? Und ist es das letztere, dann ist es ja eine neue Anschauungsart des alten Zeichensystems.

Ms-122 30v[2] Können wir vom 1 + 1 + 1... System kommend, durch bloße Abkürzungen der Schreibweise im Dezimalsystem rechnen lernen?

Ms-122 31v[2] & 32r[1]

13 Angenommen ich habe nach Russell einen Satz der Form (∃xyz...) (∃uvw...) ⊃ (∃abc...) bewiesen – & nun 'mache ich ihn übersichtlich', indem ich über die Variablen Zeichen x1,x2,x3... schreibe – soll ich nun sagen, ich habe nach Russell einen arithmetischen Satz im Dezimalsystem bewiesen?

Ms-122 32r[2]

22.11.1939

Aber jedem Beweis in Dezimalsystem entspricht doch einer im Russellschen System! – Woher wissen wir, daß es so ist? Lassen wir die Intuition beiseite. – Aber man kann es beweisen. –

Ms-122 32r[3]

Wenn man eine Zahl im Dezimalsystem aus 1, 2, 3 … 9, 0 definiert & die Zeichen 0,1...9 aus 1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, …, kann man dann durch die rekursive Erklärung des Dezimalsystems hindurch von irgendeiner Zahl zu einem Zeichen der Form 1 + 1 + 1... gelangen?

Ms-122 32v[1]

Wie, wenn Einer sagte: Die R.sche Arithmetik stimmt mit der gewöhnlichen bis zu Zahlen unter 10^{10} überein; dann aber weicht sie von ihr ab. Und nun führt er uns einen R-Beweis dafür vor daß $10^{10} + 1 = 10^{10}$ ist. Warum soll ich nun einem solchen Beweis nicht trauen? Wie wird man mich davon überzeugen, daß ich mich im R-Beweis verrechnet haben muß? Brauche ich denn aber einen Beweis aus einem anderen System, um mich zu überzeugen, ob ich mich in dem ersten Beweis verrechnet habe? Genügt es nicht, daß ich diesen Beweis übersehbar anschreibe?

Ms-122 32v[2] &

14 23.11.1939

33r[1] Liegt denn nicht meine ganze Schwierigkeit darin, einzusehen, wie man, ohne aus R's logischem Kalkül herauszutreten zum Begriff der *Menge von Variablen* im Ausdruck "(∃ x,y,z etc.)" kommen kann, dort wo dieses Zeichen nicht übersehbar ist? – Nun kann man ihn aber doch übersehbar machen indem man schreibt:

(∃x1,x2,x3,etc.). Und dennoch verstehe ich etwas nicht: man hat doch nun das Kriterium für die Identität so eines Ausdrucks geändert! Ich sehe jetzt auf andere Weise, daß die Menge der Zeichen in zwei solchen Ausdrücken die selbe ist.

Ms-122 Ich bin eben versucht zu sagen: R's Beweis kann wohl Stufe für
33v[2] Stufe weitergehen, aber am Schluß wisse man nicht recht was man bewiesen habe – wenigstens nicht nach den alten Kriterien; indem ich den R-schen Beweis übersichtlich mache, beweise ich etwas über diesen Beweis.

Ms-122 Ich will sagen: man brauche die R'sche Rechentechnik gar nicht
33v[3] & anzuerkennen, & könne mit einer andern (Rechentechnik)
34r[1] & beweisen, daß es einen R'schen Beweis des Satzes geben *müsse*.
34v[1] Dann aber ruht der Satz freilich nicht mehr auf dem R-Beweis. Oder: Daß man sich zu jedem bewiesenen Satz der Form m + n = l einen R'schen Beweis vorstellen kann, zeigt nicht daß der Satz auf diesem Beweis ruht. Denn der Fall ist denkbar, daß man den R-Beweis eines Satzes vom R-Beweis eines andern Satzes gar nicht unterscheiden kann & nur darum sagt sie seien verschieden, weil sie die Übersetzungen zweier erkennbar verschiedener Beweise sind.

Ms-122 Oder: Etwas hört auf Beweis zu sein, wenn es aufhört
34v[2] Paradigma zu sein, z.B. R.'s logischer Kalkül; & anderseits ist jeder andere Kalkül annehmbar, der uns als Paradigma dient.

Ms-122 15 25.11.1939
36v[2]

Es ist eine Tatsache, daß verschiedene Methoden der Zählung so gut wie immer übereinstimmen.

Ms-122 Wenn ich die Felder eines Schachbretts zähle, komme ich so gut
36v[3] & wie immer zu '64'.
37r[1]

Ms-122 Wenn ich zwei Reihen von Wörtern auswendig weiß, z.B.,
37r[2] Zahlwörter & das Alphabet & ich ordne sie nun einander 1 → 1 zu a 1 b 2 c 3 etc.

so komme ich bei 'z' so gut wie immer zu '26'.

Ms-122 37r[3] & 37v[1] & 38r[1] Es gibt (so) etwas wie: eine Reihe von Wörtern auswendig können. Wann sagt man ich wisse das Gedicht … auswendig? Die Kriterien sind ziemlich kompliziert. Übereinstimmung mit dem gedruckten Texte ist eines. Was müßte geschehen, das mich zweifeln machte, daß ich wirklich das ABC auswendig weiß? Es ist schwer vorzustellen. Aber ich verwende nun das Aufsagen, oder Anschreiben aus dem Gedächtnis, einer Wortfolge als Kriterium der Zahlengleichheit, Mengengleichheit. [I'm much too slick & all I produce is pretty slick. Es hat nicht genug Falten im Gesicht sondern ist oberflächlich & von glatter Stirn. Zugleich macht es fälschlich den Eindruck der Tiefe, denn es ist von Einem geschrieben der sich so gern tief wüßte. Das Gesicht ist zu faltenlos; aber Falten kommen vom *Kummer*, nicht von der Bequemlichkeit. Wer auf dem Kummer schwimmen will, um ja nie unterzutauchen, wie sollte der Tiefe kennen. Mein ganzes Leben (inneres & äußeres) ist darauf angelegt, auf sicherem Boot *auf* dem Meere, auf der Oberfläche, zu schwimmen. Ich will doch gar nicht zahlen; wie sollte ich erhalten?]

Ms-122 38r[2] Soll ich nun sagen: Das macht ja alles nichts – die Logik bleibt doch der Grundkalkül nur wird freilich, ob ich zweimal dieselbe Formel vor mir habe, von Fall zu Fall verschieden festgestellt.

Ms-122 38v[3]

16 Es ist nicht die Logik, die mich zwingt – möchte ich sagen – einen Satz von der Form (∃) (∃) ⊃ (∃) anzuerkennen, wenn in den ersten beiden Klammern je eine Million Variable ist & in der dritten zwei Millionen. Ich will sagen: die Logik zwänge mich in diesem Falle gar nicht irgend einen Satz anzuerkennen. Etwas *anderes* zwingt mich so einen Satz als der Logik gemäß anzuerkennen.

Ms-122 38v[4] & 39r[1]

27.11.1939

Die Logik zwingt mich nur, sofern mich der logische Kalkül zwingt.

Ms-122 39r[2] & 39v[1]

Aber es ist doch dem Kalkül mit 1000000 wesentlich, daß sich diese Zahl muß in eine Summe 1 + 1 + 1... auflösen lassen! Und um sicher zu sein, daß wir die richtige Anzahl von Einsern vor uns haben, können wir ja die Einser numerieren. 11+12+13+14+...+11000000 Diese Notation wäre ähnlich der: ‘100,000.000,000’, die ja auch das Zahlzeichen übersehbar macht. Und ich kann mir doch denken, jemand hätte große Summen Geldes in Pfennigen in ein Buch eingetragen wo sie etwa als 100-stellige Zahlen erschienen, mit denen ich nun zu rechnen hätte. Ich finge nun damit an, sie mir in eine übersehbare Notation zu übersetzen, würde sie aber doch ‘Zahlzeichen’ nennen, sie als Dokumente von Zahlen behandeln. Ja ich würde es sogar als Dokument einer Zahl ansehen, wenn mir einer sagte N hat soviele Schillinge, als Erbsen in dieses Faß gehen. Anders wieder: “Er hat soviele Schillinge als das Hohelied Buchstaben hat”.

Ms-122

17 29.11.1939

39v[3] Die Notation ‘x1,x2,x3…’ macht den Ausdruck ‘(∃…)’ zur Gestalt & damit die R-bewiesene Tautologie.

Ms-122 39v[4] & 40r[1] Laß mich so fragen: Ist es nicht möglich, daß die 1 → 1 Zuordnung im R.schen Beweis nicht verläßlich vollzogen werden kann, daß, *z.B.*, wenn wir sie zum Addieren benützen wollen, regelmäßig sich ein dem gewöhnlichen Resultat widersprechendes ergibt, & daß wir das auf eine Ermüdung schieben, die , ohne daß wir’s wissen uns gewisse Schritte überspringen läßt? Und könnten wir dann nicht sagen: – wenn wir nur nicht ermüdeten, würde sich dieses Resultat ergeben –? Darum, weil es die *Logik* fordert? Fordert sie es denn? Kontrollieren wir (hier) nicht die Logik mit einem anderen Kalkül?

Ms-122 40v[1] Nehmen wir an wir nähmen immer 100 Schritte des logischen Kalküls zusammen & erhielten nun verläßliche Resultate, während wir sie nicht erhalten, wenn wir alle Schritte auszuführen versuchen – – man möchte sagen: die Rechnung basiert ja doch auf Einerschritten, da ein Hunderterschritt durch Einerschritte definiert ist. – Die Definition sagt doch: einen Hunderterschritt machen sei dasselbe wie …, – & doch machen wir den Hunderterschritt & *nicht* die hundert Einerschritte. Beim abgekürzten *Rechnen* folge ich doch einer *Regel* – – & wie wurde diese Regel abgeleitet? – Wie, wenn der gekürzte & der ungekürzte Beweis verschiedene Resultate ergeben?

Ms-122 41r[1] 18 30.11.1939

Was ich sage kommt doch darauf hinaus: daß ich, z.B., ‘10’ als ‘$1 + 1 + 1 + 1\ldots$’ definieren kann & ‘100×2’ als ‘$2 + 2 + 2\ldots$’, aber darum nicht notwendig ‘100×10’ als ‘$10 + 10 + 10\ldots$’ oder gar als ‘$1 + 1 + 1 + 1\ldots$’.

Ms-122 41r[2] Ich kann mich davon, daß $100 \times 100 = 10000$ ist durch ein ‘abgekürztes’ Verfahren überzeugen. Warum soll ich dann nicht *dieses* als das ursprüngliche Beweisverfahren betrachten?

Ms-122 41r[3] Ein abgekürztes Verfahren lehrt mich, was bei dem unabgekürzten herauskommen *soll*. (Statt daß es umgekehrt wäre.)

Ms-122 41v[1] **19** 01.12.1939

“Die Rechnung basiert ja doch auf den Einerschritten ...” Ja; aber auf andre Weise. Der Beweisvorgang ist eben ein anderer.

Ms-122 41v[2] Ich könnte z.B. sagen:

$10 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ und *gleichermaßen* $100 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10$. Habe ich nicht die Erklärung von 100 auf die sukzessive Addition von 1 basiert? Aber in der selben Weise, als hätte ich 100 Einser addiert? Braucht es in meiner Notation überhaupt ein Zeichen der Form – ‘$1 + 1 + 1\ldots$’ mit 100 Summanden geben?

Ms-122 41v[3] & 42r[1] Die Gefahr scheint hier zu sein, das gekürzte Verfahren als einen blassen Schatten des ungekürzten anzusehen. Die Regel des Zählens ist nicht das Zählen.

Ms-122 **20** 02.12.1939

42r[2] Worin besteht es 100 Schritte des Kalküls 'zusammenzunehmen'? Doch darin, daß man nicht die Einerschritte sondern einen andern Schritt als maßgebend ansieht.

Ms-122 42v[2] & 43r[1] Beim gewöhnlichen Addieren von Zahlen im Dezimalsystem machen wir Einerschritte, Zehnerschritte, etc.. Kann man sagen, das Verfahren basiere auf dem, nur Einerschritte zu machen? Und man könnte es so begründen: Das Resultat der Addition schaut allerdings so aus – '7583', aber die Erklärung dieses Zeichens, seine Bedeutung, die endlich auch in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen muß ist doch der Art: 1 + 1 + 1 + 1 + 1 u.s.f.. Aber ist dem so? Muß das Zahlzeichen so erklärt werden oder diese Erklärung implicite in seiner Anwendung zum Ausdruck kommen? Ich glaube, wenn wir nachdenken zeigt sich's, es ist nicht der Fall.

Ms-122 43r[2] Das Rechnen mit Kurven oder mit dem Rechenschieber. Freilich wenn wir die eine Art des Rechnens mit der anderen kontrollieren, kommt normalerweise dasselbe heraus. Wenn es nun aber mehrere Arten gibt – wer sagt, wenn sie nicht übereinstimmen, welches die eigentliche, d.h. aus dem *Wesen* der Zahl stammende, Rechnungsweise ist?

Ms-122 44r[2] **21** 04.12.1939

Wo ein Zweifel darüber auftauchen kann, ob *dies* wirklich das Bild *dieses* Beweises ist, wo wir bereit sind die Identität eines Beweises anzuzweifeln, dort hat die Ableitung ihre Beweiskraft verloren. Denn der Beweis dient uns ja als Maß.

Ms-122 44r[3] Könnte man sagen: Zu einem Beweise gehört ein von uns anerkanntes Kriterium der richtigen Reproduktion des Beweises?

Ms-122 44r[4] & 44v[1] D.h., (auf den gewöhnlichen Fall angewandt), es muß uns als sicher feststehen, daß wir beim Beweisen (z.B.) kein Zeichen übersehen haben. Daß uns kein Teufelchen betrogen haben kann, indem es Zeichen ohne unserm Wissen verschwinden ließ, hinzusetzte, etc.

Ms-122 44v[3] Man könnte sagen: Wenn man sagen kann: "auch wenn uns ein Dämon betrogen hätte, so wäre doch alles in Ordnung", dort hat der Schabernack, den er uns antun wollte, eben seinen Zweck verfehlt.

Ms-122 45r[2] 22 05.12.1939

Der Beweis, könnte man sagen, zeigt nicht bloß, *daß* es so ist, sondern: *wie* es so ist. Er zeigt, *wie* 13 + 14 27 ergeben.

Ms-122 45r[3] "Der Beweis muß übersehbar sein" – heißt: wir müssen bereit sein, ihn als Richtschnur unseres [(nicht-mathematischen)] Urteilens zu gebrauchen.

Ms-122 45r[4] Wenn ich sage "der Beweis ist ein Bild" – so kann man sich ihn auch als kinematographisches Bild denken.

Ms-122 45v[1] Den Beweis macht man ein für alle Mal.

Ms-122 46v[2] Der Beweis muß natürlich vorbildlich sein.

Ms-122 08.12.1939

46v[3] Der Beweis(, (das Beweisbild)) zeigt uns das Resultat eines Vorgangs (der Konstruktion); & wir sind überzeugt, daß ein *so* geregeltes Vorgehen (immer) zu diesem Bild führe.

Ms-122 47r[1] (Der Beweis führt uns ein synthetisches Faktum vor.)

Ms-122 47r[3] **23** 09.12.1939

Mit dem Satz, der Beweis sei ein Vorbild, – dürfen wir natürlich nichts neues sagen.

Ms-122 47r[4] Der Beweis muß ein Vorgang sein, von dem ich sage: Ja, so muß es sein; das muß herauskommen, wenn ich mich nach dieser Regel richte.

Ms-122 47r[5] & 47v[1] Der Beweis, könnte man sagen, muß ursprünglich eine Art Experiment sein – wird aber dann einfach als Bild genommen.

Ms-122 47v[2] Wenn ich 200 Äpfel & 200 Äpfel zusammenschütte & zähle, & es es kommt 400 heraus, so ist das kein Beweis für 200 + 200 = 400. D.h., wir würden dieses Faktum nicht als Paradigma zur Beurteilung aller ähnlichen Situationen verwenden wollen.

Ms-122 47v[3] Zu sagen: “diese 200 Äpfel & diese 200 Äpfel geben 400”– sagt: Wenn man sie zusammenschüttet, kommt keiner weg, noch dazu, sie verhalten sich *normal*.

Ms-122 48r[3] **24** 11.12.1939

‘Das ist das Vorbild der Addition von 200 & 200’– nicht: ‘ Das ist das Vorbild davon, daß 200 & 200 addiert 400 ergeben’. Der Vorgang des Addierens ***ergab*** allerdings 400, aber dies Resultat nehmen wir nun zum Kriterium der richtigen Addition – oder einfach: der Addition – dieser Zahlen.

Ms-122 48v[2] ← Der Beweis muß unser Vorbild, unser Bild, davon sein, wie diese Operationen *ein Ergebnis* haben.

Ms-122 48r[4] Der ‘bewiesene Satz’ drückt aus, was aus dem Beweisbild abzulesen ist.

Ms-122 48v[1] Der Beweis ist uns ein Paradigma des richtigen Zusammenzählens von 200 Äpfeln & 200 Äpfeln: D.h., er bestimmt einen neuen Begriff: ‘das Zusammenzählen von 200 & 200 Gegenständen’. Oder man könnte auch sagen: “ein neues Kriterium dafür, daß nichts weggekommen, oder dazugekommen ist”.

Ms-122 48v[3] Der Beweis *definiert* das ‘richtige Zusammenzählen’.

Ms-122 48v[4] & 49r[1] Der Beweis ist unser Vorbild eines bestimmten *Ergebens*,– welches als Vergleichsobjekt (Maßstab) für wirkliche Veränderungen dient.

Ms-122 50r[2] 25 Der Beweis überzeugt uns von etwas – – aber nicht der Gemütszustand der Überzeugung interessiert uns jetzt, sondern die Handlungen die diese Überzeugung belegen.

Ms-122 50r[3] Daher läßt uns die Aussage, der Beweis überzeuge uns von der Wahrheit dieses Satzes, kalt, da dieser Ausdruck der verschiedensten Auslegungen fähig ist.

Ms-122 50r[4] & 50v[1] Wenn ich sage: “der Beweis überzeugt mich von etwas”, so muß aber der Satz, der dieser Überzeugung Ausdruck gibt nicht im Beweise konstruiert werden. Wie wir z.B. multiplizieren, aber nicht notwendigerweise das Ergebnis in Form des Satzes ... × ... = ... hinschreiben. Man wird also wohl sagen, die Multiplikation gebe uns diese Überzeugung, ohne daß der *Satz* der sie ausdrückt je ausgesprochen wird.

Ms-122 51r[2] Ein psychologischer Nachteil der Beweise, die *Sätze* konstruieren, ist, daß sie uns leichter vergessen lassen, daß der *Sinn* des Resultats nicht aus diesem allein abzulesen (ist), sondern aus dem *Beweis*. In dieser Hinsicht hat das Eindringen des Russellschen Symbolismus in die Beweise viel Schaden gemacht.

Ms-122 51r[3] & 51v[1] Die Russellschen Zeichen hüllen die wichtigen Formen des Beweises, gleichsam, bis zur Unkenntlichkeit ein, wie wenn eine menschliche Gestalt in (viele) Tücher gewickelt ist.

Ms-122 52r[4] & 52v[1] 26 18.12.1939

Bedenken wir, wir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, daß wir eine *Regel annehmen*.

Ms-122 52v[2] Nichts ist wahrscheinlicher, als daß der Wortausdruck des Resultats eines mathem. Beweises dazu angetan ist, uns einen Mythus vorzumachen. Wie sollte es nicht so sein, da jeder Ausdruck in diesen Sätzen in einer sehr speziellen, & dabei, gewissermaßen, übertragenen Bedeutung gebraucht wird.

Ms-122 53r[1] 27 Ich will etwa sagen: Wenn auch der bewiesene mathematische Satz hinaus auf eine Realität außerhalb (seiner selbst) zu deuten scheint, (so) ist er doch nur (der) Ausdruck der Anerkennung eines neuen Maßes (der Realität).

Ms-122 53r[2] Wir nehmen also (aus diesen Grundlagen, auf diese Weise) die Konstruierbarkeit (Beweisbarkeit) dieses Symbols (nämlich des math. Satzes) zum Zeichen dafür, daß wir Symbole so & so transformieren sollen – – –

Ms-122 53r[3] & 53v[1] Wir haben uns im Beweis zu einer Erkenntnis durchgerungen? Und der letzte Satz spricht diese Erkenntnis aus? Ist diese Erkenntnis nun frei vom Beweise (ist die Nabelschnur abgeschnitten)? – Nun, der Satz wird jetzt allein & ohne das Anhängsel des Beweises verwendet.

Ms-122 53v[2] Warum soll ich nicht sagen: ich habe mich, im Beweis, zu einer Entscheidung durchgerungen?

Ms-122 53v[3] Der Beweis stellt diese Entscheidung in ein System von Entscheidungen.

Ms-122 53v[4] (Ich könnte natürlich auch sagen: “der Beweis überzeugt mich von der Zweckmäßigkeit dieser Regel”. Aber das zu sagen könnte leicht irreführen.)

Ms-122 53v[5] 28 20.12.1939

Der durch den Beweis bewiesene Satz dient als Regel, also als Paradigma. Denn nach der Regel *richten* wir uns.

Ms-122 54r[1] Aber bringt uns der Beweis nur dazu, daß wir uns nach dieser Regel richten (sie anerkennen), oder zeigt er uns auch, *wie* wir uns nach ihr richten sollen?

Ms-122 54r[2] Der math. Satz soll uns ja zeigen, was zu sagen *Sinn* hat.

Ms-122 54r[3] & 54v[1] Der Beweis konstruiert einen Satz; aber es kommt eben drauf an *wie* er ihn konstruiert. Manchmal z.B. konstruiert er zuerst eine *Zahl* & dann folgt der Satz, daß es eine solche Zahl gibt. Wenn wir sagen, die Konstruktion müsse uns von dem Satz *überzeugen*, so heißt das, daß sie uns dazu bringen muß, diesen Satz so & so anzuwenden. Daß sie uns bestimmen muß, das als Sinn, das nicht als Sinn anzuerkennen.

Ms-122 54v[2] 29 21.12.1939

Was hat der Zweck einer Euklidischen Konstruktion, etwa der Halbierung der Strecke, mit dem Zweck der Ableitung einer Regel aus Regeln mittels logischer Schlüsse gemein?

Ms-122 54v[3] Das Gemeinsame scheint zu sein, daß ich durch die Konstruktion eines Zeichens die Anerkennung eines Zeichens erzwinge.

Ms-122 54v[4] & 55r[1] Könnte man sagen: "Die Mathematik schafft neue *Ausdrücke*, nicht neue Sätze"?? In**so**fern nämlich, als die mathematischen Sätze ein für allemal in die Sprache aufgenommene Instrumente sind – & ihr Beweis die Stelle zeigt, an der sie stehen.

Ms-122 55r[2] Inwiefern sind aber z.B. Russells Tautologien ‘Instrumente der Sprache’? Russell hätte sie jedenfalls nicht für solche gehalten. Sein Irrtum, wenn ein solcher vorlag, konnte aber nur darin bestehen, daß er auf ihre *Anwendung* nicht acht hatte.

Ms-122 55r[3] & 55v[1] Der Beweis läßt ein Gebilde aus einem anderen entstehen. Er führt uns die Entstehung von einem aus anderen vor. Das ist alles recht gut – aber er leistet doch damit in verschiedenen Fällen ganz Verschiedenes! Was ist das *Interesse* dieser Überleitung?!

Ms-122 55v[2] Wenn ich auch den Beweis in einem Archiv der Sprache niedergelegt denke, wer sagt, *wie* dies Instrument zu verwenden ist, wozu es dient!

Ms-122 55v[3] & 56r[1] **30** 22.12.1939

Der Beweis bringt mich dazu zu sagen, das *müsse* sich so verhalten. − − Nun, das versteh ich im Fall eines Euklidischen Beweises oder eines Beweises von “$25 \times 25 = 625$”, aber ist es auch so im Fall eines R.schen Beweises etwa von “$\vdash p \supset q \bullet p . \supset . q$”? Was heißt hier ‘es *müsse* sich so verhalten’, im Gegensatz zu ‘es verhält sich so’? Soll ich sagen: “nun ich nehme diesen Ausdruck als Paradigma für alle nichtssagenden Sätze dieser Form an”?

Ms-122 56r[2] Ich gehe den Beweis durch & sage: “Ja, so *muß* es sein; ich muß den Gebrauch der Sprache *so* festlegen”. Ich schlage gleichsam einen Bolzen ein, & schließe damit gewisse Bewegungen aus.

Ms-122 56r[3] Ich will sagen, daß das *Muß* einem Gleise entspricht, das ich in der Sprache lege.

Ms-122 56v[3] & 57r[1] **31** 24.12.1939

Wenn ich sagte, ein Beweis führe einen neuen Begriff ein so meinte ich so etwas wie: der Beweis setze ein neues Paradigma zu den Paradigmen der Sprache; etwa wie wenn man ein besonderes rötlich-blau mischte die besondere Farbmischung irgendwie festlegte, & ihr einen Namen gäbe. Aber wenn wir auch geneigt sind, einen Beweis ein solches neues Paradigma zu nennen – was ist die genaue Ähnlichkeit eines Beweises zu so einem Paradigma? Man möchte sagen: der Beweis ändert die Grammatik unserer Sprache, ändert unsere Begriffe. Er macht neue Zusammenhänge & er schafft den Begriff dieser Zusammenhänge. (Er stellt nicht fest, daß sie da sind, sondern sie bestehen nicht, ehe er sie nicht macht.)

Ms-122 57v[2] **32** Welchen Begriff schafft ‘$p \supset p$’? Und doch ist es mir als könnte man sagen “$p \supset p$” diene uns als Begriffszeichen. “$p \supset p$” ist eine Formel. Legt eine Formel einen Begriff fest? Man kann sagen: “daraus folgt nach der Formel … das & das”. Oder auch: “daraus folgt auf die Art (& Weise) … das & das”. Aber ist das ein Satz, wie ich ihn wünsche? Wie ist es aber damit “Zieh’ daraus die Konsequenz auf die Art …”?

Ms-122 58r[2] **33** Wenn ich vom Beweis sage, er sei ein Vorbild(, ein Bild,) so muß ich es auch von einer R.schen primitive proposition sagen (als der Eizelle eines Beweises).

Ms-122 58r[3] & 58v[1]

Man kann fragen: Wie ist man darauf gekommen den Satz "p⊃p" als eine wahre Behauptung auszusprechen? Nun, man hat ihn nicht im praktischen Sprachverkehr gebraucht, – aber dennoch war man geneigt ihn unter besondern Umständen (wenn man z.B. Logik betrieb) *mit Überzeugung* auszusprechen.

Ms-122 59r[5] & 59v[1]

Wie ist es aber mit 'p⊃p'? Ich sehe in ihm einen degenerierten Satz, der auf der Seite der Wahrheit ist. Ich lege ihn als wichtigen Schnittpunkt von Sätzen fest. Ein Angelpunkt der Darstellung.

Ms-122 61r[3] & 61v[1]

34 28.12.1939

Die Konstruktion des Beweises beginnt mit irgend welchen Zeichen, & unter diesen müssen einige, die 'Konstanten' in der Sprache schon Bedeutung haben. So ist es wesentlich daß " ⌄ " & "~" schon eine uns geläufige Anwendung besitzen & die Konstruktion eines Beweises in den Principia Mathematica nimmt ihre Wichtigkeit, ihren Sinn, daher. Die Zeichen aber des Beweises lassen ihre Bedeutung *nicht* erkennen.

Ms-122 61v[2]

Die 'Verwendung' des Beweises hat natürlich mit jener Verwendung seiner Zeichen zu tun.

Ms-122 61v[4] & 62r[1]

35 Wie gesagt, ich bin ja auch schon von den primitive propositions Russell's in gewissem Sinne überzeugt. Die Überzeugung also, die der Beweis hervorbringt kann nicht nur von der Beweiskonstruktion herrühren.

Ms-122 64v[2] **36** Wenn ich das Urmeter in Paris sähe, aber die Institution des Messens & ihren Zusammenhang mit dem 'Urmeter' nicht kennte – könnte ich sagen, ich kenne den Begriff des Urmeters?

Ms-122 64v[3] Ist nicht auch so die Beweiskonstruktion ein Teil einer Institution?

Ms-122 64v[4] & 65r[1] Der Beweis ist ein Instrument – aber warum sage ich: "ein Instrument der Sprache"? Ist denn die Rechnung notwendigerweise ein Instrument der Sprache?

Ms-122 66r[2] **37** Was ich immer tue, scheint zu sein, zwischen Sinnbestimmung & Sinnverwendung einen Unterschied hervorzuheben.

Ms-122 68r[4] & 68v[1] **38** Den Beweis anerkennen: Man kann ihn anerkennen als Paradigma der Figur, die entsteht, wenn *diese* Regeln richtig auf gewisse Figuren angewandt wurden. Man kann ihn anerkennen als die richtige Ableitung einer Schlußregel. Oder als eine richtige Ableitung aus einem richtigen Erfahrungssatz; oder als die richtige Ableitung aus einem falschen Erfahrungssatz; oder einfach als die richtige Ableitung aus einem Erfahrungssatz, von dem wir nicht wissen ob er wahr oder falsch ist.

Ms-122 69r[2] & 69v[1] Kann ich nun aber sagen, daß die Auffassung des Beweises als 'Beweises der Konstruierbarkeit' des bewiesenen Satzes in irgend einem Sinn(e) eine einfachere, primärere, als jede andre Auffassung ist? Kann ich also sagen: "Ein jeder Beweis beweist *vor allem*, daß diese Zeichenform herauskommen muß wenn ich diese Regeln auf diese Zeichenformen anwende"?

Oder: "Der Beweis beweist vor allem, daß diese Zeichenform entstehen kann, wenn man nach diesen Transformationsregeln mit diesen Zeichen operiert. – Das würde auf eine geometrische Anwendung deuten. Denn der Satz dessen Wahrheit, wie ich sage, hier bewiesen ist, ist ein geometrischer Satz, ein Satz Grammatik die Transformierungen von Zeichen betreffend. Man könnte z.B. sagen: es sei bewiesen, daß es *Sinn* habe zu sagen, jemand habe das Zeichen … nach diesen Regeln aus … & … erhalten, aber keinen Sinn etc. etc..

Ms-122 70r[3] Oder: Wenn man die Mathematik jedes Inhalts entkleide, so bleibe, daß gewisse Zeichen aus andern nach gewissen Regeln sich konstruieren lassen. –

Ms-122 70r[4] Das Mindeste, was wir anerkennen (müssen) sei: daß dies Zeichen etc. etc. – & diese Anerkennung liege jeder anderen zu Grunde. –

Ms-122 70v[1] Ich möchte nun sagen: Die Zeichenfolge des Beweises zieht nicht notwendigerweise irgendein Anerkennen nach sich. Wenn wir aber einmal mit dem Anerkennen anfangen, dann braucht es nicht das 'geometrische' zu sein.

Ms-122 70v[2] Ein Beweis könnte doch aus bloß zwei Stufen bestehen: etwa einem Satz '(x).f(x)' & einem 'f(a)' – spielt hier das richtige Übergehen nach einer Regel eine wichtige Rolle?

Ms-122 72r[3] 39 01.01.1940

Was ist unerschütterlich gewiß am Bewiesenen?

Ms-122 72r[4] & 72v[1] Einen Satz als unerschütterlich gewiß anzunehmen – will ich sagen – heißt, ihn als grammatische Regel zu verwenden: dadurch entzieht man ihn der Ungewißheit.

Ms-122 72v[2] "Der Beweis muß übersehbar sein" heißt eigentlich nichts andres als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich in ihm ergibt nehmen wir nicht deshalb an weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür, zu sagen, daß es sich ergeben *muß*.

Ms-122 72v[3] & 73r[1] Nicht, daß das Zuordnen zu diesem Resultat führt *beweist*– sondern daß wir überredet werden, diese Erscheinungen (Bilder) als Vorbilder zu nehmen dafür, wie es ausschaut, wenn ....

Ms-122 73r[2] Der Beweis ist unser neues Vorbild dafür wie es ausschaut, wenn nichts weg- & nichts dazukommt, wenn wir richtig zählen, etc..

Ms-122 73r[3] & 73v[1]

Ich will sagen: mit der Logik der Principia Mathematica könnte man eine Arithmetik begründen in der 1000 + 1 = 1000 ist; & alles was dazu nötig ist, wäre die sinnliche Richtigkeit der Rechnungen anzuzweifeln. Wenn wir sie aber nicht anzweifeln, so hat daran nicht unsre Überzeugtheit von der Wahrheit der Logik die Schuld.

Ms-122 73v[2]

Wenn wir beim Beweis sagen: "Das *muß* herauskommen" – so nicht aus Gründen, die wir nicht *sehen*.

Ms-122 73v[3]

Nicht, daß wir dieses Resultat erhalten, sondern, daß es das Ende dieses Weges ist, läßt es uns annehmen.

Ms-122 73v[4] & 74r[1]

Das ist der Beweis, was uns überzeugt: Das Bild, was uns nicht überzeugt, ist der Beweis auch dann nicht, wenn von ihm gezeigt werden kann, daß es einen Satz exemplifiziert.

Ms-122 74r[2]

02.01.1940

Das heißt: es darf keine physikalische Untersuchung des Beweisbildes nötig sein um uns zu zeigen, was bewiesen ist.

Ms-122 75r[3] & 75v[1]

40 Wir sagen von zwei Menschen auf einem Bild nicht *vor allem*: der eine erscheine kleiner als der andre, & *erst dann*, er erscheine weiter weg zu sein. Es ist, kann man sagen, wohl möglich daß uns das kürzer sein gar nicht auffällt sondern *bloß* das Hintenliegen. (Dies scheint mir mit der Frage der 'geometrischen' Auffassung des Beweises zusammen zu hängen.)

Ms-122 75v[2]

41 03.01.1940

‘Er ist das Vorbild für das, was man so & so nennt.’

Ms-122 75v[3] Von was soll aber der Übergang von “$(x) \bullet \phi x$” auf “ϕa” ein Vorbild sein? Höchstens davon, wie von Zeichen der Art “$(x) \bullet \phi x$” geschlossen werden kann. Das Vorbild dachte ich mir als eine Rechtfertigung, hier aber ist es keine Rechtfertigung. Das Bild $(x) \bullet \phi x :. \phi a$ *rechtfertigt* den Schluß nicht. Wenn wir von einer Rechtfertigung des Schlusses reden wollen, so liegt sie außerhalb dieses Zeichenschemas.

Ms-122 76r[1] Und doch ist etwas daran, daß der math. Beweis einen neuen Begriff schafft. – Jeder Beweis ist gleichsam ein Bekenntnis zu einer bestimmten Zeichenverwendung.

Ms-122 76r[2] Aber wozu ist er ein Bekenntnis? Nur zu *dieser* Verwendung der Übergangsregeln von Zeichen zu Zeichen? Oder (ist er) auch ein Bekenntnis zur Verwendung der primitive propositions in der & der Weise?

Ms-122 76r[3] Könnte ich sagen: ich bekenne mich zu $p \supset p$ als einer Tautologie?

Ms-122 76v[1] Ich nehme $p \supset p$ als Maxime an, etwa des Schließens.

Ms-122 76v[2] Die Idee, der Beweis schaffe einen neuen Begriff könnte man (auch) ungefähr so ausdrücken: Der Beweis ist nicht: seine Grundlagen plus den Schlußregeln; sondern ein *neues* Haus – obgleich ein Beispiel dieses & dieses Stils. Der Beweis ist ein *neues* Paradigma.

Ms-122 76v[4] & 77r[1] Der Begriff, den der Beweis schafft, kann z.B. ein neuer Schlußbegriff sein, ein neuer Begriff des richtigen Schließens. *Warum* ich aber das als *richtiges* Schließen anerkenne, hat seinen Grund außerhalb des Beweises.

Ms-122 77r[2] Der Beweis schafft einen neuen Begriff – indem er ein neues Zeichen schafft, oder ist. Oder – indem er dem Satz, der sein Ergebnis ist, einen neuen Platz gibt. (Denn der Beweis ist nicht eine Bewegung, sondern ein Weg.)

Ms-122 79v[2] **42** Es darf nicht *vorstellbar* sein, daß *diese* Substitution in *diesem* Ausdruck etwas anderes ergibt. Oder: ich muß es für nicht vorstellbar erklären. (Das Ergebnis eines Experiments aber kann man sich *so* & *so* vorstellen.)

Ms-122 79v[3] & 80r[1] Man könnte sich doch aber den Fall vorstellen, daß der Beweis sich dem Ansehen nach ändert – er ist in einen Fels gegraben & man sagt es sei der gleiche, was immer der Anschein sagt.

Ms-122 80r[2] Sagst Du eigentlich etwas anderes als: der Beweis wird als *Beweis* genommen?

Ms-122 80r[3] Der Beweis muß ein anschaulicher Vorgang sein. Oder auch: der Beweis ist der *anschauliche* Vorgang.

Ms-122 80r[4] Nicht etwas hinter dem Beweise, sondern der Beweis beweist.

Ms-122 82v[3] **43** 07.01.1940

Wenn ich sage: “es muß vor allem offenbar sein, daß *diese* Substitution wirklich *diesen* Ausdruck ergibt” – so könnte ich auch sagen: “ich muß es als unzweifelhaft annehmen” – aber dann müssen dafür gute Gründe vorliegen: Z.B., daß die gleiche Substitution so gut wie immer das gleiche Resultat ergibt etc. Und besteht darin nicht eben die Übersehbarkeit?

Ms-122 83r[1] Ich möchte sagen, daß, wo die Übersehbarkeit nicht vorhanden ist, wo also für einen Zweifel Raum ist, ob (hier) wirklich das Resultat dieser Substitution vorliegt, der *Beweis* zerstört ist. Und nicht – in einer dummen & unwichtigen Weise, die mit dem *Wesen* des Beweises nichts zu tun hat.

Ms-122 83r[2] Oder: Die Logik als Grundlage aller Mathematik tut's schon darum nicht, weil die Beweiskraft der logischen Beweise mit ihrer geometrischen Beweiskraft steht & fällt.

Ms-122 83r[3] & 83v[1] D.h.: der logische Beweis, etwa von der Russellschen Art, ist beweiskräftig nur solange, als er auch geometrische Überzeugungskraft besitzt. Und eine 'Abkürzung' eines solchen logischen Beweises kann diese Überzeugungskraft haben & durch sie ein Beweis sein, wenn die (voll) ausgeführte Konstruktion nach R-scher Art es nicht ist.

Ms-122 83v[2]84r[1] Wir neigen dazu, zu glauben, daß der *logische* Beweis eine eigene, absolute Beweiskraft habe, welche von der unbedingten Sicherheit der logischen Grund- & Schlußgesetze herrührt. Während doch die so bewiesenen Sätze nicht sicherer sein können, als es die Richtigkeit der *Anwendung* jener Schlußgesetze ist.

Ms-122 08.01.1940

84r[2]

Die logische Gewißheit der Beweise – will ich sagen – reicht nicht weiter, als ihre geometrische Gewißheit.

Ms-122 84r[4] **44** Wenn nun der Beweis ein Vorbild ist, so muß es darauf ankommen, was als eine richtige Reproduktion des Beweises zu gelten hat.

Ms-122 84r[5] & 84v[1] Käme z.B. im Beweis das Zeichen “||||||||||” vor, so ist es nicht klar, ob als Reproduktion davon nur ‘die gleiche Anzahl’ von Strichen (oder etwa Kreuzchen) gelten soll, oder ebensowohl auch eine andere, wenn nicht gar zu kleine Anzahl. Etc.

Ms-122 84v[2] Es ist doch die Frage, was als Kriterium der Reproduktion des Beweises zu gelten hat, – der Gleichheit von Beweisen. Wie sind sie zu vergleichen, um die Gleichheit festzustellen? Sind sie gleich, wenn sie gleich ausschauen?

Ms-122 84v[3] Ich möchte, sozusagen, zeigen, daß wir den logischen Beweisen in der Mathematik davonlaufen können.

Ms-122 85r[1] & 85v[1] **45** “Durch entsprechende Definitionen können wir “25 × 25 = 625” in der R.schen Logik beweisen.” – Und kann ich die gewöhnliche Beweistechnik durch die R.sche erklären? Aber wie kann man eine Beweistechnik durch eine andere *erklären*? Wie kann eine *das Wesen* einer andern erklären? Denn ist die eine eine ‘Abkürzung’ der anderen, so muß sie doch eine *systematische* Abkürzung sein. Es bedarf doch eines Beweises, daß ich die langen Beweise systematisch abkürzen kann & also wieder ein System von Beweisen erhalte. Die langen Beweise gehen nun (zuerst) immer mit den kurzen einher & geben ihnen gleichsam ihre Sanktion. Aber endlich können sie den kurzen nicht mehr folgen & diese zeigen ihre Selbständigkeit.

Ms-122 85v[2] Das Betrachten der *langen* unübersehbaren logischen Beweise ist nur ein Mittel um zu zeigen, wie diese Technik zusammenbricht & neue Techniken notwendig werden.

Ms-122 86r[2] 46 Ich will sagen: Die Mathematik ist ein *buntes Gemisch* von Beweistechniken. – – Und darauf beruht ihre mannigfache Anwendbarkeit & ihre Wichtigkeit.

Ms-122 86r[3] Und das kommt doch auf das Gleiche hinaus, wie zu sagen: Wer ein System, wie das R.sche, besäße & aus diesem 'durch entsprechende Definitionen' Systeme, wie den Differentialkalkül, erzeugte, der erfände ein neues Stück Mathematik. (Wie ich schon früher gesagt habe.)

Ms-122 86r[4] & 86v[1] Nun, man könnte doch einfach sagen: Wenn ein Mensch das Rechnen im Dezimalsystem erfunden hätte – der hätte doch eine mathematische Erfindung gemacht! – Auch wenn ihm Russell's Principia Mathematica bereits vorgelegen wären. –

Ms-122 86v[2] & 87r[1] Wie ist es, wenn man ein Beweissystem einem anderen koordiniert? Es gibt dann eine Übersetzungsregel mittels derer man die in S1 bewiesenen Sätze in die in S2 bewiesenen übersetzen kann. Man kann sich doch aber denken, daß einige – oder alle – Beweissysteme der heutigen Mathematik auf solche Weise einem System, etwa dem R.schen zugeordnet wären. So daß alle Beweise, wenn auch umständlich, in diesem System ausgeführt werden könnten. So gäbe es dann nur das eine System – & nicht mehr die vielen Systeme? – Aber es muß sich doch also von dem *einen* zeigen lassen, daß es sich in den vielen darstellen läßt. – *Ein* Teil des Systems wird die Eigentümlichkeiten der Trigonometrie besitzen, ein anderer die der Algebra, u.s.w.. Man *kann* also sagen, daß in diesen Teilen verschiedene Techniken verwendet werden.

Ms-122 87r[2] Ich sagte: der, welcher das Rechnen in der Dezimalnotation erfunden hat, habe doch eine mathematische Entdeckung gemacht. Aber hätte er diese Entdeckung nicht in lauter Russellschen Symbolen machen können. Er hätte, sozusagen (wie ich mich seinerzeit ausdrückte) einen neuen *Aspekt* entdeckt.

Ms-122 87v[1] 'Aber die Wahrheit der wahren math. Sätze kann dann doch aus jenen allgemeinen Grundlagen bewiesen werden.' – Mir scheint, hier ist ein Haken. Wann sagen wir, ein math. Satz sei wahr? –

Ms-122 87v[2] Mir scheint, als führten wir, ohne es zu wissen, neue Begriffe in die R.sche Logik ein. − − Z.B., indem wir festsetzen, was für Zeichen der Form (∃x,y,z...) als einander äquivalent & welche nicht als äquivalent gelten sollen. Ist es selbstverständlich, daß "(∃x,y,z)" nicht das gleiche Zeichen ist wie "(∃x,y,z,u)"?

Ms-122 87v[3] & 88r[1] Aber wie ist es – : Wenn ich zuerst 'p∨q' & '~p' einführe & einige Tautologien mit ihnen konstruiere – & dann zeige ich (etwa) die Reihe ~p, ~ ~p, ~ ~ ~p, etc. vor & führe eine Notation ein wie ~1p, 2p.....10p.... . Ich möchte sagen: wir hatten vielleicht an die *Möglichkeit* so einer Reihenordnung ursprünglich gar nicht gedacht & wir haben nun einen neuen Begriff in unsre Rechnung eingeführt. Hier ist ein 'neuer Aspekt'.

Ms-122 88v[2] Es ist ja klar, daß ich den Zahlbegriff, wenn auch in sehr primitiver & unzureichender Weise hätte so einführen können – aber dieses Beispiel zeigt mir alles was ich brauche.

Ms-122 89r[1] In wiefern kann es richtig sein, zu sagen, man hätte mit der Reihe ~p, ~~p, ~~~p, etc. einen neuen Begriff in die Logik eingeführt? – Nun, vor allem könnte man sagen, man habe es mit dem '*etc.*' getan. Denn dieses 'etc.' steht für ein mir neues Gesetz der Zeichenbildung. Dafür charakteristisch, die Tatsache, daß eine *rekursive* Definition zur Erklärung der Dezimalnotation benötigt wird.

Ms-122 89r[2] Eine neue *Technik* wird eingeführt.

Ms-122 89r[3] & 89v[1] Man kann es auch so sagen: Wer den Begriff der R.'schen Beweis- & Satzbildung hat, hat damit *nicht* den Begriff jeder *Reihe*

Ms-122 89v[2] Ich möchte sagen: R.'s Begründung der Mathematik schiebt die Einführung neuer Techniken hinaus, – bis man endlich glaubt, sie sei (gar) nicht mehr nötig.

Ms-122 89v[3] (Es wäre vielleicht so, als philosophierte ich über den Begriff der Längenmessung so lange, bis man vergäße, daß zur Längenmessung die tatsächliche Festsetzung einer Längeneinheit nötig ist.)

Ms-122 90v[2] & 91r[1] **47** 11.01.1940

Kann man nun, was ich sagen will *so* ausdrücken: "Wenn wir von Anfang an gelernt hätten alle Mathematik in R's System zu schreiben, so wäre natürlich mit dem R'schen Kalkül die Differentialrechnung, z.B., noch nicht erfunden. Wer also diese Rechnungsart *im R'schen Kalkül* entdeckte – – –."

Ms-122 91r[2] Angenommen, ich hätte R'sche Beweise der Sätze

'$p \equiv \sim\sim p$' '$\sim p \equiv \sim\sim\sim p$' '$p \equiv \sim\sim\sim\sim p$'

vor mir & fände nun einen abgekürzten Weg, den Satz '$p \equiv \sim^{10} p$'

zu beweisen. Es ist als habe ich eine neue Rechnungsart innerhalb des alten Kalküls gefunden. Worin besteht es, daß sie gefunden wurde?

Ms-122 91r[3] & 91v[1] Sage mir: Habe ich eine neue Rechnungsart eingeführt, wenn ich multiplizieren gelernt hätte & mir nun Multiplikationen mit lauter gleichen Faktoren als ein besonderer Zweig dieser Rechnungen auffallen & ich daher die Notation einführe 'a^n = …' ?

Ms-122 91v[3] & 92r[1] 12.01.1940

Offenbar die bloße 'abgekürzte', oder *andere*, Schreibweise – '16^2' statt '16 × 16' – macht's nicht. Wichtig ist, daß wir jetzt die Faktoren bloß *zählen*. Ist 16^{15} das gleiche wie

16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16 × 16.? Der Beweis, daß 16^{15} = …. ist, besteht nicht einfach darin, daß ich 16 15-mal mit sich selbst multipliziere & daß dabei dies heraus kommt – sondern es muß im Beweis gezeigt sein, daß ich die Zahl *15-mal* zum Faktor setze.

Ms-122 92r[2] & 92v[1] & 93r[1] Wenn ich frage: “Was ist das neue an der ‘neuen Rechnungsart’ des Potenzierens” – so ist das schwer zu sagen. Das Wort ‘neuer Aspekt’ ist vag. Es heißt, wir sehen die Sache jetzt anders an – aber die Frage ist: was ist die wesentliche, die *wichtige*, Äußerung dieses ‘andersAnsehens’? Zuerst will ich sagen: “Es hätte einem nie *auffallen* brauchen, daß in gewissen Produkten alle Faktoren gleich sind” – oder: “‘Produkt lauter gleicher Faktoren’ ist ein neuer Begriff” – oder: “Das Neue besteht darin, daß wir die Rechnungen anders zusammenfassen”. Beim Potenzieren ist es offenbar das Wesentliche, daß wir auf die *Zahl* der Faktoren sehen. Es ist doch nicht gesagt, daß wir auf die Zahl der Faktoren je geachtet haben. Es mag uns zum ersten mal auffallen daß es Produkte mit 2, 3, 4 etc. Faktoren gibt, obwohl wir schon lange solche Produkte ausgerechnet haben. Ein neuer Aspekt – aber wieder: Was ist seine *wichtige* Seite? Wozu benütze ich diesen neuen Aspekt? – Nun vor allem lege ich ihn vielleicht in einer Notation nieder. Ich schreibe also, z.B. statt ‘a × a’ ‘a2’. Dadurch beziehe ich mich auf die Zahlenreihe (spiele auf sie an), was früher nicht geschehen war. Ich stelle also doch eine neue Verbindung her! – Eine Verbindung – zwischen welchen Dingen? Zwischen der Technik des Zählens von Faktoren & der Technik des Multiplizierens.

Ms-122 93v[2] Aber so macht ja jeder Beweis, jede einzelne Rechnung neue Verbindungen!

Ms-122 93v[3] & 94r[1] Aber der *gleiche* Beweis, der zeigt, daß a × a × a × a... = b ist beweist doch auch, daß an=b ist; nur, daß wir den Übergang nach der Definition von 'a^n' machen müssen. Aber dieser Übergang ist gerade das Neue. Aber wenn er nur ein Übergang zu dem alten Beweis ist, wie kann er dann wichtig sein?

Ms-122 94r[2] 'Es ist nur ein andere Schreibweise.' Wo hört es auf – bloß eine andre Schreibweise zu sein?

Ms-122 94r[3] Nicht dort: wo nur die eine Schreibweise, & nicht die andre, so & so verwendet werden kann?

Ms-122 94r[4] & 94v[1] Man könnte es "einen neuen Aspekt finden" nennen wenn Einer statt f(a) schreibt a(f); man könnte sagen: 'Er *sieht* die Funktion als Argument ihres Arguments an'. Oder wenn Einer statt 'a × a' schriebe 'x(a)' könnte man sagen: 'Was man früher als Spezialfall einer Funktion mit zwei Argumentstellen ansah, sieht er als Funktion mit *einer* Argumentstelle an.' Wer das tut, hat gewiß in einem Sinn den Aspekt verändert, er hat z.B. *diesen* Ausdruck mit anderen zusammengestellt, verglichen, mit denen er früher nicht verglichen wurde. – Aber ist das nun eine *wichtige* Aspektänderung? *Nicht*, solange sie nicht gewisse Konsequenzen hat.

Ms-122 94v[2] & 95r[1] Es ist schon wahr, daß ich durch das Hineinbringen des Begriffs der *Zahl* der Negationen von p den Aspekt der logischen Rechnung geändert habe: 'So hab ich es noch nicht angeschaut'– könnte man sagen. Aber wichtig wird diese Änderung erst dadurch, daß sie die Anwendung des Zeichens ändert.

Ms-122 95r[2] 13.01.1940

Einen Fuß als *12 Zoll* auffassen, hieße allerdings den Aspekt des Fußes ändern, aber wichtig würde diese Änderung erst, wenn man nun auch Längen in Zoll *mäße*.

Ms-122 95r[4] & 95v[1] Wer das Zählen der Negationszeichen einführt, führt eine neue Art der Reproduktion der Zeichen ein.

Ms-122 95v[2] Es ist zwar für die Arithmetik, die (doch) von der Gleichheit von Anzahlen spricht, ganz gleichgültig, wie Anzahlengleichheit zweier Klassen festgestellt wird – aber es ist für ihre Schlüsse nicht gleichgültig, wie ihre Zeichen mit einander verglichen werden, nach welcher Methode also, z.B., festgestellt wird, ob die Anzahl der Ziffern zweier Zahlzeichen die gleiche ist.

Ms-122 96r[2] Nicht die Einführung der Zahlzeichen als Abkürzungen ist wichtig, sondern der *Methode* des Zählens.

Ms-122 96r[3] & 96v[1] **48** Ich will die Buntheit der Mathematik erklären.

Ms-122 96v[2] & 97r[1] **49** ‘Ich kann auch in Russell’s System den Beweis führen, daß 127 : 18 = 7˙055 ist.’ Warum nicht. – Aber muß beim R.schen Beweis dasselbe herauskommen, wie bei der gewöhnlichen Division? Die beiden sind freilich durch eine *Rechnung* (durch Übersetzungsregeln etwa) mit einander verbunden; aber ist es nicht doch gewagt die Division in der ‘sekundären’ Technik zu rechnen?

Ms-122 97r[2] Aber wenn nun Einer sagte: “Unsinn – solche Bedenken spielen gar keine Rolle!” –

Ms-122 97r[3] & 97v[1]

14.01.1940

– Aber nicht um die Unsicherheit handelt sich's, denn wir sind (ja) unsrer Schlüsse sicher, sondern darum, ob wir noch (Russellsche) Logik betreiben, wenn wir z.B. *dividieren*. Wie weiß ich, wie ich einen R.schen Beweis als Division anwenden kann? Ich sehe z.B. nach, wie oft eine Länge in einer andern enthalten ist: wie zeigt mir ein R-scher Beweis diese Anwendung? – Z.B., in R.schen Beweisen braucht kein Zählen vorkommen. Aber kann ich nicht doch einen Satz wie '127 : 18 = 7˙05' in R.sche Notation übertragen? – Ja, wenn ich eine gewisse Übertragung *annehme*. Aber ist es denn nicht einfach eine Übertragung nach einer Definition? − −

Ms-122 98v[1]

50 Die Trigonometrie hat ihre Wichtigkeit ursprünglich in ihrer Verbindung mit Längen- & Winkelmessungen: sie ist ein Stück Mathematik, das zur Anwendung auf Längen- & Winkelmessungen eingerichtet ist. Man könnte die Anwendbarkeit auf dieses Gebiet auch einen 'Aspekt' der Trigonometrie nennen.

Ms-122 98v[2]

Wenn ich einen Kreis in 7 gleiche Teile teile & den Kosinus eines dieser Teile durch Messung bestimme – ist das eine Rechnung oder ein Experiment? Wenn eine Rechnung – ist sie denn *übersehbar*?

Ms-122 99r[1]

Ist das Rechnen mit dem Rechenschieber *übersehbar*?

Ms-122 99r[3] Wenn man den Cosinus eines Winkels durch Messung bestimmen muß, ist dann ein Satz der Form cos $\alpha = n$ ein *mathematischer* Satz? Was ist das Kriterium dieser Entscheidung? Sagt der Satz etwas Äußeres über unsre Lineale, u. dergl., aus; oder etwas Internes über unsre Begriffe? – Wie ist das zu entscheiden?

Ms-122 99r[4] & 99v[1] Gehören die Figuren (Illustrationen) in der Trigonometrie zur reinen Mathematik, oder sind sie nur Beispiele einer möglichen *Anwendung*?

Ms-122 99v[4] 51 16.01.1940

Wenn an dem, was ich sagen will, irgend etwas Wahres ist, so muß, *z.B.*, das Rechnen in der Dezimalnotation sein eigenes Leben haben. – Man kann natürlich jede Dezimalzahl darstellen in der Form:

& daher die vier Rechnungsarten in dieser Notation ausführen. Aber das Leben der Dezimalnotation müßte unabhängig sein von dem der Strichnotation.

Ms-122 100r[1]

52 In diesem Zusammenhang fällt mir immer wieder dies ein: Daß man in R.'s Logik zwar einen Satz a : b = c *beweisen* kann, daß sie uns aber einen richtigen Satz dieser Form nicht konstruieren lehrt, d.h. daß sie uns nicht *Dividieren* lehrt. Der Vorgang des Dividierens entspräche z.B. dem eines *systematischen Probierens* R'scher Beweise zu dem Zwecke etwa den Beweis eines Satzes von der Form 37 × 15 = x zu erhalten. 'Aber die Technik eines solchen systematischen Probierens gründet sich doch wieder auf Logik. Man kann doch wieder logisch beweisen, daß diese Technik zum Ziel führen muß.' Es ist also ähnlich, wie wenn wir im Euklid beweisen, daß sich das & das so & so konstruieren läßt.

Ms-122 100v[3] & 101r[1]

53 17.01.1940

Was will Einer zeigen, der zeigen will, daß Mathematik nicht Logik ist? Er will doch etwas sagen wie: – Wenn man Tische, Stühle, Schränke etc. in genug Papier wickelt, werden sie endlich gewiß alle kugelförmig ausschauen.

Ms-122 101r[2]

Er will nicht zeigen, daß es unmöglich ist, zu jedem math. Beweis einen R'schen zu konstruieren, der ihm (irgendwie) 'entspricht'; sondern, daß das Annehmen so einer Entsprechung sich nicht auf Logik stützt.

Ms-122 101r[3] & 101v[1]

18.01.1940

"Aber wir können doch immer auf die primitive logische Methode zurückgehen!" Nun, angenommen, daß wir es können – wie kommt es, daß wir es nicht tun *müssen*? Oder sind wir vorschnell, unvorsichtig, wenn wir es nicht tun? Aber wie gehen wir denn zurück zum primitiven Ausdruck? Gehen wir, z.B., den Weg durch den sekundären Beweis & von seinem Ende aus zurück in's primäre System & sehen zu, wo wir so hingelangen; oder gehen wir in beiden Systemen vor & machen dann die Verbindung der Endpunkte? Und wie wissen wir, daß wir im primären System in beiden Fällen zum gleichen Resultat gelangen? Führt das Vorgehen im sekundären System nicht Überzeugungskraft mit sich?

Ms-122 101v[2] & 102r[1] "Aber wir können uns doch bei jedem Schritt im sekundären System denken, daß er auch im primären gemacht werden könnte!" – Das ist es eben: *wir können uns denken, daß er gemacht werden könnte* – ohne, daß wir ihn machen.

Ms-122 102r[2] Und warum nehmen wir den einen an Stelle des andern an? Aus *logischen* Gründen?

Ms-122 102r[3] "Aber kann man nicht logisch beweisen, daß beide Umwandlungen zum gleichen Resultat gelangen müssen?" – Aber es handelt sich doch hier um Umwandlungen von Zeichen – wie soll denn die Logik hier ein Urteil sprechen?

Ms-122 104v[2] **54** Wie kann der Beweis im Strichsystem beweisen, daß der Beweis im Dezimalsystem ein Beweis ist?

Ms-122 104v[3] Nun, – ist es hier mit dem Beweis im Dezimalsystem nicht so, wie mit einer *Konstruktion* bei Euklid, von der *bewiesen* wird, daß sie wirklich eine Konstruktion dieses & dieses Gebildes ist?

Ms-122 104v[4] & 105r[1]

Darf ich es so sagen: "Die Übertragung des Strichsystems ins Dezimalsystem setzt eine rekursive Definition voraus. Diese Definition führt aber nicht die Abkürzung *eines* Ausdrucks durch einen andern ein. Der Induktive Beweis im Dezimalsystem aber enthält natürlich nicht die Menge jener Zeichen die durch die rekursive Definition in Strichzeichen zu übertragen wären. Dieser allgemeine Beweis kann daher durch die rekursive Definition nicht in einen Beweis des Strichsystems übertragen werden."?

Ms-122 105r[2] & 105v[1]

Der rekursive Beweis führt eine neue Zeichentechnik ein. – Er muß also den Übergang in eine neue 'Geometrie' machen. (Können wir sagen): wir erhalten eine neue Methode ein Zeichen wiederzuerkennen?

Ms-122 105v[3] & 106r[1] & 106v[1]

55 22.01.1940

Der Beweis zeigt uns, was herauskommen *soll*. – Und da jede Reproduktion des Beweises das nämliche demonstrieren muß, so muß sie einerseits das Resultat automatisch reproduzieren, anderseits aber auch den *Zwang* es zu erhalten.

D.h.: wir reproduzieren nicht nur die *Bedingungen*, unter welchen sich dies Resultat einmal ergab (wie beim Experiment), sondern das Resultat selbst. Und doch ist der Beweis kein abgekartetes Spiel, insofern er uns immer wieder muß führen können.

Ms-122 106v[2]

Wir müssen einerseits den Beweis automatisch ganz reproduzieren können, & anderseits muß diese Reproduktion wieder der *Beweis* des Resultats sein.

Ms-122 106v[3] & 107r[1]

"Der Beweis muß übersehbar sein" will unsre Aufmerksamkeit eigentlich auf den Unterschied der Begriffe richten: 'einen Beweis wiederholen', 'ein Experiment wiederholen'. Einen Beweis wiederholen heißt nicht: die Bedingungen reproduzieren unter denen einmal ein bestimmtes Resultat erhalten wurde, sondern es heißt, jede Stufe *& das Resultat* wiederholen. Und obwohl so der Beweis also etwas ist, was sich ganz – automatisch muß reproduzieren lassen, so muß doch jede solche Reproduktion den Beweiszwang enthalten das Resultat anzuerkennen.

Ms-122 109v[2]

56 Wann sagen wir: ein Kalkül 'entspräche' einem andern, sei nur die abgekürzte Form des ersten? – 'Nun, wenn man die Resultate dieses, durch entsprechende Definitionen in die Resultate jenes überführen kann.' Aber ist schon gesagt, wie man mit diesen Definitionen zu rechnen hat? Was macht uns diese Übertragung anerkennen? Ist sie am Ende ein abgekartetes Spiel? Das ist sie, wenn wir entschlossen sind nur die Übertragung anzuerkennen, die zu dem uns gewohnten Resultat führt.

Ms-122 110r[2] & 110v[1]

Warum nennen wir einen Teil des R'schen Kalküls den der Differentialrechnung entsprechenden? – Weil in ihm alle Sätze der Differentialrechnung bewiesen werden. – Aber doch nicht am Ende post hoc. – Aber ist das nicht gleichgültig? Genug, daß man Beweise dieser Sätze im R.schen System finden kann! Aber sind es Beweise dieser Sätze nicht nur dann, wenn ihre Resultate sich nur in *diese* Sätze übersetzen lassen? Aber stimmt das sogar im Fall des Multiplizierens im Strichsystem mit numerierten Strichen?

Ms-122 110v[2] & 111r[1]

57 26.01.1940

Nun muß klar gesagt werden, daß die Rechnungen in der Strichnotation (SN) normalerweise immer mit denen in der Dezimalnotation übereinstimmen werden. Vielleicht werden wir, um sichere Übereinstimmung zu erzielen, an einem Punkt dazu greifen müssen, die Rechnung mit Strichen von *mehreren* Leuten nachrechnen zu lassen. Und das Gleiche werden wir bei Rechnungen mit noch höheren Zahlen im Dezimalsystem vornehmen. Aber das zeigt freilich schon: daß nicht die Beweise im Strichsystem die Beweise im Dezimalsystem zwingend machen.

Ms-122 111r[2] & 111v[1]

“Hätte man aber nun diese nicht, so könnte man jene gebrauchen, um das Gleiche zu beweisen.” – Das Gleiche? Was ist das Gleiche? – Also, der Strichbeweis wird mich vom Gleichen, wenn auch nicht auf die gleiche Weise, überzeugen. – Wie, wenn ich sagte: “Der Platz an den uns ein Beweis führt, kann nicht unabhängig von diesem Beweis bestimmt werden”. – Bin ich durch einen Beweis im Strichsystem davon überzeugt worden, daß der bewiesene Satz die Anwendbarkeit besitzt, die der Beweis im Dezimalsystem ihm gibt – ist, z.B., im Strichsystem gezeigt worden, daß der Satz auch im Dezimalsystem beweisbar ist?

Ms-122 111v[3] & 112r[1]

58 28.01.1940

Es wäre natürlich Unsinn zu sagen, daß *ein* Satz nicht mehrere Beweise haben kann – denn so sagen wir eben. Aber kann man nicht sagen: *Dieser* Beweis zeigt daß … herauskommt, wenn man *das* tut; der andre Beweis zeigt, daß dieser Ausdruck herauskommt, wenn man etwas andres tut. Ist denn z.B. das mathematische Faktum, daß 129 durch 3 teilbar ist, unabhängig davon, daß *dies* Resultat bei *dieser* Rechnung herauskommt? Ich meine: ist das Faktum dieser Teilbarkeit unabhängig von dem *Kalkül* vorhanden, in dem es sich ergibt; oder ist es ein Faktum dieses Kalküls?

Ms-122 112v[1] Denke man sagte: "Durch das Rechnen lernen wir die Eigenschaften der Zahlen kennen." Aber *bestehen* die Eigenschaften der Zahlen außerhalb des Rechnens?

Ms-122 112v[2] 'Zwei Beweise beweisen dasselbe, wenn sie mich von dem gleichen überzeugen.' – Und wann überzeugen sie mich von dem Gleichen? Wie weiß ich, daß sie mich vom Gleichen überzeugen? Natürlich nicht durch Introspektion.

Ms-122 112v[3] Man kann mich auf verschiedenen Wegen dazu bringen, diese Regel anzunehmen.

Ms-117 154[1] **59** "Jeder Beweis zeigt nicht nur den bewiesenen Satz, sondern auch, daß er sich *so* beweisen läßt." – Aber dies letztere läßt sich ja auch anders beweisen. – "Ja aber der Beweis beweist es auf eine bestimmte Weise & beweist, daher, daß es sich auf diese Weise demonstrieren läßt." – Aber auch *das* ließ sich durch einen andern Beweis zeigen. – "Ja aber eben nicht auf diese Weise." – Das heißt doch etwa: Dieser Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein andres Wesen ersetzen läßt; man kann sagen, er könne uns von etwas überzeugen wovon uns nichts anderes überzeugen kann, & man kann ihm daher einen Satz zuordnen, den man keinem andern Beweis zuordnet.

Ms-117 155[2] **60** Aber mache ich nicht einen groben Fehler? Den Sätzen der Arithmetik & den Sätzen der R.schen Logik ist es ja geradezu wesentlich, daß verschiedene Beweise zu ihnen führen. Ja sogar, daß unendlich viele Beweise zu einem jeden von ihnen führen.

Ms-117 155[3] Ist es richtig, zu sagen, daß jeder Beweis uns von etwas überzeugt, wovon kein anderer uns überzeugt? Wäre dann nicht – sozusagen – der bewiesene Satz überflüssig, & der Beweis selbst auch das Bewiesene?

Ms-117 155[4] Überzeugt mich der Beweis nur vom bewiesenen Satz?

Ms-117 155[5] & 156[1] 05.02.1940

Was heißt: "ein Beweis ist ein mathematisches Wesen, das sich durch kein anderes ersetzen läßt"? Es heißt doch, daß jeder besondere Beweis einen Nutzen hat, den kein anderer hat. Man könnte sagen: "– daß jeder Beweis, auch eines schon bewiesenen Satzes, eine Kontribution zur Mathematik ist". Warum aber ist er eine Kontribution, wenn es bloß darauf ankam, den Satz zu beweisen? Nun, man kann sagen: "der neue Beweis zeigt (oder *macht*) einen neuen Zusammenhang". (Aber gibt es dann nicht einen mathematischen Satz, welcher sagt daß dieser Zusammenhang besteht?)

Ms-117 156[3] Was *lernen* wir, wenn wir den neuen Beweis sehen, außer den Satz, den wir ohnehin schon kennen? Lernen wir etwas, was sich nicht in einem mathematischen Satz ausdrückt?

Ms-117 158[3] **61** Inwiefern hängt die Anwendung eines math. Satzes davon ab, was man als seinen Beweis gelten läßt & was nicht?

Ms-117 158[4] & 159[1] Ich kann doch sagen: Wenn der Satz 137 × 373 = 46792 im gewöhnlichen Sinne wahr ist, *dann muß es eine Multiplikationsfigur geben*, an deren Enden die Seiten dieser Gleichung stehen. Und eine Multiplikationsfigur ist ein Muster, das gewissen Regeln genügt. Ich will sagen: Erkennte ich die Multiplikationsfigur nicht als *einen* Beweis des Satzes an, so fiele damit auch die Anwendung des Satzes auf Multiplikationsfiguren fort.

Ms-117 161[4] **62** 11.02.1940

Bedenken wir, daß es nicht genug ist, daß sich zwei Beweise im selben Satzzeichen treffen! Denn wie wissen wir, daß dies Zeichen beidemale dasselbe sagt? *Dies* muß aus anderen Zusammenhängen hervorgehen.

Ms-117 160[7] **63** Die *genaue* Entsprechung eines richtigen (überzeugenden) Übergangs in der Musik & in der Mathematik.

Ms-117 164[3] **64** Denke, ich gäbe jemand die Aufgabe: ‘Finde einen Beweis des Satzes …’ – die Antwort ist doch, daß er mir gewisse Zeichen vorlegt. Nun gut: *welcher* Bedingung müssen diese Zeichen genügen? Sie müssen ein Beweis jenes Satzes sein – aber ist das etwa eine *geometrische* Bedingung? Oder eine psychologische? Manchmal könnte man es eine geometrische Bedingung nennen; dort, wo die Beweismittel schon vorgeschrieben sind & nur noch eine bestimmte Zusammenstellung gesucht wird.

Ms-117 172[2] **65** 20.02.1940

Sind die Sätze der Mathematik anthropologische Sätze, die sagen wie wir Menschen schließen & kalkulieren? – Ist ein Gesetzbuch ein Werk über Anthropologie das uns sagt wie die Leute dieses Volkes einen Dieb etc. behandeln? − − Könnte man sagen: "Der Richter schlägt in einem Buch über Anthropologie nach & verurteilt hierauf den Dieb zu einer Gefängnisstrafe." Nun der Richter *gebraucht* das Gesetzbuch nicht als Handbuch der Anthropologie. (Gespräch mit Sraffa.)

Ms-117 173[2] **66** Die Prophezeiung lautet *nicht*, daß der Mensch, wenn er bei der Transformation dieser Regel folgt *das* herausbringen wird– sondern, daß er, wenn wir *sagen*, er folge der Regel, das herausbringen werde.

Ms-117 173[3] & 174[1] Wie, wenn wir sagten, daß mathematische Sätze, in *diesem* Sinne, Prophezeiungen sind; indem sie voraussagen, was Glieder einer Gesellschaft, die diese Technik gelernt haben, in Übereinstimmung mit den übrigen Gliedern der Gesellschaft herausbringen werden. "25 × 25 = 625" hieße also, daß Menschen wenn sie unsrer Meinung nach die Regeln des Multiplizierens befolgen, bei der Multiplikation 25 × 25 zum Resultat 625 kommen werden. – Daß dies eine richtige Vorhersage ist, ist zweifellos; & auch, daß das Wesen des Rechnens auf solche Vorhersagen gegründet ist. D.h., daß wir etwas nicht 'rechnen' nennen würden, wenn wir so eine Prophezeiung nicht mit Sicherheit machen könnten. Das heißt eigentlich: das Rechnen ist eine Technik. Und was wir gesagt haben, gehört zum Wesen der Technik.

Ms-117 175[3] 67 Zum Rechnen gehört, *wesentlich*, dieser Konsensus, das ist sicher. D.h.: zum Phänomen unseres Rechnens gehört dieser Konsensus.

Ms-117 175[4] In einer **Rechen**technik müssen Prophezeiungen möglich sein. Und das macht die Rechentechnik der Technik eines *Spiels*, wie des Schachs, ähnlich.

Ms-117 176[1] Aber wie ist das mit dem Konsensus – heißt das nicht, daß *ein* Mensch allein nicht rechnen könnte? Nun, *ein* Mensch könnte jedenfalls nicht nur *einmal* in seinem Leben rechnen.

Ms-117 176[2] Man könnte sagen: alle *möglichen* Spielstellungen im Schach können als Sätze aufgefaßt werden, die sagen, sie (selbst) seien *mögliche* Spielstellungen; oder auch als Prophezeiungen: die Menschen werden diese Stellungen durch Züge erreichen können welche sie übereinstimmend für den Regeln gemäß erklären. Eine so *erhaltene* Spielstellung ist dann ein bewiesener Satz dieser Art.

Ms-117 176[3] “Eine Rechnung ist ein Experiment.” – – Eine Rechnung kann ein Experiment sein. Der Lehrer läßt den Schüler eine Rechnung machen, um zu sehen ob er rechnen kann; das ist ein Experiment.

Ms-117 177[1] Wenn in der Früh im Ofen Feuer gemacht wird, ist das ein Experiment? Aber es könnte eins sein. Und so sind auch Schachzüge *nicht* Beweise & Schachstellungen nicht Sätze. Und mathematische Sätze nicht Spielstellungen. Und *so* sind sie auch nicht Prophezeiungen.

Ms-117 178[3] **68** Wenn eine Rechnung ein Experiment ist; was ist dann ein Fehler in der Rechnung? Ein Fehler im Experiment? Nicht doch; ein Fehler im Experiment wäre es gewesen, wenn ich die *Bedingungen* des Experiments nicht eingehalten hätte, wenn ich also jemand etwa bei furchtbarem Lärm hätte rechnen lassen.

Ms-117 178[4] Aber warum soll ich nicht sagen: Ein Rechenfehler ist zwar kein *Fehler* im Experiment aber ein – manchmal erklärliches manchmal nicht erklärliches – *Fehlgehen* des Experiments?

Ms-117 180[3] **69** "Eine Rechnung, z.B. eine Multiplikation, ist ein Experiment: *wir wissen nicht, was herauskommen wird*, & erfahren es nun, wenn die Multiplikation fertig ist." – Gewiß; wir wissen auch nicht, wenn wir spazierengehen, an welchem Punkt wir uns in 5 Minuten befinden werden – aber ist Spazierengehen deshalb ein Experiment? – Ja; aber in der Rechnung wollte ich doch, von vornherein, wissen, was herauskommen werde; *das* war es doch, was mich interessierte. Ich bin doch neugierig auf das Resultat. Aber nicht als auf das, was ich sagen *werde*, sondern, was ich sagen *soll*.

Ms-117 181[3] Aber interessiert Dich nicht eben an dieser Multiplikation, wie die Allgemeinheit der Menschen rechnen wird? Nein – wenigstens für gewöhnlich nicht – wenn ich auch zu einem gemeinsamen Treffpunkt mit eile. Aber die Rechnung zeigt mir doch eben, experimentell, welches dieser Treffpunkt ist. Ich lasse mich, gleichsam, ablaufen, & sehe wo ich hingelange. Und die richtige Multiplikation ist das Bild davon, wie wir alle ablaufen, wenn wir *so* aufgezogen werden.

Ms-117 Die *Erfahrung* lehrt, daß wir Alle diese Rechnung richtig finden.

181[4] Wir lassen uns ablaufen & erhalten das Resultat der Rechnung.
Ms-117 Aber nun – will ich sagen – interessiert uns nicht, daß wir etwa
181[5] & unter diesen & diesen Bedingungen – dies Resultat erzeugt
182[1] haben; uns interessiert das Bild des Ablaufs, aber nicht als das Resultat eines Experiments, sondern als ein *Weg*.

Ms-117 Wir sagen nicht: “also *so* gehen wir!”, sondern: “also *so* geht
182[4] es!”

Ms-117 **70** Unsre Zustimmung läuft gleich ab, – aber wir bedienen
184a[2] uns dieser Gleichheit des Ablaufs nicht bloß, um Zustimmungsabläufe vorauszusagen. Wie wir uns des Satzes “dies Heft ist rot” nicht nur *dazu bedienen* um vorherzusagen, daß die meisten Menschen es ‘rot’ nennen werden.

Ms-117 23.02.1940

184a[3] &

184b[1] “Und das *nennen* wir doch ‘dasselbe’”. Bestünde keine Übereinstimmung in dem, was wir ‘rot’ nennen, etc., etc., so würde die Sprache aufhören. Wie ist es aber bezüglich der Übereinstimmung in dem, was wir “Übereinstimmung” nennen? Wir können das Phänomen einer Sprachverwirrung beschreiben; – aber welches sind für uns die Anzeichen einer Sprachverwirrung? Nicht notwendigerweise Tumult & Verwirrung im Handeln. Dann also, daß ich mich, wenn die Leute sprechen, nicht auskenne; nicht übereinstimmend mit ihnen reagieren kann.

Ms-117 184b[2] ‘Das ist für mich kein Sprachspiel.’ Ich könnte dann aber auch sagen: Sie begleiten zwar ihre Handlungen mit Sprechlauten & ihre Handlungen kann ich nicht ‘verwirrt’ nennen, aber doch haben sie keine *Sprache*. – Vielleicht aber würden ihre Handlungen verwirrt, wenn man sie daran hinderte jene Laute von sich zu geben.

Ms-117 184b[4] 71 Man könnte sagen: ein Beweis dient der *Verständigung*. Ein Experiment setzt sie voraus. Oder auch: Ein math. Beweis formt unsere Sprache.

Ms-117 185[1] Aber es bleibt doch bestehen, daß man mittels eines math. Beweises wissenschaftliche Voraussagen über das Beweisen anderer Menschen machen kann. – Wenn mich Einer fragt: “Was für eine Farbe hat dieses Buch?” & ich antworte: “Es ist grün.” – hätte ich ebensowohl die Antwort geben können: “Die Allgemeinheit der Deutschsprechenden nennt das ‘grün’”? Könnte er darauf nicht fragen: “Und wie nennst *Du* es”? Denn er wollte meine Reaktion hören.

Ms-117 185[2] ‘***Die Grenzen des Empirismus***’

Ms-117 185[3] & 186[1]

72 Wenn ich die Multiplikation rechne, – ist das Resultat: daß die Menschen allgemein damit übereinstimmen werden? Es gibt doch eine Wissenschaft von den konditionierten Rechenreflexen; ist das die Mathematik? Jene Wissenschaft wird sich auf Experimente stützen: & diese Experimente werden *Rechnungen* sein. Aber wie, wenn diese Wissenschaft recht exakt, & am Ende gar eine ‘mathematische’ Wissenschaft würde? Ist das Resultat dieser Experimente nun, daß (die) Menschen in ihren Rechnungen übereinstimmen, oder, daß sie darin übereinstimmen, was sie “übereinstimmen” nennen? Und das geht so weiter.

Ms-117 186[2]

Man könnte sagen: jene Wissenschaft würde nicht funktionieren, wenn wir in Bezug auf die Idee der Übereinstimmung nicht übereinstimmten.

Ms-117 186[3]

Es ist doch klar, daß wir ein mathematisches Werk zum Studium der Anthropologie verwenden können. Aber eines ist dann nicht klar: – ob wir sagen sollen: “diese Schrift zeigt uns wie bei diesem Volk mit Zeichen operiert wurde”, oder ob wir sagen sollen: “diese Schrift zeigt uns, welche Teile der Mathematik dieses Volk beherrscht hat”.

Ms-117 187[4] & 188[1]

73 Kann ich, am Ende einer Multiplikation angelangt, sagen: “Also *damit* stimm’ ich überein! –”? – Aber kann ich es bei einem *Schritt* der Multiplikation sagen? Etwa bei dem Schritt “$2 \times 3 = 6$”? Nicht ebensowenig, wie ich, auf dies Papier sehend, sagen kann: “Also das nenne ich ‘*weiß*’!”?

Ms-117 188[2] Ähnlich scheint mir der Fall zu sein, wenn jemand sagte: “Wenn ich mir ins Gedächtnis rufe, was ich heute getan habe, mache ich ein Experiment (ich lasse mich ablaufen) & die Erinnerung, die dann kommt, dient dazu mir zu zeigen, was Andere, die mich gesehen haben, auf die Frage, was ich getan habe, antworten werden.”

Ms-117 188[3] & 189[1] Was geschähe, wenn es uns öfter so ginge, daß wir eine Rechnung machen & sie als richtig finden; dann rechnen wir sie nach & finden sie stimmt nicht: wir glauben, wir hätten früher etwas übersehen – wenn wir sie wieder nachrechnen scheint uns unsre zweite Rechnung nicht zu stimmen, usf. Sollte ich das nun ein Rechnen nennen, oder nicht? – Er kann jedenfalls nicht die Voraussage auf seine Rechnung bauen, daß er das nächste mal wieder dort landen wird. – Könnte ich aber sagen, er habe diesmal *falsch* gerechnet, weil er das nächste mal nicht wieder so gerechnet hat? Ich könnte sagen: wo *diese* Unsicherheit bestünde gäbe es kein Rechnen.

Ms-117 189[2] Aber ich sage doch anderseits wieder: ‘wie man rechnet– so ist es richtig.’ Es *kann* kein Rechenfehler in 12 × 12 = 144 bestehen. Warum? Dieser Satz ist unter die Regeln aufgenommen. Ist aber ‘12 × 12 = 144’ die Aussage, es sei allen Menschen natürlich 12 × 12 so zu rechnen, daß 144 herauskommt?

Ms-117 189[3] & 190[1] **74** 24.02.1940

Wenn ich eine Rechnung mehrmals nachrechne, um sicher zu sein, daß ich richtig gerechnet habe, & wenn ich sie dann als richtig anerkenne, – habe ich da nicht ein Experiment wiederholt um sicher zu sein, daß ich das nächste mal wieder gleich ablaufen werde? – Aber warum soll mich dreimaliges Nachrechnen davon überzeugen, daß ich das vierte Mal ebenso ablaufen werde. – Ich würde sagen: ich habe nachgerechnet um sicher zu sein, 'daß ich nichts übersehen habe'. Die Gefahr ist hier, glaube ich, eine Rechtfertigung unsres Vorgehens zu geben, wo es eine Rechtfertigung nicht gibt & wir einfach sagen sollten: *so machen wir's*.

Ms-117 190[2] Wenn Einer wiederholt ein Experiment anstellt, 'immer wieder mit dem gleichen Resultat', hat er dann zugleich ein Experiment gemacht, das ihn lehrt, *was* er 'das gleiche Resultat' nennen wird, wie er also das Wort "gleich" gebraucht? Mißt der, der den Tisch mit dem Zollstock mißt, auch den Zollstock? Mißt er dabei den Zollstock, so kann er den Tisch nicht messen.

Ms-117 190[3] & 191[1] Wie, wenn ich sagte: "Wenn Einer den Tisch mit dem Zollstock mißt, so macht er dabei ein Experiment, welches ihn lehrt, was bei der Messung dieses Tisches mit *andern* Zollstaben herauskäme"? Es ist doch gar kein Zweifel, daß man aus der Messung mit *einem* Zollstab voraussagen kann, was die Messung mit andern Zollstäben ergeben wird. Und ferner– könnte man es nicht tun – daß dann unser ganzes System des Messens zusammenfiele. *Kein* Zollstab, könnte man sagen, wäre richtig, wenn sie nicht alle übereinstimmten. – Aber wenn ich das sage, so meine ich nicht, daß sie dann alle *falsch* wären.

Ms-117 192[2] **75** Das Rechnen verlöre seinen Sinn, wenn *Verwirrung* einträte. Wie der Gebrauch der Worte “grün” & “blau” seinen Witz verlöre. Und doch scheint es Unsinn zu sein, zu sagen, – daß ein Rechensatz *sage*, es werde keine Verwirrung eintreten. – Ist die Lösung einfach die, daß der Rechensatz nicht *falsch* werde, sondern nutzlos, wenn Verwirrung einträte? Sowie der Satz dies Zimmer ist 16 Fuß lang dadurch nicht *falsch* würde, daß Verwirrung in den Maßstäben & im Messen einträte. Sein Sinn, nicht seine Wahrheit basiert auf dem ordnungsgemäßen Ablauf der Messungen. (Sei aber hier nicht dogmatisch. Es gibt Übergänge, die die Betrachtung erschweren.)

Ms-117 192[3] & 193[1] Wie, wenn ich sagte: der Rechensatz drückt die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten. – Dann drückt der Gebrauch aller Worte die Zuversicht aus, es werde keine Verwirrung eintreten.

Ms-117 193[3] Man kann aber dennoch nicht sagen, der Gebrauch des Wortes ‘grün’ besage, es werde keine Verwirrung eintreten, – weil dann der Gebrauch des Wortes “Verwirrung” wieder eben dasselbe über *dieses* Wort aussagen müßte.

Ms-117 193[4] & 194[1] Wenn “25 × 25 = 625” die Zuversicht ausdrückt, wir werden uns immer wieder leicht dahin einigen können, daß der Weg, der mit diesem Satz endet, zu nehmen sei – wie drückt dann dieser Satz nicht die andere Zuversicht aus, wir würden uns immer wieder über *seinen* Gebrauch einigen können.

Ms-117 194[2] Wir spielen mit den beiden Sätzen nicht das gleiche Sprachspiel.

Ms-117 194[3] Oder kann man sowohl zuversichtlich sein, man werde dort die gleiche Farbe sehen wie hier – & auch, man werde die Farbe, wenn sie gleich ist, gleich zu benennen geneigt sein?

Ms-117 194[4] Ich will doch sagen: Die Mathematik ist als solche immer Maß & nicht Gemessenes.

Ms-117 195[3] 76 25.02.1940

Der Begriff des Rechnens schließt *Verwirrung* aus. – Wie, wenn Einer beim Rechnen einer Multiplikation zu verschiedenen Zeiten Verschiedenes herausbrächte & dies *sähe*, aber in der Ordnung fände? – Aber dann könnte er doch die Multiplikation nicht zu den Zwecken verwenden, wie wir es tun! – Warum nicht? Und es ist auch nicht gesagt, daß er dabei immer übel führe.

Ms-117 196[2] Alles andere – meinen wir – sei Gefasel. Im Experiment haben wir etwas Greifbares. Es ist beinahe, als sagte man: "Ein Dichter, wenn er dichtet, stellt ein psychologisches Experiment an; nur so ist es zu erklären, daß ein Gedicht Wert haben kann." Man verkennt das Wesen des '*Experiments*', – indem man glaubt, jeder Vorgang, auf dessen Ende wir gespannt sind, sei was wir "Experiment" nennen.

Ms-117 197[1] Es scheint wie Obskurantismus, wenn man sagt, eine Rechnung sei kein Experiment. In gleicher Weise wie auch die Feststellung, die Mathematik *handle* nicht von Zeichen oder Schmerz sei nicht eine Form des Benehmens. Aber nur weil die Leute glauben, man behaupte damit die Existenz eines ungreifbaren, d.i. schattenhaften, Gegenstands neben dem uns Allen greifbaren. Während wir nur auf verschiedene Verwendungsweisen der Worte hinweisen. Es ist beinahe als sagte man: 'blau' müsse einen blauen Gegenstand bezeichnen – – der Zweck des Wortes wäre sonst nicht einzusehen.

Ms-117 204[1] **77** Ich habe ein Spiel erfunden– komme drauf, daß, wer anfängt immer gewinnen muß: Es ist also kein Spiel. Ich ändere es ab; nun ist es in Ordnung.

Ms-117 204[2] Habe ich ein Experiment gemacht, & war das Ergebnis, daß, wer anfängt immer gewinnt? oder: daß wir so zu spielen geneigt sind, daß dies geschieht? Nein. – Aber das Resultat hattest Du Dir doch nicht erwartet! Freilich nicht; aber das macht das Spiel nicht zum Experiment.

Ms-117 204[3] & 205[1] Was heißt es aber: Nicht wissen, *woran es liegt*, daß es immer so ausgehen muß? Nun, es liegt an den Regeln. – Ich will wissen, wie ich die Regeln abändern muß um zu einem richtigen Spiel zu gelangen. – Aber Du kannst sie ja z.B. *ganz* abändern –also statt Deinem, ein gänzlich anderes Spiel angeben. – Aber das will ich nicht. Ich will die Regeln im großen ganzen beibehalten & nur einen Fehler ausmerzen. – Aber das ist vag. Es ist nun einfach *nicht klar*, was als dieser Fehler zu betrachten ist.

Ms-117 205[2] Es ist beinahe, wie wenn man sagt: Was ist der Fehler in diesem Musikstück? es klingt nicht gut in den Instrumenten. – Nun, den Fehler *muß* man nicht in der Instrumentation suchen; man *könnte* ihn in den Themen suchen.

Ms-117 205[3] Nehmen wir aber an, das Spiel sei so, daß, wer anfängt immer durch einen bestimmten, einfachen, Trick gewinnen kann. Darauf aber sei man nicht gekommen; – es ist also ein Spiel. Nun macht uns jemand darauf aufmerksam; und es hört auf ein Spiel zu sein.

Ms-117 205[4] Wie kann ich dies wenden, daß es mir klar wird? – Ich will nämlich sagen: "& es hört auf ein Spiel zu sein"– nicht: "& wir sehen nun, daß es kein Spiel war."

Ms-117 205[5] & 206[1] Das heißt doch, ich will sagen, man kann es auch so auffassen: daß der Andre uns nicht auf etwas *aufmerksam gemacht* hat; sondern daß er uns statt unseres, ein andres Spiel gelehrt hat. – Aber wie konnte durch das neue das alte obsolet werden? – Wir sehen nun etwas anderes, & können nicht mehr naiv weiterspielen. Das Spiel bestand einerseits in unsern Handlungen (Spielhandlungen) auf dem Brett; und diese Spielhandlungen könnte ich jetzt so gut ausführen, als früher. Aber anderseits war dem Spiel doch wesentlich, daß ich blind versuchte zu gewinnen; & das kann ich jetzt nicht mehr.

Ms-117 206[2] **78** Nehmen wir an: die Menschen haben ursprünglich die 4 species in gewöhnlicher Weise gepflogen. Dann fingen sie an mit Klammerausdrücken zu rechnen, & auch mit solchen von der Form (a − a). Sie bemerkten nun, daß, z.B., Multiplikationen vieldeutig wurden. Mußte sie das in Verwirrung stürzen? Mußten sie sagen: "Nun scheint der Grund der Arithmetik zu wanken"?

Ms-117 206[3] & 207[1] Und wenn sie nun einen Beweis der Widerspruchsfreiheit fordern, weil sie sonst bei jedem Schritt in Gefahr wären in den Sumpf zu fallen – was fordern sie da? Nun, sie fordern eine *Ordnung*. Aber war früher *keine* Ordnung? – Nun, sie fordern eine Ordnung, die sie jetzt beruhigt. – Aber sind sie also wie (kleine) Kinder & sollen nur eingelullt werden?

Ms-117 207[2] Nun, die Multiplikation würde doch durch ihre Vieldeutigkeit praktisch unbrauchbar – d.h.: für die früheren normalen Zwecke. Voraussagen, die wir auf Multiplikationen basiert hätten, träfen nicht mehr ein. (Wenn ich voraussagen wollte, wie lang eine Reihe von Soldaten ist, die aus einem Carré von 50 × 50 gebildet werden kann, käme ich immer wieder zu falschen Resultaten.) Also ist diese Rechnungsart falsch? – Nun, sie ist für *diese* Zwecke unbrauchbar. (Vielleicht für andre brauchbar.) Ist es nicht, wie wenn ich einmal statt zu multiplizieren dividierte? (Wie dies wirklich vorkommen kann.)

Ms-117 207[3] Was heißt das: "Du mußt hier *multiplizieren*, nicht dividieren!" –

Ms-117 207[4] & 208[1] Ist nun die gewöhnliche Multiplikation ein *rechtes* Spiel; ist es *unmöglich* auszugleiten? Und ist die Rechnung mit (a − a) kein rechtes Spiel – ist es unmöglich *nicht* auszugleiten?

Ms-117 208[2] (*Beschreiben*, nicht Erklären, ist, was wir wollen!)

Ms-117 208[3] Nun, wie ist das, wenn wir uns in unserm Kalkül nicht auskennen?

Ms-117 208[4] Wir gingen schlafwandelnd den rechten Weg. – Aber wenn wir auch jetzt sagen: “jetzt sind wir wach”, – können wir sicher sein, daß wir nicht eines Tages aufwachen werden? (Und dann sagen: wir hatten also wieder geschlafen. –)

Ms-117 208[5] Können wir sicher sein, daß es nicht *jetzt* Abgründe gibt, die wir nicht sehen? Wie aber, wenn ich sagte: Die Abgründe, in einem Kalkül, sind nicht da, wenn ich sie nicht sehe!

Ms-117 208[6] Irrt uns jetzt *kein* Teufelchen? Nun wenn es uns irrt, so macht’s nichts. Was ich nicht weiß, macht mich nicht heiß.

Ms-117 209[1] Nehmen wir an: Früher teilte ich manchmal so durch 3:

manchmal so:

und merkte es nicht. – Dann macht mich jemand darauf aufmerksam. Auf einen Fehler? Ist es unbedingt ein Fehler? Und unter welchen Umständen nennen wir es so?

Ms-117 222[2] 79 $f(f)=\Phi(f)\text{Def.}\Phi(\Phi)=\therefore\Phi(\Phi)\}$

Die Sätze “Φ(Φ)” & “~Φ(Φ)” scheinen uns einmal das Gleiche & einmal Entgegengesetztes zu sagen. (*Jenachdem wir ihn* *ansehen* scheint der Satz “Φ(Φ)” einmal zu sagen, ~ Φ(Φ), einmal das Gegenteil davon. Und zwar sehen wir ihn einmal an als das Substitutionsprodukt

Φ(f) | f Φ

ein andermal als:

f(f) | f Φ

Ms-117 222[3] & 223[1] Wir möchten sagen: ‘heteronom ist nicht heteronom; also kann man es, nach der Definition, “heteronom” nennen.’ Und klingt ganz richtig, geht [English?] ganz glatt, & es braucht uns der Widerspruch gar nicht auffallen. Werden wir auf den Widerspruch aufmerksam, so möchten wir zuerst sagen, daß wir mit der Aussage, ξ ist heteronom, in den beiden Fällen nicht dasselbe meinen. Einmal sei es die unabgekürzte Aussage das andremal die nach der Definition abgekürzte. Wir möchten uns dann aus der Sache ziehen, indem wir sagen: “~Φ(Φ)=Φ1(Φ)”. ← Aber warum sollen wir uns so belügen? Es führen hier wirklich zwei *entgegengesetzte* Wege – zu dem *Gleichen*. Oder auch: – *es ist ebenso natürlich*, in diesem Falle ‘~Φ(Φ)’ zu sagen, wie ‘Φ(Φ)’. Es ist, der Regel gemäß, ein ebenso natürlicher Ausdruck, zu sagen C liege vom Punkte A rechts, wie, es liege links.

Dieser Regel gemäß – welche sagt, ein Ort liege in der Richtung des Pfeils, wenn die Straße, die in dieser Richtung beginnt, zu ihm führt.

Ms-117 223[2] Sehen wir's vom Standpunkt der Sprachspiele an. – Wir haben ursprünglich das Spiel nur mit geraden Straßen gespielt. – – –

Ms-117 227[2] & 228[1] **80** 03.03.1940

Könnte man sich etwa denken, daß, wo ich *blau* sehe, das bedeutet, daß der Gegenstand, den ich sehe, *nicht* blau ist – daß die Farbe die mir erscheint immer als die gilt, die *ausgeschlossen* ist. Ich könnte z.B. glauben, daß Gott mir immer eine Farbe zeigt, um zu sagen: Die *nicht*. Oder geht es so: Die Farbe, die ich sehe, sage mir bloß, daß diese Farbe in der Beschreibung des Gegenstands eine Rolle spielt. Sie entspricht nicht einem Satz, sondern nur dem Wort "*blau*". Und die Beschreibung des Gegenstands kann also ebensogut heißen: "er ist blau", als auch "er ist nicht blau". Man sagt dann: das Auge zeigt mir nur Bläue, aber nicht die Rolle dieser Bläue. – Wir vergleichen das Sehen der Farbe mit dem Hören des Wortes "blau", wenn wir das *Übrige* des Satzes nicht gehört haben.

Ms-117 228[2] Ich möchte zeigen, daß man dahin geführt werden könnte, daß etwas blau ist, mit den Worten zu beschreiben, es sei blau & auch, es sei nicht blau. Daß wir also, unter der Hand, die Projektionsmethode so verschieben könnten, daß "p" & "~p" den gleichen Sinn erhalten. Wodurch sie ihn verlieren, wenn ich nicht etwas neues als Negation einführe.

Ms-117 228[3] & 229[1] Ein Sprachspiel kann nun durch einen Widerspruch seinen *Sinn* verlieren, den Charakter des Sprachspiels. Und hier ist es wichtig zu sagen, daß dieser Charakter nicht dadurch beschrieben ist, daß man sagt, die Laute müssen eine gewisse *Wirkung* haben. Denn das Sprachspiel (1) würde den Charakter des Sprachspiels verlieren, wenn statt der 5 Befehle immer wieder andere Laute vom Bauenden ausgestoßen würden; auch wenn etwa physiologisch gezeigt werden könnte, daß immer wieder diese Laute es seien, die den Helfer dazu bewegen die Bausteine zu bringen, die er bringt.

Ms-117 229[2] Auch hier könnte man sagen, daß freilich die Betrachtung der Sprachspiele ihre Wichtigkeit darin hat, daß Sprachspiele (tatsächlich) (immer wieder) funktionieren. Daß also ihre Wichtigkeit darin liegt, daß die Menschen sich zu einer solchen Reaktion auf Laute abrichten lassen.

Ms-117 229[3] Damit hängt, scheint mir, die Frage zusammen, ob eine Rechnung ein Experiment ist zum Zweck Rechnungsabläufe vorauszusagen. Denn wie, wenn man eine Rechnung ausführte & – richtig – voraussagte, man werde das nächste mal anders rechnen, da ja die Umstände sich das nächste Mal schon dadurch geändert haben, daß man die Rechnung nun schon *so & so* oft mal gemacht hat.

Ms-117 229[4] & 230[1] Das Rechnen ist ein Phänomen, das wir vom Rechnen her kennen. Wie die Sprache ein Phänomen, das wir von unserer Sprache her kennen.

Ms-117 230[2] & 231[1] Kann man sagen: 'Der Widerspruch ist unschädlich, wenn er abgekapselt werden kann'? Was aber hindert uns, ihn abzukapseln? Daß wir uns im Kalkül nicht auskennen. *Das* also ist der Schaden. Und das ist es, was man meint, wenn man sagt: der Widerspruch zeige an, daß etwas in unserm Kalkül nicht in Ordnung sei. Er sei bloß das *Symptom* einer Krankheit des ganzen Körpers. Aber der Körper ist nur krank, wenn wir uns nicht auskennen. Der Kalkül hat eine heimliche Krankheit, heißt: was wir vor uns haben, ist, wie es ist, kein Kalkül, & *wir kennen uns nicht aus – d.h.*, wir können keinen Kalkül angeben, der diesem Kalkül-Ähnlichen 'im Wesentlichen' entspricht & nur das Falsche in ihm ausschließt.

Ms-117 231[2] Aber wie ist es möglich, sich in einem Kalkül nicht auszukennen, liegt er denn nicht offen vor uns?! Denken wir uns den Fregeschen Kalkül mitsamt dem Widerspruch in ihm gelehrt. Nicht aber, indem man den Widerspruch als etwas Krankhaftes betrachtet. Er ist vielmehr ein anerkannter Teil des Kalküls, es wird mit ihm gerechnet. (Die Rechnungen dienen nicht dem gewöhnlichen Zweck logischer Rechnungen.) – Nun wird die Aufgabe gestellt, diesen Kalkül, von dem der Widerspruch ein durchaus wohlanständiger Teil ist, in einen andern umzuwandeln, in dem es diesen Widerspruch nicht geben soll, da man den Kalkül nun zu Zwecken verwenden will, die einen Widerspruch unerwünscht machen. – Was ist das für eine Aufgabe? Und was ist das für ein Unvermögen, wenn wir sagen: 'wir haben einen Kalkül, der dieser Bedingung entspricht, noch nicht gefunden'?

Ms-117 231[3] & 232[1] Mit: “ich kenne mich in dem Kalkül nicht aus” – meine ich nicht einen seelischen Zustand, sondern ein Unvermögen etwas zu *tun*.

Ms-117 232[2] Es ist oft zur Klärung eines philosophischen Problems sehr nützlich, sich die historische Entwicklung, in der Mathematik z.B., ganz anders vorzustellen, als sie tatsächlich war. Wäre sie anders gewesen, so käme oft niemand auf die Idee, zu sagen, was man tatsächlich sagt.

Ms-117 232[3] Ich möchte etwas fragen, wie: “Gehst Du bei Deinem Kalkül auf Nützlichkeit aus? – dann erhältst Du auch keinen Widerspruch. Und wenn Du nicht auf Nützlichkeit ausgehst – dann macht es schließlich nichts wenn Du einen erhältst.”

Ms-117 233[1] 81 05.03.1940

Unsre Aufgabe ist es nicht, Kalküle zu finden, sondern den *gegenwärtigen* Zustand zu beschreiben.

Ms-117 233[2] Die Idee des Prädikats, das von sich selber gilt, etc., stützte sich freilich auf *Beispiele* – aber diese Beispiele waren ja *Dummheiten*, sie waren ja gar nicht ausgedacht. Aber das sagt nicht, daß solche Prädikate nicht verwendet werden könnten & daß dann nicht der Widerspruch seine Verwendung hätte! Ich meine, wenn man sein Augenmerk wirklich auf die Verwendung richtet, so kommt man gar nicht auf die Idee 'f(f)' zu schreiben. Anderseits kann man, wenn man die Zeichen im Kalkül, sozusagen, *voraussetzungslos* gebraucht, auch 'f(f)' schreiben, & muß dann die Konsequenzen ziehen & darf nicht vergessen, daß man von einer eventuellen praktischen Verwendung dieses Kalküls noch keine *Ahnung* hat.

Ms-117 233[3] & 234[1] Ist die Frage die: "Wo haben wir das Gebiet der Brauchbarkeit verlassen?"? –

Ms-117 234[2] Wäre es denn nicht möglich, daß wir einen Widerspruch hervorbringen *wollten*? Daß wir – mit dem Stolz auf eine mathematische Entdeckung – sagten: "Sieh, so erzeugen wir einen Widerspruch". Wäre es nicht möglich, daß, z.B., viele Leute versucht hätten, einen Widerspruch im Gebiet der Logik zu erzeugen, & daß es dann endlich *einem* gelungen wäre? Aber *warum* hätten Leute *das* versuchen sollen? Nun, ich kann vielleicht jetzt nicht den plausibelsten Zweck angeben. Aber warum nicht *z.B.*, um zu zeigen, daß alles auf dieser Welt ungewiß sei?

Ms-117 234[3] Diese Leute würden dann Ausdrücke von der Form f(f) zwar nie wirklich verwenden, wären aber doch froh, daß sie in der Nachbarschaft eines Widerspruches lebten.

Ms-117 234[4] & 235[1] "Sehe ich eine *Ordnung*, die mich verhindert, unversehens zu einem Widerspruch zu kommen?" Das ist so, wie wenn ich sage: Zeige mir eine Ordnung in meiner Technik, die mich überzeugt, daß ich auf diese Weise nicht einmal zu einer Zahl kommen kann, die kleiner als jene Zahl ist. Ich zeige ihm dann etwa einen Rekursionsbeweis.

Ms-117 235[2] Ist es aber falsch, zu sagen: "Nun, ich gehe meinen Weg weiter. *Sehe* ich einen Widerspruch, so ist es Zeit, etwas zu machen." – Heißt das: nicht wirklich rechnen? Warum soll das *nicht* Kalkulieren sein?! Ich gehe ruhig diesen Weg weiter; sollte ich zu einem Abgrund kommen, so werde ich versuchen, umzukehren. Ist das nicht 'gegangen'?

Ms-117 235[3] & 236[1] Denken wir uns folgenden Fall: Die Leute eines gewissen Stammes können nur mündlich rechnen. Sie kennen die Schrift noch nicht. Sie lehren ihre Kinder im Dezimalsystem zählen. Es kommen bei ihnen sehr häufig Fehler im Zählen vor, Ziffern werden wiederholt, oder ausgelassen, ohne daß sie es merken. Ein Reisender aber nimmt ihr Zählen phonographisch auf. Er lehrt sie die Schrift & schriftliches Rechnen, & zeigt ihnen dann wie oft sie sich beim bloß mündlichen Rechnen verrechnen. – Müssen diese Leute nun zugeben, sie hätten früher eigentlich nicht gerechnet? Sie wären nur herumgetappt, während sie jetzt gehen? Könnten sie nicht vielleicht sogar sagen: früher seien ihre Sachen besser gegangen, ihre Intuition sei nicht durch tote Mittel gehindert gewesen. Man könne den Geist nicht mit Maschinen fassen. Sie sagen etwa: "Wenn wir damals, wie Deine Maschine behauptet, eine Ziffer wiederholt haben, so wird es schon so recht gewesen sein."

Ms-117 236[2] & 237[1] Wir vertrauen, etwa, 'mechanischen' Mitteln des Rechnens oder Zählens mehr als unserm Gedächtnisse. Warum? – Muß das so sein? Ich mag mich verzählt haben, die Maschine, von uns einmal so & so konstruiert, kann sich nicht verzählt haben. Muß ich diesen Standpunkt einnehmen? – "Nun, Erfahrung hat uns (eben) gelehrt, daß das Rechnen mit der Maschine verläßlicher ist, als das mit dem Gedächtnisse. Sie hat uns gelehrt, daß unser Leben glatter geht, wenn wir mit Maschinen rechnen." Aber muß das Glatte unbedingt unser Ideal sein (muß es unser Ideal sein daß alles in Cellophan gewickelt sei)? Könnte ich nicht auch dem Gedächtnis trauen & der Maschine nicht trauen? Und könnte ich nicht der *Erfahrung* mißtrauen, die mir 'vorspiegelt', die Maschine sei verläßlicher?

Ms-117 239[3] & 240[1] **82** Mein Ziel ist mir unklar: Das Ziel dieser Bemerkungen (ist mir unklar). Denn ich kann mich doch *nach* dem Beweis der Widerspruchsfreiheit dort auskennen, wo ich mich vor dem Beweis nicht ausgekannt habe. So wie ich vor dem Beweis der zeigt, daß nur *diese* regelmäßigen n-Ecke mit Lineal & Zirkel konstruierbar sind, aufs Geratewohl solche Vielecke zu konstruieren versuchte, & es danach aufgab. Vorher war ich nicht sicher, daß unter den Arten des Multiplizierens, die *dieser* Beschreibung entsprechen, keine ist, die ein anderes Resultat, als das anerkannte, liefert. Nehmen wir aber an, meine Unsicherheit sei eine solche, die erst in einer gewissen Entfernung von den normalen Arten des Rechnens anfing; & nehmen wir an, wir sagten: Da schadet sie nichts, denn rechne ich auf sehr abnormale Weise, so muß ich mir eben alles noch einmal überlegen. Wäre das nicht ganz in Ordnung?

Ms-117 240[2] Ich will doch fragen: *Muß* ein Beweis der Widerspruchsfreiheit (oder Eindeutigkeit) mir (unbedingt eine) größere Sicherheit geben, als ich ohne ihn habe? Und, wenn ich wirklich auf Abenteuer ausgehe, *kann* ich dann nicht auch auf solche ausgehen, in denen dieser Beweis mir keine Sicherheit mehr bietet?

Ms-117 240[3] & 241[1] Mein Ziel ist, die *Einstellung* zum Widerspruch & zum Beweis der Widerspruchsfreiheit zu ändern. (*Nicht*, zu zeigen, daß dieser Beweis nur (etwas) Unwichtiges zeigt. Wie *könnte* das auch so sein!)

Ms-117 241[2] 08.03.1940

Wäre es mir, z.B., daran gelegen, Widersprüche, etwa zu ästhetischen Zwecken zu erzeugen, so würde ich nun den Induktionsbeweis (der Widerspruchsfreiheit) unbedenklich annehmen & sagen: es ist hoffnungslos, in diesem Kalkül einen Widerspruch erzeugen zu wollen; der Beweis zeigt Dir, daß es nicht geht. (Beweis in der Harmonielehre.) – – –

Ms-117 242[5] & 243[1] 83 Es ist ein guter Ausdruck, zu sagen: "dieser Kalkül kennt diese Ordnung (diese Methode) nicht, dieser Kalkül kennt sie." Wie, wenn man sagte: "ein Kalkül, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kalkül"? (Ein Kanzleibetrieb, der diese Ordnung nicht kennt, ist eigentlich kein Kanzleibetrieb.)

Ms-117 243[2] Die Unordnung – möchte ich sagen – wird zu praktischen, nicht zu theoretischen Zwecken vermieden.

Ms-117 243[3] Eine Ordnung wird eingeführt, weil man ohne sie üble Erfahrungen gemacht hat – oder auch, sie wird eingeführt wie die Stromlinienform bei Kinderwagen & Lampen weil sie sich etwa irgendwo anders bewährt hat, & so der Stil oder, die Mode geworden ist.

Ms-117 243[4] Der Mißbrauch der Idee der *mechanischen* Sicherung gegen den Widerspruch. Wie aber, wenn die Teile des Mechanismus mit einander verschmelzen, brechen oder sich biegen?

Ms-117 243[5] 84 09.03.1940

'Der Beweis der Widerspruchsfreiheit erst zeigt mir, daß ich mich dem Kalkül anvertrauen kann.'

Ms-117 244[1] Was ist das für ein Satz: du kannst Dich dem Kalkül erst *dann* anvertrauen? Wenn Du Dich ihm aber nun *doch* anvertraust! – Welche Art von Fehler hast Du begangen?

Ms-117 244[2] & 245[1]

Ich mache Ordnung; ich sage: ‘es sind nur *diese* Möglichkeiten: …’. Es ist so, wie wenn ich die Zahl der möglichen Permutationen der Elemente A, B, C bestimme: ehe die Ordnung da war, hatte ich etwa nur einen ganz nebelhaften Begriff von der Menge der Möglichkeiten. Die Ordnung ist ein Mittel, keine Permutation zu übersehen, keine zu wiederholen. Es ist nun ganz sicher, daß ich nichts übersehen habe. – Aber so sicher, daß ich die ewige Seligkeit des Kalküls an diese Sicherheit hängen könnte? Ist nun sicher, daß Leute nie werden anders rechnen wollen? Daß Leute unsern Kalkül nie so ansehen werden, wie wir das Zählen der Eingeborenen, deren Zahlen (nur) bis fünf reichen? – daß wir die Wirklichkeit nie *anders* werden betrachten wollen? [Lessingisch] Aber *das* ist gar nicht die Sicherheit, die uns diese Ordnung geben soll. Nicht die ewige Richtigkeit des Kalküls soll gesichert werden.

Ms-117 245[2]

‘Diese Möglichkeiten *meinst* Du doch! – oder meinst Du andre?’

Ms-117 246[1]

Die Ordnung überzeugt mich, daß ich mit diesen 8 Möglichkeiten keine übersehen habe. Aber überzeugt sie mich auch davon, daß nichts meine gegenwärtige Auffassung solcher Möglichkeiten wird umstoßen können?

Ms-117 246[2]

85 10.03.1940

Könnte ich mir denken, daß man sich von einer Möglichkeit der 7-Ecks-Konstruktion ebenso fürchtete, wie vor der Konstruktion eines Widerspruchs, & daß der Beweis daß die 7-Ecks-Konstruktion unmöglich ist eine beruhigende Wirkung hätte, wie der Beweis der Widerspruchsfreiheit?

Ms-117 246[3] & 247[1] Wie kommt es denn, daß wir überhaupt versucht sind (oder doch in der Nähe davon) in $(3 - 3) \bullet 2 = (3 - 3) \bullet 5$ durch $(3 - 3)$ zu kürzen? Wie kommt es, daß dieser Schritt nach den Regeln plausibel erscheint, & wie kommt es, daß er dann dennoch unbrauchbar ist? Wenn man diese Situation beschreiben will, ist es ungeheuer leicht, in der Beschreibung einen Fehler zu machen. (Sie ist also sehr schwer zu beschreiben.) Die Beschreibungen, die uns sogleich in den Mund kommen sind (alle) irreleitend – so ist unsre Sprache eingerichtet.

Ms-117 247[2] Man wird dabei auch immer vom Beschreiben in's Erklären fallen.

Ms-117 247[3] & 248[1] & 249[1]

Es war, oder scheint *ungefähr* so: Wir haben einen Kalkül, sagen wir, mit Kugeln einer Rechenmaschine; ersetzen den durch einen Kalkül mit Schriftzeichen; dieser Kalkül legt uns eine Ausdehnung der Rechnungsweise nahe, die der erste Kalkül uns nicht nahegelegt hat – oder vielleicht besser: der zweite Kalkül *verwischt* einen Unterschied, der im ersten nicht zu übersehen war. Wenn es nun die Pointe des ersten Kalküls ist, daß dieser Unterschied gemacht werde & er im zweiten nicht gemacht wird so hat dieser damit seine Brauchbarkeit als Ersatz des ersten verloren. Und nun könnte das Problem entstehen – so scheint es –: *wo* haben wir uns von dem ursprünglichen Kalkül entfernt, welche Grenzen in dem neuen entsprechen den natürlichen Grenzen des alten? Ich habe ein System von Regeln eines Kalküls, die *beiläufig* nach einem andern Kalkül gemodelt waren. Ich habe mir ihn zum Vorbild genommen. Bin aber über ihn hinausgegangen. Dies war sogar ein Vorzug; aber nun wurde der neue Kalkül an gewissen Stellen (zum mindesten für die alten Zwecke) unbrauchbar. Ich suche ihn daher abzuändern: d.h., durch einen *einigermaßen* anderen zu ersetzen. Und zwar durch einen, der die Vorteile des neuen ohne die Nachteile hat. Aber ist das eine klar *bestimmte* Aufgabe? Gibt es – könnte man auch fragen – *den richtigen* logischen Kalkül, nur ohne die Widersprüche? Könnte man z.B. sagen, daß R's Theory of Types zwar den Widerspruch vermeidet, daß aber R's Kalkül doch nicht *der* allgemeine logische Kalkül ist, sondern etwa ein künstlich eingeschränkter, verstümmelter? Könnte man sagen, daß der *reine*, *allgemeine* logische Kalkül erst gefunden werden muß??

Ms-117 249[2] & 250[1]

Ich spielte ein Spiel & richtete mich dabei nach gewissen Regeln: aber *wie* ich mich nach ihnen richtete das hing von ⋎ Umständen ab & diese Abhängigkeit war nicht schwarz auf weiß niedergelegt. (Dies ist eine einigermaßen irreführende Darstellung.) Nun wollte ich dies Spiel so spielen, daß ich mich, ‘mechanisch’, nach Regeln richtete & ich ‘formalisierte’ das Spiel. Dabei aber kam ich an Stellen, wo das Spiel *jeden* Witz verlor; diese wollte ich daher ‘mechanisch’ vermeiden. – Die Formalisierung der Logik war nicht zur Zufriedenheit gelungen. Aber wozu hatte man sie überhaupt versucht? (Wozu war sie nütze?) Entsprang diese Idee nicht einer irrigen Auffassung?

Ms-117 250[2] & 251[1]

Die Frage “Wozu war sie nütze?” war eine durchaus *wesentliche* Frage. Denn der Kalkül war nicht für einen praktischen Zweck erfunden worden, sondern dazu, ‘die Arithmetik zu begründen’. Aber wer sagt, daß die Arithmetik Logik ist; oder was man mit der Logik tun muß, um sie, in irgend einem Sinne, zum Unterbau der Arithmetik zu machen? Wenn wir etwa von ästhetischen Überlegungen dazu geführt worden wären, dies zu versuchen, wer sagt, daß es uns gelingen kann? (Wer sagt, daß sich dieses englische Gedicht zu unsrer Zufriedenheit ins Deutsche übersetzen läßt?!) (*Wenn* es auch klar ist; daß es zu jedem englischen Satz, in *einem* Sinne, eine Übersetzung ins Deutsche gibt.)

Ms-117 251[3]

Die Philosophische Unbefriedigung verschwindet dadurch, daß wir *mehr* sehen.

Ms-117 251[4] Dadurch, daß ich das Kürzen durch (3 − 3) gestatte, verliert das Rechnen seinen Witz. Aber wie, wenn ich z.B. ein neues Gleichheitszeichen einführte, das ausdrücken sollte: ‘gleich, nach *dieser* Operation’? Hätte es aber einen Sinn zu sagen: “Gewonnen in *dem* Sinne”, wenn in diesem Sinne *jedes* Spiel von mir gewonnen wäre?

Ms-117 251[5] & 252[1] Der Kalkül verleitete mich an gewissen Stellen zur Aufhebung seiner selbst. Ich will nun einen Kalkül, der dies nicht tut, & schließe diese Stellen aus. – Heißt das nun aber, daß jeder Kalkül, in dem eine solche Ausschließung nicht erfolgt ist, ein unsicherer ist? ‘Nun, die Entdeckung dieser Stellen war mir eine Warnung’. – Aber hast Du diese ‘Warnung’ nicht *mißverstanden*?!

Ms-117 252[2] **86** 11.03.1940

Kann man beweisen, daß man nichts übersehen hat? – Gewiß. Und muß man nicht vielleicht später zugeben: “Ja, ich habe etwas übersehen; aber *nicht* in dem Feld, wofür mein Beweis gegolten hat”?

Ms-117 252[3] & 253[1] Der Beweis der Widerspruchsfreiheit muß uns Grund für eine Voraussagung geben; & das ist sein *praktischer Zweck*. Das heißt nicht, daß dieser Beweis ein Beweis aus der Physik unsrer Rechentechnik ist – also ein Beweis der angewandten Mathematik – aber daß die uns nächstliegende Anwendung, & die, um derentwillen uns an diesem Beweis liegt, jene Voraussagung ist. Die Voraussagung ist nicht: "*auf diese Weise* wird keine Unordnung entstehen" (denn das ist keine Voraussagung, sondern das ist der mathem. Satz) sondern: "es wird keine Unordnung entstehen".

Ms-117 253[3] Ich wollte sagen: Der Beweis der Widerspruchsfreiheit kann uns nur dann *beruhigen*, wenn er ein triftiger Grund für jene Voraussage ist.

Ms-117 253[4] **87** 12.03.1940

Wo es mir genügt, daß bewiesen wird, daß ein Widerspruch, oder eine Dreiteilung des Winkels auf *diese* Weise nicht konstruiert werden kann, dort leistet der induktive Beweis, was man von ihm verlangt. Wenn ich mich aber fürchten müßte, daß irgend etwas, irgendwie, einmal als Konstruktion eines Widerspruchs gedeutet werden könnte, so kann kein Beweis mir diese unbestimmte Furcht nehmen.

Ms-117 255[4] Der Zaun den ich um den Widerspruch ziehe ist kein Über-Zaun.

Ms-117 255[5] & 256[1] Wie konnte der Kalkül durch einen Beweis prinzipiell in Ordnung kommen? Wie konnte es kein rechter Kalkül sein, solange man diesen Beweis nicht gefunden hatte?

Ms-117 256[2] ‘Dieser Kalkül ist rein mechanisch; eine Maschine könnte ihn ausführen.’ Was für eine Maschine? Eine die aus gewöhnlichen Materialien hergestellt ist– oder eine Über-Maschine? Verwechselst Du nicht die Härte einer Regel mit der Härte eines Materials?

Ms-117 256[4] Wir werden den Widerspruch in einem ganz andern Lichte sehen, wenn wir sein Auftreten & seine Folgen, gleichsam, anthropologisch betrachten – als wenn wir ihn mit der Entrüstung des Mathematikers anblicken. D.h., wir werden ihn anders sehen, wenn wir nur zu *beschreiben* versuchen, wie der Widerspruch Sprachspiele beeinflußt; als wenn wir ihn vom Standpunkt eines mathematischen Gesetzgebers ansehen.

Ms-117 258[2] 88 Aber halt! ist es nicht klar, daß niemand zu einem Widerspruch gelangen will? Daß also der, dem Du die Möglichkeit eines Widerspruchs vor Augen stellst, alles tun wird, um einen solchen unmöglich zu machen? (Daß also, wer das nicht tut, eine Schlafmütze ist.)

Ms-117 258[3] Wie aber, wenn er antwortete: “Ich kann mir einen Widerspruch in meinem Kalkül nicht vorstellen. – Du hast mir zwar einen Widerspruch in einem andern gezeigt, aber nicht in *diesem*. In diesem *ist keiner* & ich sehe auch nicht die Möglichkeit.”

Ms-117 258[4] “Sollte sich einmal meine Auffassung von dem Kalkül ändern; sollte, durch eine Umgebung, die ich jetzt nicht sehe, sich sein Aspekt ändern– dann wollen wir weiter reden.”

Ms-117 260a[1] “Ich sehe die Möglichkeit eines Widerspruches *nicht*. So wenig, wie Du – scheint es – die Möglichkeit, daß in Deinem Beweis der Widerspruchsfreiheit einer ist.”

Ms-117 260a[2] Weiß ich denn, ob, wenn ich je einen Widerspruch dort sehen sollte, wo ich jetzt nicht die Möglichkeit eines Widerspruchs sehe, er mir dann gefährlich erscheinen wird?

Ms-117 267[2] **89** 19.03.1940

‘Was lehrt mich ein Beweis, abgesehen von seinem Resultat?’ – Was lehrt mich eine neue Melodie? Bin ich nicht in Versuchung zu sagen, sie *lehre* mich etwas? –

Ms-117 267[3] **90** Die Rolle des Verrechnens habe ich noch nicht klar gemacht. Die Rolle des Satzes: “Ich muß mich verrechnet haben”. Sie ist eigentlich der Schlüssel zum Verständnis der ‘Grundlagen’ der Mathematik.

IV

Ms-125 5v[4] **1** "Die Axiome eines mathematischen Axiomsystems sollen einleuchtend sein." Wie leuchten sie denn ein?

Ms-125 6r[1] Wie wenn ich sagte: *so* kann ich mir's am leichtesten vorstellen. Und hier ist Vorstellen nicht ein bestimmter seelischer Vorgang bei dem man zumeist die Augen schließt, oder mit den Händen bedeckt.

Ms-125 6r[2] & 6v[1] **2** Was sagen wir, wenn uns so ein Axiom dargeboten wird, z.B. das Parallelenaxiom? Hat Erfahrung uns gezeigt, daß es sich so verhält?

Nun vielleicht; aber *welche* Erfahrung? Ich meine: Erfahrung spielt eine Rolle; aber nicht die, die man unmittelbar erwarten würde. Denn man hat ja doch nicht Versuche gemacht & gefunden, daß wirklich nur *eine* Gerade die andre Gerade nicht durch den Punkt schneidet. Und doch leuchtet der Satz ein. – Wenn ich nun sagte: es ist ganz gleichgültig, warum er einleuchtet. Genug: wir nehmen ihn an. Wichtig ist nur, wie wir ihn gebrauchen.

Ms-125 6v[2] Der Satz beschreibt ein Bild. Nämlich dieses:

Ms-125 7r[1] Dies Bild ist uns annehmbar. Wie es uns annehmbar ist, die ungenaue Kenntnis einer Zahl durch Abrunden auf ein Vielfaches von 10 anzudeuten.

Ms-125 7r[2] ‘Wir nehmen diesen Satz an.’ Aber als *was* nehmen wir ihn an?

Ms-125 7r[3] & 7v[1] 3 Ich will sagen: Wenn der Wortlaut des Parallelen-Axioms, z.B., gegeben ist (& wir die Sprache verstehen) so ist die Art der Verwendung dieses Satzes, & also sein Sinn, noch gar nicht bestimmt. Und wenn wir sagen, er leuchtet uns ein, so haben wir damit, ohne es zu wissen, schon eine bestimmte Art der Verwendung des Satzes gewählt. Der Satz ist kein mathematisches Axiom, wenn wir ihn nicht gerade *dazu* verwenden.

Ms-125 7v[2] & 8r[1] Daß wir nämlich hier nicht Versuche machen, sondern das Einleuchten gelten lassen legt schon die Verwendung fest. Denn wir sind ja nicht so naiv, das Einleuchten statt des Versuchs gelten zu lassen.

Ms-125 8r[2] Nicht, daß er uns als wahr einleuchtet, sondern daß wir das Einleuchten gelten lassen, macht ihn zum mathem. Satz.

Ms-125 8r[3] & 8v[1] 4 Lehrt uns die Erfahrung daß zwischen je 2 Punkten eine Gerade möglich ist? Oder, daß zwei verschiedene Farben nicht an einem Orte sein können? Man könnte sagen: die *Vorstellung* lehrt es uns. Und darin liegt die Wahrheit; man muß es nur recht verstehen.

Ms-125 8v[2] *Vor* dem Satz ist der Begriff noch geschmeidig.

Ms-125 8v[3] Aber könnten nicht Erfahrungen uns bestimmen das Axiom zu verwerfen?!

Ja. Und dennoch spielt es nicht die Rolle des Erfahrungssatzes.

Ms-125 8v[4] & 9r[1] Warum sind die Newtonschen Gesetze keine Axiome der Mathematik? Weil man sich sehr wohl vorstellen könnte, daß es sich anders verhielte. Aber – will ich sagen – dies schreibt jenen Sätzen nur eine gewisse Rolle im Gegensatz zu einer andern zu. D.h.: von einem Satz zu sagen: 'man könnte sich das auch anders vorstellen' oder 'man kann sich auch das Gegenteil davon vorstellen', schreibt ihm die Rolle des Erfahrungssatzes zu.

Ms-125 9r[2] & 9v[1] Der Satz den man sich nicht anders als wahr soll vorstellen können hat eine andere *Funktion* als der für den es sich nicht so verhält.

Ms-125 9v[2] 5 Die mathem. Axiome funktionieren dergestalt, daß, wenn Erfahrung uns dazu bewegte, ein Axiom aufzugeben, sein Gegenteil damit nicht zum Axiom würde. '$2 \times 2 \neq 5$' heißt nicht, '$2 \times 2 = 5$' habe sich nicht bewährt.

Ms-125 9v[3] Man könnte den Axiomen, sozusagen, ein spezielles Behauptungszeichen vorsetzen.

Ms-125 9v[4] & 10r[1] Axiom ist etwas nicht *dadurch*, daß wir es als äußerst wahrscheinlich, ja als gewiß, anerkennen, sondern dadurch, daß *wir* ihm eine bestimmte Funktion zuerkennen & eine, die der des Erfahrungssatzes widerstreitet.

Ms-125 10r[2] Wir geben dem Axiom eine andere Art der Anerkennung als dem Erfahrungssatz. Und damit meine ich nicht daß der 'seelische Akt des Anerkennens' ein andrer ist.

Ms-125 10v[1] Das Axiom ist, möchte ich sagen, ein andrer Redeteil.

Ms-125 10v[2] 6 Man nimmt, wenn man das math. Axiom, das & das sei möglich, hört, ohne weiters an, man wisse, was hier 'möglich sein' bedeutet; weil die Satzform uns natürlich geläufig ist.

Ms-125 10v[3] & 11r[1] Man wird nicht gewahr, wie verschiedenerlei die Verwendung der Aussage, etwas sei möglich, ist & kommt nicht auf den Gedanken, nach der besondern Verwendung in diesem Fall, zu fragen.

Ms-125 11r[2] Ohne die Verwendung im geringsten zu übersehen, können wir hier gar nicht zweifeln, daß wir den Satz verstehen.

Ms-125 11r[3] & 11v[1] Ist der Satz, daß es keine Wirkung in die Ferne gibt von dem Geschlecht der math. Sätze? Man möchte da auch sagen: der Satz ist nicht dazu bestimmt eine Erfahrung auszudrücken, sondern daß man sich etwas nicht anders vorstellen könne.

Ms-125 11v[2] & 12r[1] Zu sagen zwischen zwei Punkten sei – geometrisch – immer eine Gerade möglich, heißt: Von mehr als zwei Punkten zu sagen, sie lägen auf einer Geraden ist eine Aussage; es von zweien zu sagen ist keine.

Ms-125 12r[2] So wie man sich auch nicht fragt, was ein Satz der Form "Es gibt kein ..." (z.B. "Es gibt keinen Beweis dieses Satzes") im besonderen Fall bedeutet. Auf die Frage was er bedeutet antwortet man dem Anderen & sich selbst mit einem Beispiel des Nicht-existierens.

Ms-125 12r[3] & 12v[1] 7 Der math. Satz steht auf vier Füßen, nicht auf dreien; er ist überbestimmt.

Ms-125 12v[2] **8** Wenn wir das Tun eines Menschen, z.B., durch eine Regel beschreiben, so wollen wir, daß der, dem wir die Beschreibung geben, durch Anwendung der Regel wisse, was im besonderen Fall geschieht. Gebe ich ihm nun durch die Regel eine indirekte Beschreibung?

Ms-125 12v[3] & 13r[1] Es gibt natürlich einen Satz, der sagt: wenn Einer die Zahlen ... nach den & den Regeln zu multiplizieren trachtet so erhält er ……

Ms-125 13r[2] Eine Anwendung des math. Satzes muß immer das Rechnen selber sein. Das bestimmt das Verhältnis der Rechentätigkeit zum Sinn der math. Sätze.

Ms-125 13r[3] Wir beurteilen Gleichheit & Übereinstimmung nach den Resultaten unseres Rechnens, darum können wir nicht das Rechnen mit Hilfe der Übereinstimmung erklären.

Ms-125 13v[2] Wir beschreiben mit Hilfe der Regel: Wozu? Warum das ist eine andre Frage.

Ms-125 13v[3] & 14r[1] 'Die Regel, auf diese Zahlen angewandt, gibt jene' könnte heißen: der Regelausdruck auf den Menschen angewendet läßt ihn aus diesen Zahlen jene erzeugen.

Ms-125 14r[2] Man fühlt ganz richtig daß dies *kein* math. Satz wäre.

Ms-125 14r[3] Der math. Satz setzt einen gewissen Weg fest.

Ms-125 14r[4] & Es ist kein Widerspruch daß er eine Regel ist und nicht einfach festgesetzt, sondern nach Regeln erzeugt wird.

14v[1] Wer mit einer Regel beschreibt, weiß selbst auch nicht mehr als
Ms-125 er sagt. D.h., er sieht auch nicht die Anwendung voraus, die er
14v[2] im besondern Fall von der Regel machen wird. Wer "u.s.w." sagt, weiß selbst auch nicht mehr als "u.s.w.".

Ms-125 **9** Wie könnte man Einem erklären, was der zu tun hat, der
14v[3] & einer Regel folgen soll?
15r[1]

Ms-125 Man ist versucht zu erklären: vor allem tu das *Einfachste* (wenn
15r[2] & die Regel z.B. ist immer das gleiche zu wiederholen). Und
15v[1] daran ist natürlich etwas. Es ist von Bedeutung, daß wir sagen können, es sei einfacher eine Zahlenreihe anzuschreiben, in der jede Zahl gleich der vorhergehenden ist, als eine Reihe, in der jede Zahl um 1 größer ist als die vorhergehende. Und wieder, daß dies ein einfacheres Gesetz ist als das, abwechselnd 1 und 2 zu addieren.

Ms-125 **10** Ist es denn nicht übereilt, einen Satz, den man an Stäbchen
15v[2] & & Bohnen erprobt hat, auf Wellenlängen des Lichts
16r[1] anzuwenden? Ich meine: daß $2 \times 5000 = 10000$ ist. Rechnet man wirklich damit, daß, was sich in so viel Fällen bewahrheitet hat, auch für diese stimmen muß? Oder ist es nicht vielmehr, daß wir uns mit der arithmetischen Annahme noch *gar* nicht binden?

Ms-125 **11** Die Arithm. als die Naturgeschichte (Mineralogie) der
16r[2] Zahlen. *Wer* spricht aber so von ihr? Unser ganzes Denken ist von dieser Idee durchsetzt.

Ms-125 16r[3] & 16v[1] & 17r[1]

Die Zahlen sind Gestalten (ich meine nicht die Zahlzeichen) & die Arithm. teilt uns die Eigenschaften dieser Gestalten mit. Aber die Schwierigkeit ist da, daß die Eigenschaften der Gestalten *Möglichkeiten* sind; nicht die gestaltlichen Eigenschaften der Dinge, die die Gestalt haben. Und diese Möglichkeiten wieder entpuppen sich als physikalische, oder psychologische, Möglichkeiten (der Zerlegung, Zusammensetzung, etc.). Die Gestalten aber spielen (nur) die Rolle der Bilder, die man so & so verwendet. Nicht Eigenschaften von Gestalten ist es, was wir geben, sondern Transformationen von Gestalten, als irgendwelche Paradigmen aufgestellt.

Ms-125 17r[2] & 17r[3]

12 Wir beurteilen nicht die Bilder, sondern mittels der Bilder. Wir erforschen sie nicht sondern mittels ihrer etwas anderes.

Ms-125 17r[4] & 17v[1]

Du bringst ihn zu der Entscheidung dies Bild aufzunehmen. Und zwar durch Beweis, d.i., durch Vorführung einer Bilderreihe, oder einfach dadurch, daß Du ihm das Bild zeigst. Was zu dieser Entscheidung bewegt ist hier gleichgültig. Die Hauptsache ist, daß es sich um das Annehmen eines Bildes handelt.

Ms-125 17v[2]

Das Bild des Zusammensetzens *ist* kein Zusammensetzen; das Bild einer Zerlegung keine Zerlegung; das Bild des Passens kein Passen. Aber diese Bilder sind von der größten Bedeutung. *So sieht es aus*, wenn zusammengesetzt wird; wenn zerlegt wird; usw.

Ms-125 18r[1] 13 Wie wäre es, wenn Tiere oder Kristalle so schöne Eigenschaften hätten wie die Zahlen? Es gäbe also z.B. eine Reihe von Gestalten, eine immer um eine Einheit größer als die andere.

Ms-125 18r[2] & 18v[1] Ich möchte darstellen können, wie es kommt, daß die Math. jetzt uns als Naturgeschichte des Zahlenreiches, jetzt wieder als eine Sammlung von Regeln erscheint.

Ms-125 18v[2] Könnte man aber nicht Transformationen von Tiergestalten (z.B.) studieren? Aber wie 'studieren'? Ich meine: könnte es nicht nützlich sein, sich Transformationen von Tiergestalten vorzuführen? Und doch wäre dies kein Zweig der Zoologie. –

Ms-125 18v[3] & 19r[1] Ein math. Satz wäre es dann (z.B.), daß *diese* Transformation *diese* Gestalt in *diese* überleitet. (Die Gestalten & die Transformation wiedererkennbar.)

Ms-125 19r[2] & 19v[1] 14 Wir müssen uns aber dessen erinnern, daß der math. Beweis durch seine Umformungen nicht nur zeichengeometrische Sätze, sondern Sätze des verschiedenartigsten *Inhalts* beweist.

Ms-125 19r[3] So beweist die Umformung eines Russellschen Beweises, daß dieser logische Satz mit Hilfe dieser Regeln sich aus den Grundgesetzen bilden lasse. Aber der Beweis wird als Beweis der Wahrheit des Schlußsatzes angesehen, oder als Beweis dafür, daß der Schlußsatz *nichts* sagt. Das ist nun nur durch eine Beziehung des Satzes nach außen möglich; d.h. durch seine Beziehung zu andern Sätzen, z.B., & deren Anwendung.

Ms-125 19v[2] & 20r[1] ‘Die Tautologie (‘p ∨ ~p’, z.B.) sagt nichts’ ist ein Satz der sich auf das Sprachspiel bezieht, worin der Satz p angewendet wird. (Z.B.: “Es regnet, oder regnet nicht” ist keine Mitteilung über das Wetter.)

Ms-125 20r[2] Die R.sche Logik sagt nichts darüber, welcher Art & Verwendung *Sätze*, ich meine nicht *logische* Sätze, sind: Und doch erhält die Logik ihren ganzen Sinn (nur) von der supponierten Anwendung auf die Sätze.

Ms-125 28v[1] & 29r[1] 15 Man kann sich denken daß Leute eine angewandte Mathematik haben ohne eine reine Mathematik. Sie können z.B. – nehmen wir an – die Bahn berechnen, welche gewisse sich bewegende Körper beschreiben & deren Ort zu einer gegebenen Zeit vorhersagen. Dazu benüutzen sie ein Koordinatensystem, die Gleichung von Kurven (*eine Form der Beschreibung wirklicher Bewegung*) & die Technik des Rechnens im Dezimalsystem.

Die Idee eines Satzes der reinen Mathematik kann ihnen ganz fremd sein. Diese Leute haben also Regeln denen gemäß sie die betreffenden Zeichen insbesondere z.B. Zahlzeichen transformieren zum Zweck der Voraussage des Eintreffens gewisser Ereignisse.

Ms-125 29r[2] & 29v[1] Aber wenn sie nun z.B. multiplizieren, werden sie da nicht einen Satz gewinnen, der sagt, daß das Resultat der Multiplikation das gleiche ist, wie immer man die Faktoren vertauscht? Das wird keine primäre Zeichenregel sein, aber auch kein Satz ihrer Physik. Nun, sie *brauchen* so einen Satz nicht zu erhalten – selbst wenn sie das Vertauschen der Faktoren erlauben.

Ms-125 29v[2] & 30r[1] Ich denke mir die Sache so, daß diese Mathematik ganz in Form von *Geboten* betrieben wird. "Du mußt *das & das* tun" – um nämlich die Antwort darauf zu erhalten, 'wo wird sich dieser Körper zu der & der Zeit befinden'. (Wie diese Menschen zu dieser Methode der Vorhersagung gekommen sind, ist ganz gleichgültig).

Ms-125 30r[2] Der Schwerpunkt der Mathem. liegt für diese Menschen *ganz* im *Tun*.

Ms-125 30r[3] 16 Ist das aber möglich? Ist es möglich, daß sie das kommutative Gesetz (z.B.) nicht als *Satz* ansprechen?

Ms-125 30r[4] & 30v[1] Ich will doch sagen: Diese Leute sollen nicht zu der Auffassung kommen, daß sie mathem. Entdeckungen machen – sondern *nur* physikalische Entdeckungen. [Wie sehr ich doch bei meinem Denken von Spengler beeinflußt bin!]

Ms-125 30v[2] & 31r[1]

Frage: Müssen sie mathem. Entdeckungen als Entdeckungen machen? Was geht ihnen ab wenn sie keine machen? Könnten sie (z.B.) den Beweis des kommutativen Gesetzes gebrauchen, aber ohne die Auffassung, er gipfle in einem *Satz*, er habe also ein Resultat das ihren physikalischen Sätzen irgendwie vergleichbar sei?

Ms-125 31r[2] & 31v[1]

17 Das bloße Bild

einmal als 4 Reihen zu 5 Punkten, einmal als 5 Kolumnen zu 4 Punkten betrachtet könnte jemand vom kommutativen Gesetz überzeugen. Und er könnte daraufhin Multiplikationen einmal in der einen, einmal in der andern Richtung ausführen.

Ms-125 31v[2]

06.04.1942

Ein Blick auf die Vorlage & die Steine überzeugt ihn, daß er mit ihnen die Figur wird legen können, d.h., er *unternimmt* darauf, sie zu legen.

Ms-125 31v[4] & 32r[1] & 32r[2] & 32v[1]

'Ja, aber nur, wenn die Steine sich nicht ändern? – Wenn sie sich nicht ändern & wenn wir keinen unbegreiflichen Fehler machen, oder Steine unbemerkt verschwinden oder dazukommen. 'Aber es ist doch wesentlich, daß sich die Figur tatsächlich allemal aus den Steinen legen läßt! Was geschähe wenn sie sich nicht legen ließe?' – Vielleicht würden wir uns dann für geistesgestört halten. Aber – was weiter? – Vielleicht würden wir die Sache auch hinnehmen, wie sie ist. Und dann würde Frege sagen: "Hier haben wir eine neue Art der Verrücktheit".

Ms-125 32v[2] **18** Es ist klar, daß die Mathematik als Technik des Umwandelns von Zeichen zum Zweck des Vorhersagens mit (der) Grammatik nichts zu tun hat.

Ms-125 32v[3] & 33r[1] **19** (Jene) Leute, deren Mathematik nur eine solche Technik ist, sollen nun auch Beweise anerkennen, die sie von der Brauchbarkeit einer Zeichentechnik überzeugen.

Ms-125 33r[2] & 33v[1] **20** Wenn uns das Rechnen als maschinelle Tätigkeit erscheint, so ist *der Mensch*, der die Rechnung ausführt, die Maschine.

Ms-125 33v[2] Die Rechnung wäre dann gleichsam ein Diagramm, das ein Teil der Maschine hinschreibt.

Ms-125 33v[3] **21** Und das bringt mich darauf daß ein Bild uns sehr wohl davon überzeugen kann daß ein bestimmter Teil eines Mechanismus sich so & so bewegen werde wenn man den Mechanismus in Gang setzt.

Ms-125 34r[1] So ein Bild (oder eine Bilderreihe) wirkt wie ein Beweis. So könnte ich z.B. konstruieren, wie der Punkt x des Mechanismus

sich bewegen werde.

Ms-125 34r[2] Ist es nicht *seltsam*, daß es nicht augenblicklich klar ist, *wie* uns das Bild der Periode im Dividieren von der Wiederkehr der Ziffernreihe überzeugt?

Ms-125 34v[3] (Es ist so schwer für mich, die innere Beziehung von der äußeren zu scheiden – das Bild von der Vorhersage.)

Ms-125 35v[2] Der Doppelcharakter des math. Satzes – als *Gesetz* & als *Regel*.

Ms-125 36r[3] & 36v[1]

22 Wie, wenn man statt “Intuition” sagen würde “richtiges Erraten”? Das würde den Wert einer Intuition in einem ganz andern Lichte zeigen. Denn das Phänomen des Ratens ist ein psychologisches, aber nicht das des richtig Ratens.

Ms-125 36v[2]

23 Daß wir die Technik gelernt haben, macht, daß wir sie nun, auf den Anblick dieses Bildes hin, so & so abändern.

Ms-125 39v[3]

‘Wir entschließen uns zu einem neuen Sprachspiel.’ ‘Wir entschließen uns *spontan* (möchte ich sagen) zu einem neuen Sprachspiel.’

Ms-125 39v[4] & 40r[1]

24 Ja – es scheint: wenn unser Gedächtnis anders funktionierte, daß wir dann nicht so, wie wir’s tun, rechnen könnten. Könnten wir aber dann Definitionen geben, wie wir es tun; so reden & schreiben, wie wir es tun? Wie aber können wir die Grundlage unsrer Sprache durch Erfahrungssätze ausdrücken?!

Ms-125 40r[2] & 40v[1]

25 Angenommen, eine Division wenn wir sie ganz ausführen würde nicht zu demselben Resultat führen wie das Kopieren der Periode. Das könnte z.B. daher kommen, daß wir die Rechengesetzchen ohne uns dessen bewußt zu sein veränderten. (Es könnte aber auch daher kommen, daß wir anders kopieren.)

Ms-125 40v[2] & 41r[1]

26 Was ist der Unterschied zwischen *nicht* rechnen & *falsch* rechnen. – Oder: ist eine *scharfe* Grenze zwischen dem, die Zeit *nicht* zu messen & sie *falsch* messen? Keine Zeitmessung zu kennen & eine falsche?

Ms-125 41r[2] 27 Gib auf das Geschwätz acht, wodurch wir jemand von der Wahrheit eines math. Satzes überzeugen. Es gibt einen Aufschluß über die Funktion dieser Überzeugung. Ich meine das Geschwätz womit die Intuition wachgerufen wird. Womit also die Maschine einer Technik in Gang gesetzt wird.

Ms-125 41v[1] 28 Kann man sagen, daß, wer eine Technik lernt, sich dadurch von der Gleichförmigkeit der Resultate überzeugt??

Ms-125 41v[2] 29 Die Grenze der Empirie – ist die *Begriffsbildung*.

Ms-125 41v[3] & 42r[1] Welchen Übergang mache ich von "es wird so sein" zu "es *muß* so sein"? Ich bilde einen andern Begriff. Einen, in dem inbegriffen ist was es früher nicht war. Wenn ich sage: "Wenn diese Ableitungen gleich sind, dann *muß* ...", Bilde also meinen Begriff der Gleichheit um.

Ms-125 42r[2] & 42v[1] Wie aber, wenn Einer nun sagt: "Ich bin mir nicht dieser *zwei* Vorgänge bewußt, ich bin mir nur der Empirie bewußt, nicht einer von ihr unabhängigen Begriffsbildung & Begriffsumbildung; alles scheint mir im Dienste der Empirie zu stehen."? Mit andern Worten: wir scheinen nicht bald mehr, bald weniger rational zu werden, oder die Form unseres Denkens zu verändern, so daß damit sich *das* ändert, *was wir "Denken" nennen*. Wir scheinen es nur immer der Erfahrung anzupassen.

Ms-125 42v[2] & 43r[1] Das ist klar: daß, wenn Einer sagt: "Wenn Du der *Regel* folgst so *muß* es so sein", (daß) er keinen *klaren* Begriff von Erfahrungen hat die dem Gegenteil entsprächen.

Ms-125 43r[2] Oder auch so: Er hat keinen klaren Begriff davon, wie es aussähe, wenn es anders wäre. Und das ist sehr wichtig.

Ms-125 43v[2] & 44r[1] 30 Was zwingt uns den Begriff der Gleichheit *so* zu formen, daß wir etwa sagen: "wenn Du beidemale wirklich das Gleiche tust, muß auch dasselbe herauskommen"? – Was zwingt uns, nach einer Regel vorzugehen, etwas als Regel aufzufassen? Was zwingt uns mit uns selbst in den Formen der von uns gelernten Sprache zu reden

Ms-125 44r[2] Denn das Wort "muß" drückt doch aus, daß wir von *diesem* Begriff nicht abgehen können. (Oder soll ich sagen "wollen"?)

Ms-125 44r[3] & 44v[1] Ja, auch wenn ich von einer Begriffsbildung zu einer andern übergegangen bin, so bleibt der alte Begriff noch (immer) im Hintergrund.

Ms-125 44v[2] Kann ich sagen: "Ein Beweis bringt uns zu einer gewissen Entscheidung, & zwar zu der, eine bestimmte Begriffsbildung anzunehmen"??

Ms-125 45r[2] Sieh den Beweis nicht als einen Vorgang an der Dich *zwingt*, sondern der Dich *führt*. – Und zwar führt er Deine *Auffassung* eines (gewissen) Sachverhalts.

Ms-125 45v[1] Aber wie kommt es, daß er *jeden* von uns so führt, daß wir übereinstimmend von ihm beeinflußt werden? Nun, wie kommt es daß wir übereinstimmend *zählen*? 'Wir sind eben so abgerichtet', kann man sagen, 'und die Übereinstimmung die so erzeugt wird setzt sich durch die Beweise fort'.

Ms-125 45v[2] & 46r[1] *Während* dieses Beweises haben wir eine Anschauungsweise von der 3-Teilung des Winkels gebildet, die eine Konstruktion mit Lineal & Zirkel ausschließt.

Ms-125 46r[3] & 46v[1] Dadurch, daß wir einen Satz als selbstverständlich anerkennen, sprechen wir ihn auch von jeder Verantwortung gegenüber der Erfahrung frei.

Ms-125 46v[2] Während des Beweises wird unsere Anschauung geändert – & daß das mit Erfahrungen zusammenhängt tut dem keinen Eintrag.

Ms-125 46v[3] Unsre Anschauung wird umgemodelt.

Ms-125 46v[4] & 47r[1] 31 Es muß so sein, heißt nicht, es wird so sein. Im Gegenteil: 'Es *wird* so sein, wählt zwischen *einer* & einer andern Möglichkeit. 'Es muß so sein' sieht nur *eine* Möglichkeit.

Ms-125 47r[2] Der Beweis leitet unsere Erfahrungen sozusagen in bestimmte Kanäle. Wer das & das immer wieder versucht hat gibt den Versuch Beweis auf.

Ms-125 47r[3] & 47v[1] Es versucht Einer ein gewisses Bild aus Steinen zusammenzulegen. Er sieht nun eine Vorlage in welcher ein *Teil* jenes Bilds aus allen seinen Steinen zusammengelegt erscheint, & gibt nun seinen Versuch auf. Die Vorlage war der *Beweis* dafür, daß sein Vorhaben unmöglich ist.

Ms-125 47v[2] & 48r[1] Auch die Vorlage, sowie die, die ihm zeigt daß er wird ein Bild aus diesen Steinen zusammensetzen können, ändert seinen *Begriff*. Denn er hat, könnte man sagen, das Zusammensetzen dieses Bildes aus diesen Steinen noch nie so angesehen.

Ms-125 48r[2] & 48v[1] Ist es gesagt, daß Einer, der sieht, daß man mit diesen Steinen einen Teil des Bildes legen kann, einsieht, daß man also auf keine Weise das ganze Bild aus ihnen wird legen können? Ist es nicht möglich, daß er versucht & versucht, ob nicht doch eine Stellung der Steine dies Ziel erreicht?

Ms-125 48v[2] Muß man hier nicht zwischen (dem) Denken & dem praktischen Erfolg des Denkens unterscheiden?

Ms-125 48v[3] & 49r[1] 32 "… die nicht, wie wir, gewisse Wahrheiten unmittelbar einsehen, sondern vielleicht auf den langwierigen Weg der Induktion angewiesen sind", so sagt Frege. Aber was mich interessiert ist das unmittelbare Einsehen, ob es nun das einer Wahrheit ist, oder einer Falschheit. Ich frage: was ist das charakteristische Benehmen von Menschen, die etwas 'unmittelbar einsehen' – was immer der praktische Erfolg dieses Einsehens ist?

Ms-125 49v[1] Mich interessiert nicht das unmittelbare Einsehen einer Wahrheit, sondern das Phänomen des unmittelbaren Einsehens. Nicht (zwar) als einer besondern seelischen Erscheinung sondern als einer Erscheinung im Handeln der Menschen.

Ms-125 49v[2] & 50r[1] 33 Ja; es ist, als ob die Begriffsbildung unsre Erfahrung in bestimmte Kanäle leitete so daß man nun die eine Erfahrung mit der andern auf neue Weise zusammensieht. (Wie ein optisches Instrument Licht von verschiedenen Quellen auf bestimmte Art in einem Bild zusammenkommen läßt.)

Ms-125 50r[2] Denke Dir, der Beweis wäre eine Dichtung ja ein Theaterstück. Kann mich das Ansehen eines solchen zu nichts bringen?

Ms-125 50r[3] & 50v[1] Ich wußte nicht wie es gehen werde, – aber ich sah ein Bild, & nun wurde ich überzeugt, daß es so gehen werde, wie im Bilde. Das Bild verhalf mir zur Vorhersage. Nicht als ein Experiment – – es war nur der Geburtshelfer der Vorhersage.

Ms-125 50v[3] & 50r[1] Denn, was immer meine Erfahrungen sind, oder waren, ich muß doch noch die Vorhersage *machen*. (Die Erfahrungen machen sie nicht für mich.)

Ms-125 51v[1] Dann ist es ja kein so großes Wunder, daß der Beweis uns zur Vorhersage hilft. Ohne dieses Bild hätte ich nicht sagen können, wie es werden wird, aber wenn ich es sehe so ergreife ich es zur Vorhersage.

Ms-125 51v[2] & 52r[1] & 52v[1] Welche Farbe eine chemische Verbindung haben wird kann ich nicht mit Hilfe eines Bildes vorhersagen, das mir die Substanzen in der Proberöhre & ihre Reaktion veranschaulicht. Zeigt das Bild ein Aufschäumen & am Ende rote Kristalle, so könnte ich nicht sagen: “Ja, *so* muß es sein”, oder “Nein, so kann es nicht sein”. Anders aber ist es wenn ich das Bild eines Mechanismus in Bewegung setze; dieses kann mich lehren wie ein Teil sich wirklich bewegen wird. Stellte aber das Bild einen Mechanismus dar dessen Teile aus einem sehr weichen Material (etwa Teig) bestünde & sich daher im *Bild* auf verschiedenste Art verbögen, so würde mir das Bild vielleicht wieder nicht zu einer Vorhersage verhelfen.

Ms-125 52v[2] & 53r[1] Kann man sagen: ein Begriff wird so gebildet daß er einer gewissen Vorhersage angepaßt ist, d.h., sie in den einfachsten Termini ermöglicht –?

Ms-125 53r[2] 34 Das philosophische Problem ist: wie können wir die Wahrheit sagen, & dabei diese starken Vorurteile *beruhigen*?

Ms-125 53r[3] & 53v[1] Es ist ein Unterschied: ob ich etwas als eine Täuschung meiner Sinne oder als ein äußeres Ereignis deute, ob ich diesen Gegenstand zum Maß jenes nehme, oder umgekehrt, ob ich mich entschließe, zwei Kriterien entscheiden zu lassen, oder nur eins.

Ms-125 53v[2] 35 Wenn richtig gerechnet wurde, so muß das herauskommen. Muß es dann immer *so* herauskommen? Natürlich.

Ms-125 53v[3] Indem wir zu einer Technik erzogen sind, sind wir auch zu einer Betrachtungsweise abgerichtet, die *ebenso fest* sitzt als jene Technik.

Ms-125 54r[1] Der math. Satz scheint weder von den Zeichen, noch von den Menschen zu handeln, & er *tut* es daher auch nicht.

Ms-125 54r[2] Er zeigt *die* Verbindungen die wir als starr betrachten. Wir schauen aber sozusagen, von diesen Verbindungen weg & auf etwas anderes. Wir drehen ihnen sozusagen den Rücken. Oder: wir lehnen uns an sie oder fußen auf ihnen.

Ms-125 54r[3] & 54v[1] Nochmals: wir sehen den math. Satz nicht als einen Satz, der von Zeichen handelt an, & er *ist* es daher auch nicht.

Ms-125 54v[2] Wir erkennen ihn an, *indem* wir ihn den Rücken drehen.

Ms-125 54v[3] Wie ist es, z.B., mit den Grundgesetzen der Mechanik? Wer sie versteht, muß wissen, auf welche Erfahrungen sie sich stützen. Anders verhält es sich mit den Sätzen der reinen Mathematik.

Ms-125 54v[4] & 55r[1] 36 Ein Satz kann ein Bild beschreiben & dieses Bild mannigfach in unserer Betrachtungsweise der Dinge, also in unserer Lebens- & Handlungsweise verankert sein.

Ms-125 55r[3] & 55v[1] Ist nicht der Beweis ein flimsy Grund die Suche nach einer Konstruktion der Dreiteilung ganz aufzugeben? Du bist nur ein oder zweimal diese Zeichenreihe durchgegangen & daraufhin willst Du Dich entschließen? Nur weil Du diese eine Transformation gesehen hast willst Du die Suche aufgeben?

Ms-125 55v[2] Der Effekt des Beweises sei, daß sich in die neue Regel hineinstürzt.

Ms-125 56r[1] & 56v[1] Er hatte bisher nach der & der Regel gerechnet; nun zeigt ihm Einer den Beweis, man könne auch anders rechnen, & er schaltet nun (auf die andre Technik) um – nicht weil er sich sagt, es werde so auch gehen, sondern weil er die neue Technik mit der alten als identisch empfindet, weil er ihr denselben Sinn geben muß weil er sie als gleich anerkennt wie er diese Farbe als grün anerkennt. D.h.: das Einsehen der math. Relationen spielt eine ähnliche Rolle wie das Einsehen der Identität. Man könnte beinahe sagen, es ist eine kompliziertere Art der Identität.

Ms-125 57r[2] Man könnte sagen: Die Gründe warum er nun auf eine andere Technik umschaltet, sind von gleicher Art wie die, die ihn eine neue Multiplikation so ausführen lassen, wie er sie ausführt; indem er die Technik als die *gleiche* anerkennt, wie die, die er bei andern Multiplikationen angewandt hatte.

Ms-125 57v[2] & 58r[1] **37** 18.05.1942

Ein Mensch ist in einem Zimmer *gefangen*, wenn die Türe unversperrt ist, sich nach innen öffnet; er aber nicht auf die Idee kommt zu *ziehen*, statt gegen sie zu drücken.

Ms-125 58r[3] & 58v[1] **38** Wenn Weiß zu Schwarz wird, sagen manche Menschen "Es ist im wesentlichen noch immer dasselbe". Und andere, wenn die Farbe um einen Grad dunkler wird, sagen "Es hat sich *ganz* verändert".

Ms-125 59v[2] & 60r[1] **39** Die Sätze "$a = a$", "$p \supset p$", "Das Wort 'Bismarck' hat 8 Buchstaben", "Es gibt kein rötlichgrün", sind alle einleuchtend & Sätze über das Wesen: was haben sie gemeinsam? Sie sind offenbar jeder von andrer Art & anderem Gebrauch. Der vorletzte ist einem Erfahrungssatz am ähnlichsten. Und es ist verständlich daß man ihn einen synthetischen Satz a priori nennen kann. Man kann sagen: wenn einer die Zahlenreihe mit der Buchstabenreihe nicht *zusammenhält*, kann er nicht wissen, wieviel Buchstaben das Wort hat.

Ms-125 60v[2] **40** 15.09.1942

Eine Figur aus der andern nach einer Regel abgeleitet. (Etwa die Umkehrung vom Thema.)

Ms-125 60v[3] Dann das Resultat als Äquivalent der Operation gesetzt.

Ms-125 60v[4] 41 Wenn ich schrieb “der Beweis muß übersichtlich sein” so hieß das: *Kausalität* spielt im Beweis keine Rolle. Oder auch: der Beweis muß sich durch bloßes Kopieren reproduzieren lassen.

Ms-125 61r[1] 42 Daß bei der Fortsetzung der Division von 1 ÷ 3 immer wieder 3 herauskommen muß wird ebenso wenig durch Intuition erkannt, wie, daß die Multiplikation 25 × 25 wenn man sie wiederholt immer wieder dasselbe Produkt liefert.

Ms-125 61r[2] & 61v[1] 43 Man könnte vielleicht sagen daß der synthetische Charakter der Sätze der Math. sich am klarsten in der unregelmäßigen Verteilung der Primzahlen zeigt.

Ms-125 61v[2] & 62r[1] Aber weil sie synthetisch sind (in diesem Sinne), sind sie drum nicht weniger a priori. Man könnte sagen, will ich sagen, daß sie nicht aus den Begriffen durch einen Vorgang der Analyse abgeleitet werden können dennoch aber einen Begriff nach der Hand bestimmen.

Ms-127 13[2] Die Verteilung der Primzahlen wäre ein ideales Beispiel für das was man synthetisch a priori nennen könnte, denn man kann sagen, daß sie jedenfalls durch eine Analyse des Begriffs der Primzahl nicht zu finden ist.

Ms-125 62v[1] & 63r[1] & 63v[1]

44 Könnte man nicht wirklich von Intuition in der Math. reden? Nicht so aber, daß eine *mathem.* Wahrheit intuitiv erfaßt würde wohl aber eine physikalische, oder psychologische. So weiß ich mit *großer* Sicherheit, daß ich jedesmal 625 errechnen werde, wenn ich zehnmal 25 mit 25 multipliziere. D.h. ich weiß die psychologische Tatsache, daß mir immer wieder diese Rechnung als richtig erscheinen wird; so wie ich weiß, wenn ich die Zahlenreihe von 1 bis 20 zehnmal nacheinander aus dem Gedächtnis aufschreibe, die Aufschreibungen sich beim Kollationieren als gleich erweisen werden. – Ist das nun eine Erfahrungstatsache? Freilich – und doch wäre es schwer Experimente anzugeben die mich von ihr überzeugen würden. Man könnte so etwas eine intuitiv erkannte **Erfahrungs**tatsache nennen.

Ms-125 63v[3]

45 Du willst sagen, daß jeder Beweis in einer oder der anderen Weise den Begriff des Beweises ändert.

Ms-125 63v[4]

Aber nach welchem Prinzip wird denn etwas als neuer Beweis anerkannt? Oder vielmehr gibt es da gewiß kein ‘Prinzip’.

Ms-125 65r[2] & 65v[1]

46 Soll ich nun sagen: “wir sind überzeugt, daß immer wieder dasselbe Resultat herauskommen wird”? Nein, das ist nicht genug. Wir sind überzeugt, daß immer dieselbe Rechnung herauskommen, gerechnet werden, wird. Ist *das* nun eine mathematische Überzeugung? Nein – denn würde nicht immer dasselbe gerechnet so könnten wir nicht folgern, daß die Rechnung einmal ein Resultat das andre mal, ein anderes ergiebt.

Ms-125 65v[2] Wir sind *freilich* auch überzeugt, daß wir beim wiederholten Rechnen das Bild der Rechnung reproduzieren werden. –

Ms-125 69r[2] & 69v[1] **47** Könnte ich nicht sagen: wer die Multiplikation macht findet jedenfalls nicht das math. Faktum, aber den math. Satz? Denn, was er *findet* ist das nicht-math. Faktum, & so den math. Satz. Denn der math. Satz ist eine Begriffsbestimmung die auf eine Entdeckung folgt.

Ms-125 69v[2] Du *findest* eine neue Physiognomie. Du kannst Dir sie z.B. jetzt *merken* oder sie kopieren.

Ms-125 69v[3] & 70r[1] Es ist eine *neue* Form gefunden, konstruiert worden. Aber sie wird dazu benützt mit der alten einen neuen Begriff zu geben:

Man ändert den Begriff so, daß das hat herauskommen *müssen*.

Ms-125 70r[3] & 70v[1] Ich finde nicht das Resultat; sondern ich finde, daß ich dahin gelange.

Ms-125 70v[2] Und nicht das ist eine Erfahrungstatsache, daß *dieser* Weg da anfängt & da endet; sondern, daß ich diesen Weg, oder einen Weg zu diesem Ende, gegangen bin.

Ms-125 70v[3] **48** Aber könnte man nicht sagen, daß die *Regeln* diesen Weg führen, auch wenn niemand ihn gienge?

Ms-125 71r[1] & 71v[1] Denn das ist es ja, was man sagen möchte – und hier ist die Vorstellung von einem math. Mechanismus, einem, der nicht den Gesetzen der Physik, sondern nur denen der Math. gehorcht.

Ms-125 71v[2] & 72r[1] Ich will sagen: das Arbeiten der math. Maschine ist nur das *Bild* des Arbeitens einer Maschine.

Ms-125 72r[2] Die Regel *arbeitet* nicht, denn, was immer der Regel nach geschieht, ist eine Interpretation der Regel.

Ms-125 72r[3] & 72v[1] 49 Nehmen wir an, ich habe die Stadien der Bewegung von

im Bilde vor mir, so verhilft mir das zu einem Satz, den ich von diesem Bild gleichsam ablese. Der Satz enthält das Wort “ungefähr” & ist ein Satz der Geometrie.

Ms-125 72v[2] Es ist seltsam, daß ich einen Satz von einem *Bild* soll ablesen können.

Ms-125 72v[3] Der Satz aber handelt nicht von dem Bild das ich sehe. Er sagt nicht, daß auf diesem Bild das & das zu sehen ist. Er sagt aber auch nicht, was der wirkliche Mechanismus tun wird, obwohl er dies andeutet.

Ms-125 73r[1] Aber könnte ich von der Bewegung des Mechanismus wenn ihre Teile sich nicht ändern, auch andere Zeichnungen anfertigen? D.h., bin ich nicht *gezwungen* eben dies als Bild der Bewegung, *unter diesen Bedingungen*, anzunehmen.

Ms-125 73r[2] & 73v[1] Denken wir uns die Konstruktion der Stadien des Mechanismus mit Strichen von wechselnder Farbe ausgeführt. Die Striche seien zum Teil schwarz auf weißem Grund, zum Teil weiß auf schwarzem Grund. Denke Dir die Konstruktionen im Euklid so ausgeführt; sie werden allen Augenschein verlieren.

Ms-125 73v[2] **50** Das umgekehrte Wort hat ein *neues* Gesicht.

Ms-126 12[2] Wie, wenn man sagte: Wer die Folge 1 2 3 umgekehrt hat, *lernt* über sie, daß sie umgekehrt 3 2 1 ergibt? Und zwar ist, was er lernt, nicht eine Eigenschaft dieser Tintenstriche, sondern der Folge von *Formen*. Er lernt eine *formale* Eigenschaft von Formen. Der Satz, welcher diese formale Eigenschaft aussagt, wird durch die Erfahrung bewiesen, die ihm die Entstehung der einen Form, in dieser Weise, aus der andern zeigt.

Ms-126 13[1] Hat nun, wer das lernt, *zwei* Eindrücke? Einen davon daß die Reihenfolge *umgekehrt* wird, den andern davon daß 3 2 1 entsteht? Und könnte er die Erfahrung, den Eindruck, daß 1 2 3 umgekehrt wird nicht haben und doch nicht den daß 3 2 1 entsteht? Vielleicht wird man sagen: “nur durch eine seltsame Täuschung”. –

Ms-126 13[2] & 14[1] Warum man eigentlich nicht sagen kann, daß man jenen formalen Satz aus der Erfahrung lernt – weil man es erst dann diese Erfahrung nennt, wenn dieser Prozeß zu diesem Resultat führt. Die Erfahrung, die man meint, besteht schon aus diesem Prozeß mit diesem Resultat.

Ms-126 14[2] Darum ist sie mehr wie die Erfahrung: ein Bild zu sehen.

Ms-126 14[3] & 15[1] & 16[1]

Kann eine Buchstabenreihe zwei Umkehrungen haben? Etwa eine akustische & eine andere optische Umkehrung. Angenommen ich erkläre jemandem was die Umkehrung eines Wortes auf dem Papier ist, was man so nennt. Und nun stellt sich heraus daß er eine akustische Umkehrung des Wortes hat, d.h., etwas was er so nennen möchte was aber nicht ganz mit der geschriebenen Buchstabenreihe übereinstimmt. So daß man sagen kann: er hört *das* als Umkehrung des Wortes. Gleichsam als verzerrte sich ihm das Wort beim Umkehren. Und dies könnte etwa eintreten wenn er das Wort & die Umkehrung fließend ausspricht im Gegensatz zu dem Fall wenn er es buchstabiert. Oder die Umkehrung könnte anders scheinen, wenn er das Wort in *einem* Zuge vor- & rückwärts spricht.

Ms-126 16[2]

Es wäre möglich, daß man das genaue Spiegelbild eines Profils sogleich nach diesem gesehen nie für das gleiche & nur in die andere Richtung gedrehte erklärte, sondern daß, um den Eindruck der genauen Umkehrung zu machen, das Profil in den Maßen etwas geändert werden müßte.

Ms-126 17[1]

Ich will doch sagen, man könne nicht sagen: wir mögen zwar über die korrekte Umkehrung, eines langen Wortes z.B., im Zweifel sein, aber wir *wissen*, daß das Wort nur *eine* Umkehrung hat.

Ms-126 17[2]

‘Ja, aber wenn es eine Umkehrung in *diesem* Sinne sein soll, dann kann es nur *eine* geben!’ Heißt hier ‘in diesem Sinne’: nach diesen Regeln, oder: mit dieser Physiognomie. Im ersten Falle wäre der Satz tautologisch, im zweiten muß er nicht wahr sein.

Ms-125 75r[2] 51 Denk Dir eine Maschine, die 'so konstruiert ist', daß sie eine Buchstabenreihe umkehrt. Und nun den Satz, daß das Resultat im Falle

ABER

REBA ist. –

Ms-125 76r[2] & 76v[1] Die Regel, wie sie wirklich gemeint ist, scheint eine treibende Kraft zu sein, die eine ideale Reihe *so* umkehrt, – was immer ein Mensch mit einer wirklichen Reihe tun mag. Dieser ist also der Mechanismus, der für den wirklichen als Maßstab, als Ideal zu gelten hat.

Ms-125 76v[2] & 77r[1] Und das ist verständlich. Denn wird das Resultat der Umkehrung zum Kriterium dafür daß die Reihe wirklich umgekehrt wurde, & drücken wir dies so aus, daß wir es einer idealen Maschine nachtun, so muß diese Maschine *unfehlbar* dies Resultat erzeugen.

Ms-125 77r[2] 52 Kann man nun sagen: daß die Begriffe, die die Math. schafft, eine Bequemlichkeit sind, daß es, wesentlich auch, ohne sie ginge?

Ms-125 77r[3] Zuvörderst drückt die Annahme dieser Begriffe die *sichere* Erwartung gewisser Erfahrungen aus.

Ms-125 77v[1] *Wir nehmen es z.B. nicht hin*, daß eine Multiplikation nicht jedesmal das gleiche Resultat ergibt.

Ms-125 77v[2] Und was wir mit Sicherheit erwarten, ist für unser ganzes Leben wesentlich.

Ms-125 77v[3] & 78r[1]

53 Warum soll ich aber dann nicht sagen, daß die math. Sätze eben jene bestimmten Erwartungen, d.h. also Erfahrungen ausdrücken? Nur weil sie es eben nicht tun. Die Annahme eines Begriffes ist eine Maßregel die ich vielleicht nicht ergreifen würde, wenn ich nicht das Eintreten gewisser Tatsachen mit Bestimmtheit erwartete; aber darum ist die Festsetzung dieses Maßes nicht äquivalent mit dem Aussprechen der Erwartungen.

Ms-125 78r[2] & 78v[1] & 79r[1]

54 Es ist schwer den Tatsachenkörper auf die richtige Fläche zu stellen: das Gegebene als gegeben zu betrachten. Es ist schwer den Körper anders aufzustellen als man gewohnt ist, ihn zu sehen. Ein Tisch in einer Rumpelkammer mag immer auf der Tischplatte liegen, aus Gründen der Raumersparnis, etwa So habe ich den Tatsachenkörper immer *so* aufgestellt gesehen, aus mancherlei Gründen; & nun soll ich etwas anderes als seinen Anfang & etwas anderes als sein Ende ansehen. Das ist schwer. Er will gleichsam nicht so stehen, es sei denn daß man ihn in dieser Lage durch andere Vorrichtungen unterstützt.

Ms-127 81[3]

55 Es ist *eines* eine mathem. Technik zu gebrauchen, die darin besteht, den Widerspruch zu vermeiden, & ein anderes gegen den Widerspruch in der Mathematik überhaupt zu philosophieren.

Ms-127 83[2]

56 Der Widerspruch. Warum grad dieses *eine* Gespenst? Das ist doch sehr verdächtig.

Ms-127 83[3] Warum sollte eine Rechnung zu einem praktischen Zweck angestellt die einen Widerspruch ergibt mir nicht sagen: “Tu wie Dir’s beliebt, ich die Rechnung entscheide darüber nicht.”?

Ms-127 83[4] Der Widerspruch könnte als Wink der Götter aufgefaßt werden, daß ich handeln soll & *nicht* überlegen.

Ms-127 80[3] & 81[1] 57 04.03.1944

“Warum soll es in der Mathematik keinen Widerspruch geben dürfen?” – Nun, warum darf es in unsern einfachen Sprachspielen keinen geben? (Da besteht doch gewiß ein Zusammenhang.) Ist das also ein Grundgesetz, das alle denkbaren Sprachspiele beherrscht?

Ms-127 81[2] Angenommen ein Widerspruch in einem Befehl z.B. bewirkt Staunen & Unentschlossenheit – & nun sagen wir: das eben ist der Zweck des Widerspruchs in diesem Sprachspiel.

Ms-127 88[2] & 89[1] 58 Einer kommt zu Leuten & sagt: “Ich lüge immer”. Sie antworten: “Nun, dann können wir dir trauen!”. – Aber konnte *er* meinen, was er sagte? Und warum nicht? Gibt es nicht ein Gefühl, man sei unfähig etwas wirklich Wahres zu sagen; sei es was immer. –

Ms-127 89[2] “Ich lüge immer!” – Nun, & wie war’s mit diesem Satz? – “Der war auch gelogen!” – Aber dann lügst du also nicht immer! – “Doch, alles ist gelogen!” Wir würden vielleicht von diesem Menschen sagen, er meint mit “wahr” & mit “lügen” nicht dasselbe was wir meinen. Er meine etwa, alles, was er sage, flimmere; oder nichts komme wirklich vom Herzen.

Ms-127 89[3] & 90[1] Man könnte auch sagen: sein “ich lüge immer” war eigentlich keine *Behauptung*. Eher war es ein Ausruf.

Ms-127 90[2] Man kann also sagen: “Wenn er jenen Satz nicht ohne Gedanken aussprach, – so mußte er die Worte so & so meinen, er *konnte* sie nicht auf die gewöhnliche Weise meinen”? aussprechen”?

Ms-125 67r[2] & 67v[1] **59** Warum sollte man den Russellschen Widerspruch nicht als etwas Überpropositionales auffassen, etwas das über den Sätzen thront & nach beiden Seiten (wie ein Januskopf) schaut. N.B.: der Satz $F(F)$ – in welchem $F(\xi) = {\sim}\xi(\xi)$ – enthält keine Variablen & könnte also als etwas Überlogisches, als etwas Unangreifbares, dessen Verneinung nur wieder es selber aussagt, gelten. Ja könnte man nicht sogar die Logik mit diesem Widerspruch anfangen? Und von ihm gleichsam zu den Sätzen niedersteigen.

Ms-125 68r[1] Der sich selbst widersprechende Satz stünde wie ein Denkmal (mit einem Januskopf) über den Sätzen der Logik.

Ms-121 74v[2] & 75r[1] **60** Nicht das ist ein Unglück, einen Widerspruch zu erzeugen in der Region, in der weder der widerspruchsfreie noch der widerspruchsvolle Satz eine Arbeit zu leisten hat; wohl aber das, nicht zu wissen, wo man in diese Region eingetreten ist wo der Widerspruch nicht mehr schadet.

V

Ms-126 28[3] 1 Es ist natürlich klar, daß der Mathematiker, insofern er wirklich ‘ein Spiel spielt’ keine *Schlüsse zieht*. Denn ‘spielen’ muß hier heißen: in Übereinstimmung mit gewissen Regeln *handeln*. Und schon das wäre ein Heraustreten aus dem bloßen Spiel; wenn er den Schluß zöge, daß er hier der allgemeinen Regel gemäß *so* handeln dürfe.

Ms-126 30[2] 2 28.10.1942

Rechnet die Rechenmaschine?

Ms-126 30[3] Denk Dir, eine Rechenmaschine wäre durch Zufall entstanden; & nun drückt Einer durch Zufall auf ihre Knöpfe (oder ein Tier läuft über sie) & sie rechnet das Produkt 25 × 20. –

Ms-126 30[4] & 31[1] Ich will sagen: Es ist der Mathematik wesentlich, daß ihre Zeichen auch *im Zivil* gebraucht werden. Es ist der Gebrauch außerhalb der Mathematik, also die *Bedeutung* der Zeichen, was das Zeichenspiel zur Mathematik macht.

Ms-126 31[2] So, wie es ja auch kein logischer Schluß ist, wenn ich ein Gebilde in ein anderes transformiere (eine Anordnung von Stühlen etwa in eine andere) wenn diese Anordnungen nicht außerhalb dieser Transformation einen sprachlichen Gebrauch haben.

Ms-126 31[3] & 32[1] 3 Aber ist nicht das wahr, daß Einer, der keine Ahnung von der Bedeutung der Russellschen Zeichen hätte, R's Beweise *nachrechnen* könnte? Und also in einem wichtigen Sinne prüfen könnte ob sie richtig seien oder falsch?

Ms-126 33[4] & 34[1] 29.10.1942

Man könnte eine menschliche Rechenmaschine so abrichten, daß sie, wenn ihr die Schlußregeln gezeigt & etwa an Beispielen vorgeführt wurden, die Beweise eines mathem. Systems (etwa des R'schen) durchliest & nach jedem richtig gezogenen Schluß mit dem Kopf nickt bei einem Fehler aber den Kopf schüttelt & zu rechnen aufhört. Dieses Wesen könnte man sich im übrigen vollkommen idiotisch vorstellen.

Ms-126 34[2] Einen Beweis nennen wir etwas, was sich nachrechnen, aber auch kopieren läßt.

Ms-126 35[1] 4 Wenn die Math. ein Spiel ist, dann ist ein Spiel spielen Mathematik treiben, & warum dann nicht auch: Tanzen?

Ms-126 35[3] & 36[1] Denke Dir, daß Rechenmaschinen in der Natur vorkämen, ihre Gehäuse aber für die Menschen undurchdringlich (wären). Und diese Menschen benützten nun diese Vorrichtungen etwa wie wir das Rechnen, wovon sie aber gar nichts wissen. Sie machen also etwa Vorhersagungen mit Hilfe der Rechenmaschinen, aber für sie ist das Handhaben dieser seltsamen Gegenstände ein Experimentieren.

Ms-126 36[2] 30.10.1942

Diesen Leuten fehlen Begriffe, die wir haben; aber wodurch ersetzen sie diese?

Ms-126 36[3] & 37[1] Denke an den Mechanismus dessen Bewegung wir als geometrischen (kinematischen) Beweis ansahen: Das ist klar, das normalerweise von Einem der das Rad umtreibt nicht gesagt würde, er beweist etwas. Ist es nicht ebenso mit dem, der zum Spiel Zeichen aneinander reiht & diese Reihen verändert; auch wenn, was er hervorbringt als Beweis angesehen werden könnte?

Ms-126 37[2] & 38[1] Zu sagen, die Math. sei ein Spiel, soll heißen: wir brauchen beim Beweisen nirgends an die Bedeutung der Zeichen appellieren, also an ihre außermathematische Anwendung. Aber was heißt es denn überhaupt, an diese appellieren? Wie kann so ein Appell etwas fruchten?

Heißt das, aus der Mathematik heraustreten & wieder in sie zurückkehren, oder heißt es aus *einer* math. Schlußweise in eine andre treten?

Ms-126 38[2] Was heißt es, einen neuen Begriff von der Oberfläche einer Kugel gewinnen? In wiefern ist das dann ein Begriff von der Oberfläche einer *Kugel*? Doch nur insofern er sich auf wirkliche Kugeln anwenden läßt.

Ms-126 38[3] Wieweit muß man einen Begriff vom ‘Satz’ haben, um die R’sche mathem. Logik zu verstehen?

Ms-126 39[1] 5 01.11.1942

Wenn die intendierte Anwendung der Math. wesentlich ist, wie steht es da mit Teilen der Mathematik, deren Anwendung – wenigstens *das*, was Mathematiker für eine Anwendung hielten, – gänzlich phantastisch ist. So daß man, wie in der Mengenlehre, einen Zweig der Math. treibt, von dessen Anwendung man sich einen ganz falschen Begriff macht. Treibt man nun nicht *doch* Mathematik?

Ms-126 39[2] & 40[1] 02.11.1942

Wenn die arithm. Operationen lediglich zur Konstruktion einer Chiffre dienten wäre ihre Verwendung natürlich grundlegend von der unsern verschieden. Wären diese Operationen dann aber überhaupt mathematische Operationen?

Ms-126 40[2] & 41[1] Kann man von Dem, der eine Regel des Entzifferns anwendet, sagen, er vollziehe mathem. Operationen? Und doch lassen sich seine Transformationen so auffassen. Denn er könnte doch sagen, er berechne, was bei der Entzifferung des Zeichens ... nach der und der Regel herauskommen müsse. Und der Satz: daß die Zeichen ... dieser Regel gemäß entziffert ... ergeben ist ein mathematischer. Sowie auch der Satz: daß man beim Schachspiel von *dieser* Stellung zu jener kommen kann.

Ms-126 41[2] Denke Dir die Geometrie des vierdimensionalen Raums zu dem Zweck betrieben, die Lebensbedingungen der Geister kennen zu lernen. Ist sie darum nicht Mathematik? Und kann ich nun sagen sie bestimme Begriffe?

Ms-126 41[3] & 42[1]

Wäre es nicht seltsam von einem Kinde zu sagen, es könne bereits tausende & tausende von Multiplikationen machen – womit (nämlich) gemeint sein soll, es könne bereits im unbegrenzten Zahlenraum rechnen. Und zwar könnte das noch als eine äußerst bescheidene Ausdrucksweise gelten, da er (ja) nur ‘tausende & tausende’ statt ‘unendlich viele’ sagt.

Ms-126 42[2]

Könnte man sich Menschen denken, die im gewöhnlichen Leben etwa nur bis 1000 rechnen & die Rechnungen mit höheren Zahlen mathem. Untersuchungen über die Geisterwelt vorbehalten haben.

Ms-126 45[3] & 46[1]

“Ob das nun von einer *wirklichen* Kugelfläche gilt – von der mathematischen gilt es” – das erweckt den Anschein, als unterschiede sich der mathem. Satz von einem Erfahrungssatz besonders darin, daß wo die Wahrheit des Erfahrungssatzes schwankend & ungefähr ist, der mathem. Satz *sein* Objekt exakt & unbedingt wahr beschreibt. Als wäre eben die ‘mathem. Kugel’ eine Kugel. Und man könnte sich etwa fragen ob es nur *eine* solche Kugel, oder ob es mehrere gebe (eine Fregesche Fragestellung).

Ms-126 46[2] & 47[1]

Tut ein Mißverständnis, die mögliche Anwendung betreffend, der Rechnung als einem Teil der Mathematik Eintrag?

Ms-126 47[2]

Und abgesehen von einem Mißverständnis, – wie ist es mit der bloßen Unklarheit?

Ms-126 47[3] & 48[1] Wer glaubt, die Mathematiker haben ein seltsames Wesen, die -1, entdeckt, die quadriert nun doch -1 ergebe, kann der nicht doch ganz gut mit komplexen Zahlen rechnen & solche Rechnungen in der Physik anwenden? Und sind's darum weniger *Rechnungen*? In *einer* Beziehung steht freilich sein Verständnis auf schwachen Füßen; aber er wird mit Sicherheit seine Schlüsse ziehen, & sein, Kalkül wird auf *festen* Füßen stehen.

Ms-126 48[2] Wäre es nun nicht lächerlich, zu sagen, dieser triebe nicht Mathematik?

Ms-126 48[3] & 49[1] Es erweitert Einer die Math., gibt neue Definitionen & findet neue Lehrsätze – – & in *gewisser* Beziehung kann man sagen, er wisse nicht was er tut. – Er hat eine vage Vorstellung, etwas *entdeckt* zu haben wie einen Raum (wobei er an ein Zimmer denkt), ein Reich erschlossen zu haben, & würde, darüber gefragt, viel Unsinn reden.

Ms-126 49[2] Denken wir uns den primitiven Fall, daß Einer ungeheure Multiplikationen ausführte um wie er sagt: dadurch neue riesige Provinzen des Zahlenreichs zu gewinnen.

Ms-126 49[3] & 50[1] Denk Dir das Rechnen mit der -1 wäre von einem Narren erfunden worden, der bloß vom Paradoxen der Idee angezogen die Rechnung als eine Art Gottesdienst des Absurden treibt. Er bildet sich ein das Unmögliche aufzuschreiben & mit ihm zu operieren.

Ms-126 50[2] Mit andern Worten: Wer an die mathematischen *Gegenstände* glaubt & ihre seltsamen Eigenschaften, – kann der nicht doch Mathematik betreiben? Oder: – treibt der nicht auch Mathematik?

Ms-126 50[3] & 51[1] 05.11.1942

'Idealer Gegenstand'. "Das Zeichen 'a' bezeichnet einen idealen Gegenstand" soll offenbar etwas über die Bedeutung, also den Gebrauch von 'a' aussagen. Und es heißt natürlich, daß dieser Gebrauch *in* gewisser Beziehung ähnlich ist dem eines Zeichens, das einen Gegenstand hat, & daß es (aber) keinen Gegenstand bezeichnet. Es ist aber interessant, was der Ausdruck 'idealer Gegenstand' aus diesem Faktum macht.

Ms-126 51[3] & 52[1] 6 Man könnte unter Umständen von einer endlosen Kugelreihe reden. – Denken wir uns eine solche gerade endlose Reihe von Kugeln in gleichen Abständen & wir berechnen die Kraft, die alle diese Kugeln nach einem bestimmten Attraktionsgesetz auf einen bestimmten Körper ausüben. Die Zahl, die diese Rechnung liefert, betrachten wir als das Ideal der Genauigkeit für gewisse Messungen.

Ms-126 52[2] Das Gefühl des *Seltsamen* kommt hier von einem Mißverständnis. Der Art von Mißverständnis, die ein Daumenfangen des Verstandes erzeugt– – dem ich Einhalt gebieten will.

Ms-126 52[3] & 53[1] Der Einwand, daß 'das Endliche nicht das Unendliche erfassen kann' richtet sich *eigentlich* gegen die Idee eines psychologischen Akts des Erfassens oder Verstehens.

Ms-126 53[2] Oder denke Dir, wir sagen einfach: “Diese Kraft entspricht der Anziehung einer endlosen Kugelreihe die so & so angeordnet sind & den Körper nach diesem Attraktionsgesetz anziehen”. Oder wieder: “Berechne die Kraft die eine endlose Kugelreihe, von der & der Beschaffenheit, auf einen Körper ausübt!” – Dieser Befehl hat doch gewiß Sinn. Eine bestimmte Rechnung ist beschrieben.

Ms-126 54[1] Wie wäre es mit dieser Aufgabe: “Berechne das Gewicht einer Säule von sovielen aufeinander liegenden Platten, als es Kardinalzahlen gibt; die unterste Platte wiegt 1 kg jede höhere immer die Hälfte der vorhergehenden.”

Ms-126 54[2] Die Schwierigkeit ist *nicht* die, daß wir uns keine Vorstellung machen können. Es ist leicht genug sich irgend eine Vorstellung einer unendlichen Reihe, z.B., zu machen. Es fragt sich: was nützt uns die Vorstellung.

Ms-126 54[3] & 55[1] Denke Dir unendliche Zahlen in: einem Märchen gebraucht. Die Zwerge haben soviele Goldstücke aufeinander gelegt, als es Kardinalzahlen gibt – etc. Was in einem Märchen vorkommen kann, muß doch Sinn haben. –

Ms-126 55[2] 7 Denke Dir die Mengenlehre wäre als eine Art Parodie der Mathematik von einem Satiriker erfunden worden. – Später hätte man dann einen Nutzen in ihr gesehen & sie in die Mathematik einbezogen. (Denn wenn der eine sie als das Paradies der Mathematiker ansehen kann, warum nicht ein andrer als einen Scherz?)

Ms-126 55[3] & 56[1] Die Frage ist: ist sie nun als Scherz nicht auch offenbar Mathematik? –

Ms-126 56[2] Und warum ist sie offenbar Mathematik? – Weil sie ein Zeichenspiel nach Regeln ist?

Ms-126 56[3] Werden hier nicht doch offenbar Begriffe gebildet, – auch wenn man sich über deren Anwendung nicht im Klaren ist? Aber wie kann man einen Begriff haben & sich über seine Anwendung nicht im Klaren sein?

Ms-126 56[4] & 57[1] 8 06.11.1942

Nimm die Konstruktion des Kräftepolygons: ist das nicht ein Stück angewandte Mathematik? & wo ist der Satz der *reinen* Mathematik der bei dieser graphischen Berechnung zu Hülfe genommen wird? Ist dies nicht ein Fall wie der des Stammes, welcher eine rechnerische Technik zum Zweck gewisser Vorhersagungen hat, aber keine Sätze der reinen Mathematik?

Ms-126 57[2] & 58[1] Die Rechnung die zur Ausführung einer Zeremonie dient. Es werde z.B. nach einer bestimmten Technik aus dem Alter des Vaters & der Mutter & der Anzahl ihrer Kinder die Anzahl der Worte einer Segensformel abgeleitet die auf das Haus der Familie anzuwenden ist. In einem Gesetz wie dem Mosaischen könnte man sich Rechenvorgänge beschrieben denken. Und könnte man sich nicht denken, daß das Volk das diese zeremoniellen Rechenvorschriften besitzt im praktischen Leben nie rechnet?

Ms-126 58[2] Dies wäre zwar ein *angewandtes* Rechnen, aber es würde nicht dem Zweck einer Vorhersage dienen.

Ms-126 58[3] 07.11.1942

Wäre es ein Wunder wenn die Technik des Rechnens eine Familie von Anwendungen hätte?!

Ms-126 58[4] & 59[1] 9 08.11.1942

Wie seltsam die Frage ist ob in der unendlichen Entwicklung von π die Figur ϕ (eine gewisse Anordnung von Ziffern, z.B. '770') vorkommen wird, sieht man erst wenn man die Frage in einer ganz hausbackenen Weise zu stellen versucht: Menschen sind darauf abgerichtet worden nach gewissen Regeln Zeichen zu setzen. Sie verfahren nun dieser Abrichtung gemäß & wir sagen es sei ein Problem, ob sie der gegebenen Regel folgend *jemals* die Figur ϕ anschreiben werden.

Ms-126 60[1] Was aber sagt der, der, wie Weyl, sagt, eines sei klar: man werde oder werde nicht, in der endlosen Entwicklung auf ϕ kommen?

Ms-126 60[2] Mir scheint, wer dies sagt, stellt schon selbst eine Regel, oder ein Postulat auf.

Ms-126 60[3] Wie, wenn man auf eine Frage hin erwiderte: 'Auf diese Frage gibt es bis jetzt noch keine Antwort'?

Ms-126 60[4] & 61[1] So könnte etwa der Dichter antworten der gefragt wird ob der Held seiner Dichtung eine Schwester hat oder nicht – wenn er nämlich noch nichts darüber entschieden hat.

Ms-126 61[2] Die Frage – will ich sagen – verändert ihren Status, wenn sie entscheidbar wird. Denn ein Zusammenhang wird dann gemacht, der früher nicht *da war*.

Ms-126 61[3] & 62[1] Man kann von dem Abgerichteten fragen: ‘wie *wird* er die Regel für diesen Fall deuten?’, oder auch ‘wie *soll* er die Regel für diesen Fall deuten’. Wie aber, wenn über diese Frage keine Entscheidung getroffen wurde? – Nun, dann ist die Antwort nicht: ‘er soll sie so deuten, daß ϕ in der Entwicklung vorkommt’ oder: ‘er soll sie so deuten daß es nicht vorkommt’, sondern: ‘darüber ist noch nichts entschieden’.

Ms-126 133[3] & 134[1] So seltsam es klingt: Die Weiterentwicklung einer irrationalen Zahl ist eine Weiterentwicklung der Mathematik.

Ms-126 62[2] Wir mathematisieren mit den Begriffen. – Und mit gewissen Begriffen mehr als mit andern.

Ms-126 62[3] 10.11.1942

Ich will sagen: Es *scheint*, als ob ein Entscheidungsgrund bereits vorläge; & er muß erst erfunden werden.

Ms-126 63[1] Käme das darauf hinaus, zu sagen: Man benutzt beim Reden über die gelernte Technik des Entwickelns das falsche Bild einer vollendeten Entwicklung (dessen, was man für gewöhnlich ‘Reihe’ nennt) & wird dadurch gezwungen unbeantwortbare Fragen zu stellen.

Ms-126 63[2] & 64[1] Denn schließlich müßte sich doch jede Frage über die Entwicklung von $\sqrt{2}$ auf eine praktische Frage, die Technik des Entwickelns betreffend, bringen lassen.

Ms-126 64[2] Und es handelt sich hier natürlich nicht nur um den Fall der Entwicklung einer reellen Zahl oder überhaupt die Erzeugung mathematischer Zeichen, sondern um jeden analogen Vorgang, er sei ein Spiel, ein Tanz, etc. etc.

Ms-126 64[3] & 65[1] **10** Wenn Einer den Satz vom ausgeschlossenen Dritten uns als größte Wahrheit vorhält, so ist klar, daß mit seiner Frage etwas nicht in Ordnung ist.

Ms-126 65[2] Wenn einer den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aufstellt so legt er uns gleichsam zwei Bilder zur Auswahl vor & sagt, eins müsse der Tatsache entsprechen. Wie aber, wenn es fraglich ist, ob sich die Bilder hier anwenden lassen?

Ms-126 65[3] & 66[1] Und wer von der endlosen Entwicklung sagt sie müsse die Figur ϕ enthalten oder sie nicht enthalten zeigt uns sozusagen das Bild einer in die Ferne verlaufenden unübersehbaren Reihe.

Ms-126 66[2] Wie aber, wenn das Bild in weiter Ferne zu flimmern anfinge?

Ms-126 66[3] **11** Von einer unendlichen Reihe zu sagen, sie enthielte eine bestimmte Figur *nicht*, hat nur unter ganz gewissen Bedingungen Sinn.

Ms-126 66[4] 11.11.1942

D.h.: man hat diesem Satz für gewisse Fälle Sinn gegeben.

Ms-126 66[5] & 67[1] Ungefähr den: Es ist im *Gesetz* dieser Reihe, keine Figur ... zu enthalten. Ferner, man könnte sagen: Wie ... Ferner: (So) wie ich die Entwicklung weiterrechne, errechne ich etwas neues über das Gesetz der Reihe.

Ms-126 67[2] & 68[1]

"Nun gut, – so können wir sagen: 'Es muß entweder im Gesetz der Reihe liegen, daß die Figur vorkommt, oder das Gegenteil'." Aber ist das so? – "Nun, *determiniert* das Entwicklungsgesetz die Reihe denn nicht vollkommen? Und wenn es das tut, keine Zweideutigkeiten läßt, dann muß es, implicite, alle Eigenschaften der Reihe bestimmen." – Du denkst da an die endlichen Reihen.

Ms-126 68[2] & 69[1]

'Aber es sind doch alle Glieder der Reihe vom 1sten bis zum 1000sten, bis zum 10^{10}-ten, u.s.f., bestimmt; also sind doch *alle* Glieder bestimmt.' Das ist richtig, wenn es heißen soll es sei nicht (etwa) das so-&-so-vielte *nicht* bestimmt. Aber Du siehst ja, daß *das* Dir keinen Aufschluß darüber gibt, ob eine Figur in der Reihe erscheinen wird (wenn sie so weit nicht erschienen ist). *Wir sehen also*, daß wir ein irreführendes *Bild* gebrauchen.

Ms-126 69[2]

Willst Du mehr über die Reihe wissen, so mußt Du, so zu sagen, in eine andere Dimension (gleichsam wie aus der Linie in die Ebene) gehen. – Aber ist denn nicht die Ebene *da*, wie die Linie, & nur zu *erforschen*, wenn man wissen will, wie es sich verhält?

Ms-126 70[1]

Nein, die Mathematik dieser weitern Dimension muß so gut erfunden werden, wie jede Mathematik.

Ms-126 70[2]

In einer Arithmetik, in der man nicht weiter als 5 zählt, hat die Frage, wieviel 4 + 3 ist noch keinen Sinn. Wohl aber kann das Problem existieren, dieser Frage einen Sinn zu geben. D.h.: die Frage hat *so wenig* Sinn, wie der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, auf sie angewendet.

Ms-126 70[3] & 71[1] **12** Man meint in dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten schon etwas Festes zu haben, was jedenfalls nicht in Zweifel zu ziehen ist. Während in Wahrheit der Sinn dieser Tautologie (wenn man so sagen darf) ebenso schwankend ist wie der der Frage, ob p oder ~p der Fall ist.

Ms-126 71[2] & 72[1] & 73[1] 12.11.1942

Denke, ich fragte: Was meint man damit “die Figur … kommt in dieser Entwickelung vor?”. So wird man antworten: “Du *weißt* doch was das heißt. Sie kommt vor, wie die Figur … in der Entwicklung … tatsächlich vorkommt.” – Wohl; aber wie kann ich diese Analogie nun gebrauchen? Denn ich verstehe wohl, wenn man mir nun sagt: “Kommt die Figur 159 in den ersten 100 Stellen von $\sqrt{2}$ vor, wie sie in den ersten 10 Stellen von π vorkommt?” Denke Dir, man sagte: “Entweder sie kommt so vor, oder sie kommt nicht so vor”!

Ms-126 73[2] ‘Aber verstehst Du denn wirklich nicht, was gemeint ist?!’ – Aber kann ich nicht glauben, ich verstehe es & mich irren? –

Ms-126 73[3] Wie weiß ich denn, was es heißt: die Figur … komme in der Entwicklung vor? Doch durch Beispiele – die mir zeigen, wie das ist, wenn … Diese Beispiele zeigen mir aber nicht, wie es ist, wenn die Figur in der Entwickelung *nicht* vorkommt!

Ms-126 73[4] & 74[1] Könnte man nicht sagen: wenn ich wirklich ein Recht hätte zu sagen, diese Beispiele lehren mich, wie es ist wenn die Figur in der Entwicklung vorkommt, so müßten sie mir auch zeigen, was das Gegenteil des Satzes bedeutet.

Ms-126 74[2] **13** Der allgemeine Satz die Figur kommt in der Entwicklung nicht vor kann nur ein *Gebot* sein.

Ms-126 74[3] Wie wenn man die math. Sätze als Gebote ansieht & sie auch als solche ausspricht? "25^2 gebe 625!" Nun – ein Gebot hat eine innere & eine äußere Verneinung.

Ms-126 75[1] Die Symbole "(x).ϕx" & "(∃x).ϕx" sind wohl nützlich in der Math., wenn man im übrigen die Technik der Beweise der Existenz oder Nicht-Existenz kennt auf den sich die Russellschen Zeichen *hier* beziehen. Wird dies aber offen gelassen so sind diese Begriffe der alten Logik äußerst irreführend.

Ms-126 75[2] & 76[1] Wenn Einer sagt: "aber Du weißt doch was 'die Figur kommt in der Entwicklung vor' bedeutet, nämlich *das*" – & zeigt auf einen Fall des Vorkommens, – so kann ich nur erwidern, daß was er mir zeigt *verschiedene* Fakten illustrieren kann. Man kann daher nicht sagen ich wisse was der Satz heißt, weil ich weiß, daß er ihn in diesem Fall gewiß anwenden wird.

Ms-126 76[2] Das Gegenteil von "es besteht ein Gesetz, daß p" ist nicht: "es besteht ein Gesetz, daß ~p". Drückt man aber das erste durch P, das zweite durch ~P aus, so wird man in Schwierigkeiten geraten.

Ms-126 76[3] & 77[1] **14** 13.11.1942

Wie, wenn den Kindern beigebracht wird, die Erde sei eine unendliche Ebene; oder Gott habe eine unendliche Reihe von Sternen geschaffen; oder ein Stern fliege in einer geraden Linie gleichförmig immer weiter & weiter ohne je aufzuhören. Seltsam: wenn man so etwas als selbstverständlich, gleichsam ganz ruhig, aufnimmt, so verliert es alles Paradoxe. Es ist als sagte mir jemand: Beruhige Dich, diese Reihe, oder Bewegung, läuft fort & fort ohne je aufzuhören. Wir sind sozusagen der Mühe überhoben (je) an ein Ende zu denken.

Ms-126 78[1] ‘Wir werden ein Ende nicht in Betracht ziehen’. (We won’t bother about an end.)

Ms-126 78[2] Man könnte auch sagen: ‘für uns ist die Reihe endlos’.

Ms-126 78[3] ‘Wir werden uns um ein Ende der Reihe nicht bekümmern; für uns ist es immer unabsehbar.’

Ms-126 78[4] & 79[1] 15 14.11.1942

Nicht ‘abzählbar’ sollte es heißen – von den rationalen Zahlen etwa – sondern ‘abzählfähig’. Man kann die rationalen Zahlen nicht *abzählen*, weil man sie nicht zählen kann, aber man kann mittels der rationalen Zahlen zählen – so, wie mit den Kardinalzahlen. Die schiefe Ausdrucksweise gehört mit zu dem ganzen System der Vorspiegelung, daß wir mit dem neuen Apparat die unendlichen Mengen mit der selben Sicherheit behandeln, wie bis dahin nur die endlichen.

Ms-126 116[2] & 117[1] 08.12.1942

“Abzählbar” dürfte es nicht heißen, dagegen hätte es Sinn zu sagen “numerierbar”. Und dieser Ausdruck läßt auch die Anwendung des Begriffs erkennen. Denn man kann zwar die rationalen Zahlen nicht abzählen wollen, wohl aber kann man ihnen Nummern zulegen wollen.

Ms-126 79[2] & 80[1]

15.11.1942

Aber wo ist hier das Problem? Warum soll ich nicht sagen, was wir Mathematik nennen sei eine Familie von Tätigkeiten zu einer Familie von Zwecken. Die Menschen könnten z.B. Rechnungen zum Zweck einer Art von Wettrennen gebrauchen. Wie Kinder ja wirklich manchmal um die Wette rechnen; nur daß diese Verwendung bei uns keine große Rolle spielt.

Ms-126 80[2] & 81[1]

Oder das Multiplizieren könnte uns viel schwerer fallen, als es tut – wenn wir z.B. nur mündlich rechneten, & um uns eine Multiplikation zu merken, sie also zu erfassen, wäre es nötig sie in die Form eines gereimten Gedichts zu bringen. Wäre dies dann einem Menschen gelungen, so hätte er das Gefühl, eine große, wunderbare Wahrheit gefunden zu haben. Es wäre sozusagen für jede neue Multiplikation eine neue individuelle Arbeit nötig.

Ms-126 81[2] & 82[1]

Wenn diese Leute nun glaubten, die Zahlen wären Geister & durch ihre Rechnungen erforschten sie das Geisterreich, oder zwängen die Geister, sich zu offenbaren – wäre dies nun Arithmetik? Oder – wäre es auch dann Arithmetik, wenn diese Menschen die Rechnungen zu nichts anderm gebrauchten?

Ms-126 82[3]

16 Der Vergleich mit der Alchemie liegt nahe. Man könnte von einer Alchemie in der Mathematik reden.

Ms-126 83[2] & 84[1] Charakterisiert schon das die mathem. Alchimie, daß die mathem. Sätze als Aussagen über mathem. Gegenstände betrachtet werden, – also die Math. als die Erforschung dieser Gegenstände?

Ms-126 84[2] In einem gewissen Sinn kann man in der Math. darum nicht an die Bedeutung der Zeichen appellieren, weil die Math. ihnen erst die Bedeutung gibt.

Ms-126 84[3] & 85[1] Es ist das Typische der Erscheinung von welcher ich rede, daß das *Mysteriöse* an irgend einem mathem. Begriff nicht *sofort* als irrige Auffassung, als Fehlbegriff, gedeutet wird; sondern als etwas, was jedenfalls nicht zu verachten, vielleicht sogar eher zu respektieren ist.

Ms-126 85[2] Alles was ich machen kann ist einen leichten Weg aus dieser Unklarheit & dem Glitzern der Begriffe zeigen.

Ms-126 85[3] Man kann seltsamerweise sagen, daß an allen diesen glänzenden Begriffsbildungen ein sozusagen solider Kern ist. Und ich möchte sagen, daß der es ist der sie zu mathem. Produkten macht.

Ms-126 86[1] Man könnte sagen: Was Du siehst schaut freilich mehr wie eine glänzende Lufterscheinung aus; aber sieh sie von einem andern Winkel an & Du siehst (einen) soliden Körper, der nur von jener Richtung aus gesehen glänzt & unkörperlich aussieht.

Ms-126 87[3] 17 ‘Die Figur ist in der Reihe, oder sie ist nicht in der Reihe’ heißt: entweder schaut die Sache *so* aus oder sie schaut nicht so aus.

Ms-126 87[4] & 88[1] Wie weiß man, was das Gegenteil des Satzes "ϕ kommt in der Reihe vor", oder auch des Satzes "ϕ kommt nicht in der Reihe vor" bedeutet? Diese Frage klingt unsinnig, hat aber doch einen Sinn. Nämlich: wie weiß ich, daß ich den Satz, "ϕ kommt in der Reihe vor", verstehe. Es ist wahr, ich kann Beispiele geben für das Vorkommen & Nicht-Vorkommen. Und sie sind Beispiele dafür, daß es eine Regel gibt, die das Vorkommen in einer bestimmten Zone, oder einer Reihe von Zonen, vorschreibt, oder bestimmt daß dies Vorkommen ausgeschlossen ist.

Ms-126 88[2] & 89[1] Wenn "Du tust es" heißt: Du mußt es tun, & "Du tust es nicht" heißt: Du darfst es nicht tun – dann ist "Du tust es, oder Du tust es nicht" nicht der Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

Ms-126 89[2] Jeder fühlt sich ungemütlich bei dem Gedanken, ein Satz sage aus, in der endlosen Reihe komme das & das nicht vor – dagegen hat es gar nichts Befremdliches ein Befehl sage in dieser Reihe dürfe, soweit sie auch fortgesetzt werde, das nicht vorkommen.

Ms-126 89[3] & 90[1] Woher aber dieser Unterschied zwischen: "soweit Du auch gehst, wirst Du das nie finden" – & "soweit Du auch gehst darfst Du das nie tun"?

Ms-126 90[2] Auf jenen Satz kann man fragen: "wie kann man so etwas wissen", aber nichts Analoges gilt vom Befehl.

Ms-126 90[3] Die Aussage scheint sich zu übernehmen, der Befehl aber gar nicht.

Ms-126 90[4] Kann man sich denken, daß alle mathematischen Sätze im Imperativ ausgesprochen würden? Z.B.: "10 × 10 sei 100".

Ms-126 91[1] Und wer nun sagt: “Es sei so, oder es sei nicht so”, der spricht nicht den Satz vom ausgeschlossenen Dritten aus, – sondern eine *Regel*. (Wie ich es schon weiter oben einmal gesagt habe.)

Ms-126 91[2] 18 17.11.1942

Aber ist das wirklich ein Ausweg aus der Schwierigkeit? Denn wie verhält es sich dann mit allen anderen mathem. Sätzen, sagen wir $25^2 = 625$, gilt für diese nicht der Satz vom ausgeschlossenen Dritten *innerhalb* der Mathematik?

Ms-126 91[3] & 92[1] Wie wendet man denn den Satz vom ausgeschlossenen Dritten an?

Ms-126 92[2] 18.11.1942

“Es gibt entweder eine Regel die es gebietet, oder eine, die es verbietet”.

Ms-126 92[3] Angenommen, es gibt keine Regel die das Vorkommen verbietet, – warum soll es dann eine geben, die es gebietet?

Ms-126 92[4] & 93[1] Hat es Sinn zu sagen: “Es gibt zwar keine Regel die das Vorkommen verbietet, die Figur kommt aber tatsächlich doch nicht vor”? – Und wenn das nun keinen Sinn hat – wie kann das Gegenteil davon Sinn haben, nämlich, die Figur komme vor?

Ms-126 93[2] Nun, wenn ich sage, sie kommt vor, schwebt mir das Bild der Reihe vor, von ihrem Anfang bis zu jener Figur – wenn ich aber sage die Figur komme *nicht* vor, so nützt mir kein solches Bild der Reihe.

Ms-126 93[3] & 94[1] Wie, wenn die Regel sich beim Gebrauch unmerklich biegen würde? Ich meine so, daß ich von verschiedenen Räumen sprechen könnte, in denen ich sie gebrauche.

Ms-126 94[2] Das Gegenteil von “es darf nicht vorkommen” heißt “es darf vorkommen”. Für ein *endliches* Stück der Reihe aber scheint das Gegenteil von “es darf in ihm nicht vorkommen” zu sein: “es *muß* darin vorkommen”.

Ms-126 94[3] & 95[1] 19.11.1942

Das Seltsame in der Alternative “ϕ kommt in der unendlichen Reihe vor, oder es kommt nicht vor” ist, daß wir uns die beiden Möglichkeiten einzeln vorstellen müssen, daß wir nach einer Vorstellung für jedes besonders suchen, & daß nicht wie sonst *eine* für den negativen & für den positiven Fall zureicht.

Ms-126 95[2] 19 Wie weiß ich, daß der allgemeine Satz “Es gibt ...” hier Sinn hat? Nun, wenn er zu einer Mitteilung über die Technik des Entwickelns in einem Sprachspiel verwendet werden kann.

Ms-126 95[3] & 96[1] & 97[1]

Eine Mitteilung heißt: “es darf nicht vorkommen” – d.h.: wenn es vorkommt, hast Du falsch gerechnet. Eine heißt: “es darf vorkommen”, d.h., es existiert so ein Verbot nicht. Eine: “es muß in der & der Region (an diesen Stellen, immer in diesen Regionen) vorkommen”. Das Gegenteil davon aber scheint zu sein: “es darf dort & dort nicht vorkommen”– statt “es *muß* dort nicht vorkommen”. Wie aber, wenn man die Regel gäbe, daß, z.B., überall, wo die Bildungsregel von π 4 ergibt, statt der 4 auch eine beliebige andere Ziffer gesetzt werden kann. Zieh auch die Regel in Betracht die an gewissen Stellen eine Ziffer verbietet, aber im übrigen die Wahl offen läßt.

Ms-126 97[2]

20.11.1942

Ist es nicht so? Die Begriffe in den mathematischen Sätzen von den unendlichen Dezimalbrüchen sind nicht Begriffe von Reihen, sondern von der unbegrenzten Technik des Entwickelns von Reihen.

Ms-126 97[3] & 98[1]

Wir lernen eine endlose Technik: D.h., es wird uns etwas vorgemacht, wir machen es nach; es werden uns Regeln gesagt & wir machen Übungen in ihrer Befolgung, es wird dabei vielleicht auch ein Ausdruck wie “u.s.f. ad inf.” gebraucht, aber damit ist nicht von irgend einer riesigen Ausdehnung die Rede.

Ms-126 98[2]

Das sind die Fakten. Und was heißt es nun: “ϕ kommt entweder in der Entwickelung vor, oder es kommt nicht vor”?

Ms-126 98[3] & 99[1] 20 Aber heißt das nun, daß es kein Problem gibt: "Kommt die Figur ϕ in dieser Entwickelung vor?"? – Wer das fragt fragt & nach einer Regel das Vorkommen von ϕ betreffend. Und die Alternative des Existierens oder Nichtexistierens so einer Regel ist jedenfalls keine mathematische.

Ms-126 99[2] Erst innerhalb einem, erst zu errichtenden, mathem. Gebäude wird die Frage zur mathematischen.

Ms-126 100[1] 21 Ist denn das Unendliche nicht wirklich – kann ich nicht sagen: "diese zwei Kanten der Platte schneiden sich im Unendlichen"?

Ms-126 100[2] Nicht "der Kreis hat diese Eigenschaft weil er durch die beiden unendlich fernen Punkte ... geht"; sondern: "die Eigenschaften des Kreises lassen sich aus dieser (merkwürdigen) Perspektive betrachten".

Ms-126 100[3] & 101[1] Es ist wesentlich eine Perspektive; & eine weithergeholte. (Womit kein Tadel ausgesprochen ist.) Aber es muß immer ganz klar sein *wie weit* hergeholt diese Anschauungsart ist. Denn sonst ist ihre eigentliche *Bedeutung* im Dunkeln.

Ms-126 101[2] 22 Was heißt das: "der Mathematiker weiß nicht was er tut", oder "er weiß was er tut"?

Ms-126 101[3] & 102[1] 23 23.11.1942

Kann man unendliche Vorhersagungen machen? – Nun, warum soll man nicht z.B. das Trägheitsgesetz eine solche nennen? Oder den Satz, daß ein Komet eine Parabel beschreibt?

In gewissem Sinne wird freilich ihre Unendlichkeit nicht sehr ernst genommen.

Ms-126 102[2] Wie ist es nun mit einer *Vorhersagung*: daß, wer π entwickelt, so weit er auch gehen mag, nie auf die Figur φ stoßen wird? – Nun, man könnte sagen, daß dies entweder eine *unmathematische* Vorhersagung ist, oder (aber) eine mathematische Regel.

Ms-126 102[3] & 103[1] Jemand, der $\sqrt{2}$ entwickeln gelernt hat geht zu einer Wahrsagerin, & sie weissagt ihm, daß soweit er auch die $\sqrt{2}$ entwickeln mag, er nie zu einer Figur ... gelangen wird. – Ist ihre Weissagung ein mathem. Satz? Nein. – Außer sie sagt: "wenn Du immer richtig entwickelst, wirst Du nie dahin kommen". Aber ist das noch eine Vorhersage?

Ms-126 103[2] & 104[1] Es scheint nun, daß so eine *Vorhersage* des richtig Entwickelten denkbar wäre und sich von einem mathem. Gesetz, daß es sich so & so verhalten *muß*, unterschiede. So daß es in der mathem. Entwickelung einen Unterschied gäbe zwischen dem, was tatsächlich so herauskommt – gleichsam zufällig – & dem, was herauskommen muß.

Ms-126 104[2] 24.11.1942

Wie soll man es entscheiden, ob eine unendliche Voraussage Sinn hat? So jedenfalls nicht, daß man sagt: "ich bin sicher, ich *meine* etwas, wenn ich sage ...".

Ms-126 104[3] & 105[1] Auch ist wohl nicht so sehr die Frage, ob die Voraussage irgend einen Sinn hat, als: was für eine Art von Sinn sie hat. (Also, in welchen Sprachspielen sie vorkommt.)

Ms-126 108[2] **24** 28.11.1942

"Der unheilvolle Einbruch" der Logik in die Mathematik.

Ms-126 109[3] In dem so vorbereiteten Feld ist *das* ein Existenzbeweis.

Ms-126 109[4] & 110[1] Das Verderbliche der logischen Technik ist, daß sie uns die spezielle mathem. Technik vergessen läßt. Während die logische Technik nur eine Hilfstechnik in der Math. ist. Z.B. gewisse Verbindungen zwischen anderen Techniken herstellt.

Ms-126 110[2] Es ist beinahe als wollte man sagen, daß das Tischlern im Leimen besteht.

Ms-126 112[1] **25** Der Beweis überzeugt Dich davon daß es eine Wurzel der Gleichung gibt (ohne Dir eine Ahnung zu geben *wo*) – – wie weißt Du, daß Du den Satz verstehst, es gebe eine Wurzel? Wie weißt Du daß Du wirklich von etwas überzeugt bist? Du magst davon überzeugt sein, daß sich die Anwendung des bewiesenen Satzes finden lassen wird. Aber Du verstehst ihn nicht solange Du sie nicht gefunden hast.

Ms-126 113[1] Wenn ein Beweis allgemein beweist, *es gebe* eine Wurzel, so kommt alles darauf an, in welcher Form er das beweist. Was es ist, das hier zu diesem Wortausdruck führt, der ein bloßer Schemen ist & die *Hauptsache* verschweigt. Während er den Logikern nur die Nebensache zu verschweigen scheint.

Ms-126 117[2] Das mathematisch Allgemeine steht zum mathematisch Besonderen nicht in dem Verhältnis wie sonst das Allgemeine zum Besondern.

Ms-126 117[3] & 118[1] Alles was ich sage kommt eigentlich darauf hinaus, daß man einen Beweis wohl kennen, & ihm Schritt für Schritt folgen kann, & dabei doch, was bewiesen wurde, nicht *versteht.*

Ms-126 118[2] Und das hängt wieder damit zusammen, daß man einen mathem. Satz grammatisch richtig bilden kann ohne seinen Sinn zu verstehen.

Ms-126 118[3] & 119[1] Wann versteht man ihn nun? – Ich glaube: wenn man ihn anwenden kann. Man könnte vielleicht sagen: wenn man ein klares Bild von seiner Anwendung hat. Dazu aber genügt es nicht, daß man ein klares Bild mit ihm verbindet. Vielmehr wäre besser gewesen zu sagen: wenn man eine klare Übersicht von seiner Anwendung hat. Und auch das ist schlecht, denn es handelt sich nur darum daß man die Anwendung nicht dort vermutet wo sie nicht ist; daß man sich von der Wortform des Satzes nicht täuschen läßt.

Ms-126 119[2] & 120[1] Wie kommt es aber nun daß man einen Satz, oder Beweis, auf diese Weise nicht verstehen, oder mißverstehen kann? Und was ist dann nötig um das Verständnis herbeizuführen?

Ms-126 120[2] Es gibt da, glaube ich, Fälle in denen Einer den Satz (oder Beweis) zwar anwenden kann, über die Art der Anwendung aber nicht klar Rechenschaft zu geben im Stande ist. Und den Fall, daß er den Satz auch nicht anzuwenden weiß. (Mult. Ax.)

Ms-126 120[3] Wie ist es in der Beziehung mit $0 \times 0 = 0$?

Ms-126 120[4] & 09.12.1942

121[1] Man möchte sagen, das Verständnis eines math. Satzes sei nicht durch seine Wortform garantiert, wie im Fall der meisten nicht-mathematischen Sätze. Das heißt – so scheint es – daß der Wortlaut das *Sprachspiel* nicht bestimmt, in welchem der Satz funktioniert.

Ms-126 121[2] Die logische Notation verschluckt die Struktur.

Ms-126 121[3] & 122[1] **26** Um zu sehen, wie man etwas 'Existenzbeweis' nennen kann, was keine Konstruktion des Existierenden zuläßt, denke an die verschiedenen Bedeutungen des Wortes "wo" (z.B. des topologischen & des metrischen.)

Ms-126 122[2] 10.12.1942

Es kann ja der Existenzbeweis nicht nur den Ort des 'Existierenden' unbestimmt lassen, sondern es braucht auf einen solchen Ort gar nicht anzukommen. D.h.: wenn der bewiesene Satz lautet "es gibt eine Zahl, für die ..." so muß es keinen Sinn haben zu fragen "und welches ist diese Zahl", oder zu sagen "und diese Zahl ist ..."

Ms-127 47[4] & 48[1] & 49[1] **27** 01.02.1943

Ein Beweis, daß 777 in der Entwicklung von π vorkommt, der nicht zeigt, wo, müßte diese Entwicklung von einem ganz neuen Standpunkt ansehen, sodaß er etwa Eigenschaften von Regionen der Entwickelung zeigte von denen wir nur wüßten, daß sie sehr weit entfernt liegen. Es schwebt mir dabei vor daß man sehr weit draußen in π sozusagen eine dunkle Zone von unbestimmter Länge annehmen müßte, wo unsere Rechenhilfsmittel nicht mehr verläßlich sind & noch weiter draußen dann eine Zone, wo man auf *andere* Weise wieder etwas sehen kann.

Ms-126 122[3] & 123[1] & 124[1]

28 11.12.1942

Vom Beweis durch reductio ad absurdum kann man sich immer vorstellen, er werde im Argument mit einem Opponenten gebraucht, der eine mathematisch unhaltbare Behauptung macht. Ich meine aber nicht eine *mathematische* Behauptung. Etwa, er habe gesehen, wie der A den B mit den & den Figuren matt gesetzt habe – wenn das nach den Regeln nicht möglich ist.

Ms-126 124[2] & 125[1]

Die Schwierigkeit, die man beim Beweis durch reductio ad absurdum in der Math. empfindet ist die: Was geht bei diesem Beweis vor? Etwas mathematisch Absurdes, also Unmathematisches? Wie kann man – möchte man fragen – das mathematisch Absurde überhaupt nur annehmen? Daß ich das physikalisch Falsche annehmen & ad absurdum führen kann macht mir keine Schwierigkeiten. Aber wie das sozusagen Undenkbare denken?!

Ms-126 125[2] & 126[1]

Der indirekte Beweis sagt aber: “wenn Du es *so* willst, darfst Du *das* nicht annehmen: denn **da**mit ist nur das Gegenteil dessen vereinbar wovon Du nicht abgehen willst”.

Ms-126 131[3] & 132[1]

29 14.12.1942

Die geometrische Illustration der math. Analysis ist allerdings unwesentlich, nicht aber die geometrische Anwendung. Ursprünglich waren die geometrischen Illustrationen *Anwendungen der Analysis*. Wo sie aufhören dies zu sein, können sie leicht gänzlich irreführen. Hier haben wir dann die phantastische Anwendung. Die eingebildete Anwendung.

Ms-126 132[2] Die Idee des ‘Schnittes’ ist so eine gefährliche Illustration.

Ms-126 132[3] Nur soweit, als die Illustrationen auch Anwendungen sind, erzeugen sie nicht das gewisse Schwindelgefühl, das die Illustration erzeugt im Moment, wo sie aufhört eine mögliche Anwendung zu sein; wo sie also dumm wird.

Ms-126 110[3] & 111[1] 30 So könnte man Dedekinds Theorem ableiten wenn, was wir irrationale Zahlen nennen *ganz unbekannt* wäre, wenn es aber eine Technik gäbe, die Stellen vor Dezimalzahlen zu würfeln. Und dieses Theorem hätte dann seine Anwendung auch wenn es die Mathematik der irrationalen Zahlen nicht gäbe. Es ist nicht, als sähen die Dedekindschen Entwicklungen alle besonderen reellen Zahlen schon voraus. Es *scheint* nur so, sobald man den Dedekindschen Kalkül mit den Kalkülen der besonderen reellen Zahlen vereinigt.

Ms-126 136[3] & 137[1] 31 Man könnte fragen: Was könnte ein Kind von 10 Jahren am Beweis des Dedekindschen Satzes *nicht* verstehen? – Ist denn dieser Beweis nicht viel einfacher, als alle die Rechnungen die das Kind beherrschen muß? – Und wenn nun jemand sagte: den tieferen Inhalt des Satzes kann es nicht verstehen – dann frage ich: wie kommt dieses Gesetz zu einem tiefen Inhalt?

Ms-126 138[2] 32 Das Bild der Zahlengeraden ist ein absolut natürliches bis zu einem gewissen Punkt: nämlich, soweit man es *nicht* zu einer allgemeinen Theorie der reellen Zahlen gebraucht.

Ms-126 148[2] & 149[1] & 150[1]

33 Wenn Du die *reellen* Zahlen in eine höhere & eine niedere Klasse teilen willst, so tu's erst einmal roh durch

zwei rationale Punkte P & Q. Dann halbiere P – Q & entscheide, in welcher Hälfte (wenn nicht im Teilungspunkt) der Schnitt liegen soll; wenn z.B. in der unteren, halbiere diese & mache eine genauere Entscheidung; u.s.f.. Hast Du ein Prinzip der unbegrenzten Fortsetzung, so kannst Du von diesem Prinzip sagen, es führe einen Schnitt aus, da es von jeder Zahl entscheidet, ob sie rechts oder links liegt. – Nun ist die Frage, ob ich durch ein solches Prinzip der Teilung *überall* hin gelangen kann oder ob noch eine andere Art der Entscheidung nötig ist; & man könnte fragen, ob *nach* der vollendeten Entscheidung durch das Prinzip oder *vor* der Vollendung. Nun, jedenfalls nicht vor der Vollendung; denn solange noch die Frage ist in welchem endlichen Stück der Geraden der Punkt liegen soll, kann die weitere Teilung entscheiden. – Aber *nach* der Entscheidung durch ein Prinzip ist noch Raum für eine weitere Entscheidung?

Ms-126 150[2]

Es ist mit dem Dedekindschen Satz wie mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Er scheint ein Drittes auszuschließen, während von einem Dritten in ihm nicht die Rede ist.

Ms-126 151[1]

Der Beweis des D.schen Satzes arbeitet mit einem Bild, das *ihn* nicht rechtfertigen kann, das eher vom Satz gerechtfertigt werden soll.

Ms-126 151[2] Ein Prinzip der Teilung siehst Du leicht für eine unendlich fortgesetzte Teilung an, denn es entspricht jedenfalls keiner endlichen Teilung & scheint Dich weiter & weiter zu führen.

Ms-126 153[2] & 154[1] **34** Man könnte auch so fragen: könnte man nicht die Lehre vom Limes, der Funktionen, der reellen Zahlen, mehr, als man es tut, *extensional vorbereiten*? auch wenn dieser vorbereitende Kalkül *sehr* trivial & an sich nutzlos erscheinen sollte?

Ms-126 154[2] & 155[1] & 156[1] & 157[1] Die Schwierigkeit der bald intensionalen bald wieder extensionalen Betrachtungsweise beginnt schon beim Begriff des 'Schnittes'. Daß man jede rationale Zahl ein Prinzip der Teilung der rationalen Zahlen nennen kann ist wohl klar. Nun *entdecken* wir etwas anderes was wir Prinzip der Teilung nennen können, etwas das, welches der $\sqrt{2}$ entspricht. Dann andere ähnliche – & nun sind wir mit der Möglichkeit solcher Teilungen schon ganz wohlvertraut, & sehen sie unter dem Bild eines irgendwo entlang der Geraden geführten Schnittes, *also extensional.* Denn wenn ich *schneide*, so kann ich ja wählen, wo ich schneiden will. Ist aber ein *Prinzip* der Teilung ein Schnitt, so ist es dies doch nur weil man von beliebigen rationalen Zahlen sagen kann sie seien oberhalb oder unterhalb des Schnitts. – Kann man nun sagen die Idee des Schnitts habe uns von den rationalen Zahlen zu irrationalen Zahlen geführt? Sind wir denn z.B. zur $\sqrt{2}$ durch den Begriff des Schnitts gelangt. Was ist nun ein Schnitt der reellen Zahlen? Nun, ein Prinzip der Teilung in eine untere & eine obere Klasse. So ein Prinzip gibt also jede rationale & irrationale Zahl ab. Denn wenn wir auch kein System der irrationalen Zahlen haben so zerfallen doch die, *die wir haben*, in obere & untere in Bezug auf den Schnitt (soweit sie mit ihm nämlich vergleichbar sind). Nun ist aber die Dedekindsche Idee, daß die Einteilung in eine obere & untere Klasse (mit den bekannten Bedingungen) die reelle Zahl ist.

Ms-126 157[2] Der Schnitt ist eine extensive *Vorstellung*.

Ms-126 157[3] & 158[1] Es ist freilich wahr daß wenn ich ein mathematisches Kriterium habe um für eine beliebige rationale Zahl festzustellen ob sie zur oberen oder unteren Klasse gehört, es ein Leichtes ist mich dem Ort systematisch beliebig zu nähern, wo die beiden Klassen sich treffen.

Ms-126 158[2] Wir machen bei Dedekind einen Schnitt nicht dadurch, daß wir schneiden also auf den Ort zeigen, sondern daß wir – wie beim Finden der Quadratwurzel aus 2 – uns den einander zugekehrten Enden der oberen & unteren Klasse nähern.

Ms-126 158[3] & 159[1] Nun soll bewiesen werden, daß keine anderen Zahlen, als nur die reellen, so einen Schnitt ausführen können.

Ms-126 159[2] 06.01.1943

Vergessen wir nicht, daß *ursprünglich* die Teilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen keinen Sinn hatte, bis wir auf Gewisses aufmerksam machten, was man so bezeichnen konnte. Der Begriff *ist vom täglichen Sprachgebrauch hergenommen* & scheint darum auch für die Zahlen unmittelbar einen Sinn haben zu müssen.

Ms-126 159[3] & 160[1] & 161[1] Wenn man nun die Idee eines Schnitts der *reellen* Zahlen einführt, indem man sagt, es sei jetzt einfach der Begriff des Schnitts von den rationalen auf die reellen Zahlen auszudehnen; alles was wir brauchen ist eine Eigenschaft, die die reellen Zahlen in zwei Klassen einteilt (etc.) – so ist *zunächst* nicht klar was mit so einer Eigenschaft gemeint ist, die *alle* reellen Zahlen so einteilt. Nun kann man uns darauf aufmerksam machen, daß jede reelle Zahl dazu dienen kann. Aber das führt uns nur soweit & nicht weiter.

Ms-127 10[1]

35 08.01.1943

Die extensionalen Erklärungen der Funktionen, der reellen Zahlen, etc. übergehen alles Intensionale – obwohl sie es voraussetzen – & beziehen sich auf die immer wiederkehrende äußere Form.

Ms-127 12[2] & 13[1]

36 09.01.1943

Unsre Schwierigkeit fängt eigentlich schon mit der unendlichen Geraden an; obwohl wir schon als Knaben lernen, eine Gerade habe kein Ende, & ich weiß nicht, daß diese Idee irgend jemand Schwierigkeiten bereitet hätte. Wie, wenn ein Finitist versuchte diesen Begriff durch den einer geraden Strecke von bestimmter Länge zu ersetzen?!

Aber die Gerade ist ein *Gesetz* des Fortschreitens.*

Ms-127 17[2] Der Begriff des Limes & der Stätigkeit, wie sie heute eingeführt werden, hängen, ohne daß dies ausgesprochen wird mit dem Begriff des *Beweises* zusammen. Denn wir sagen $\lim_{x\to\infty} f(x)=\ell$, wenn *bewiesen* werden kann, daß … Das heißt, wir gebrauchen Begriffe, die unendlich viel schwerer zu fassen sind als die, die wir offen herzeigen.

Ms-127 20[2] & 21[1] & 21[2] & 22[1] **37** 12.01.1943

Die irreführende Idee in der D'schen extensionalen Auffassung ist, daß die reellen Zahlen in der Zahlenlinie alle ausgebreitet da liegen. – Man kennt sie nicht alle, aber was macht das? Und so braucht man nur zu schneiden, oder in Klassen teilen & hat sie alle geteilt, die bekannten & die unbekannten.

Das Irreführende an der D'schen extensionalen Auffassung ist die Idee daß die reellen Zahlen in der Zahlenlinie ausgebreitet daliegen. Man mag sie kennen oder nicht; das macht nichts. Und so braucht man nur zu schneiden, oder in Klassen teilen & has dealt with them all.

Ms-127 22[2] & 23[1] Es ist durch die *Kombination* der *Rechnung & der Konstruktion*, daß man die Idee erhält es müßte auf der Geraden ein Punkt ausgelassen werden, nämlich P,

wenn man nicht die $\sqrt{2}$ als ein Maß der Entfernung von O zuließe. 'Denn, wenn ich wirklich genau konstruierte, so müßte dann der Kreis die Gerade *zwischen* ihren Punkten hindurch schneiden'.

Ms-127 23[2] Das ist ein schrecklich verwirrendes Bild.

Ms-127 15.01.1943
23[3]

Die irrationalen Zahlen sind – könnte man sagen – Einzelfälle.

Ms-127 18.01.1943
24[1]

Was ist die *Anwendung* des Begriffes der Geraden, der ein Punkt fehlt? Die Anwendung muß 'hausbacken' sein. Der Ausdruck "Gerade, der ein Punkt fehlt" ist ein fürchterlich irreleitendes Bild. Der klaffende Spalt zwischen Illustration & Anwendung.

Ms-127 13[3] & 14[1] 38 Die Allgemeinheit der Funktionen ist sozusagen eine *ungeordnete* Allgemeinheit. Und unsere Mathematik ist auf so eine ungeordnete Allgemeinheit aufgebaut.

Ms-127 31[4] & 32[1] 39 Wenn man sich den allgemeinen Funktionen-Kalkül ohne die Existenz von Beispielen denkt, dann sind eben die vagen Erklärungen durch Wertetafeln & Zeichnungen, wie man sie in den Lehrbüchern findet, am Platz, als *Andeutungen*, wie etwa diesem Kalkül einmal ein Sinn gegeben werden möchte.

Ms-127 32[2] Denk' Dir Einer sagte: "Ich will eine Komposition hören, die *so* geht:"

Ms-127 32[3] & 33[1] Müßte das unsinnig sein? Könnte es nicht eine Komposition geben von der sich zeigen ließe daß sie, in irgend einem wichtigen Sinne, dieser Linie entspräche?

Ms-127 36[2] & 37[1] Oder wie, wenn man die Stätigkeit als Eigenschaft des Zeichens "$x^2 + y^2 = z^2$" ansähe – natürlich nur, wenn diese Gleichung & andere *gewohnheitsmäßig* einer bestimmten Art der Prüfung unterzogen würden. '*So* stellt sich diese Regel (Gleichung) zu dieser bestimmten Prüfung.' Eine Prüfung die mit einem Streifblick auf eine Art Extension geschieht.

Ms-127 37[2] & 38[1] Es wird bei jener Prüfung der Gleichung etwas vorgenommen was mit gewissen Extensionen zusammenhängt. Aber nicht als handelte es sich da um eine Extension, die der Gleichung selbst irgendwie äquivalent wäre. Es wird nur auf gewisse Extensionen sozusagen, angespielt. – Nicht die Extension ist hier das Eigentliche, das nur faute de mieux intensional beschrieben wird; sondern die *Intension* wird beschrieben – oder dargestellt – vermittels gewisser Extensionen, die sich da & dort aus ihr ergeben.

Ms-127 38[2] & 39[1] Der Verlauf gewisser Extensionen wirft ein *Streiflicht* auf die algebraische Eigenschaft der Funktion. In diesem Sinne könnte man also sagen, es werfe die Zeichnung einer Hyperbel ein Streiflicht auf die Hyperbelgleichung.

Ms-127 39[2] Dem widerspricht nicht, daß jene Extensionen die wichtigste Anwendung der Regel wären; denn es ist *eines* eine Ellipse zeichnen, & ein anderes, sie *mittels ihrer Gleichung* konstruieren.

Ms-127 39[3] & 40[1] 25.01.1943

Wie, wenn ich sagte: Die extensionalen Überlegungen (z.B. der Heine-Borelsche Satz) zeigen: *so* sollen die Intensionen behandelt werden.

Ms-127 Das Theorem gibt uns, in großen Zügen, eine Methode, wie mit
40[2] Intensionen zu verfahren ist. Es sagt etwa: '*So* wird es ausschauen müssen'.

Ms-127 Und man wird dann etwa zu einem Verfahren mit bestimmten
40[3] & Intensionen eine bestimmte Illustration zeichnen können. Die
41[1] Illustration ist ein Zeichen, eine Beschreibung, die besonders übersichtlich, einprägsam, ist.

Ms-127 Die Illustration wird hier eben ein *Verfahren* angeben.
41[2]

Ms-127 Die Lehre von den Funktionen als ein (allgemeines) Schema, in
42[2] das, einerseits, eine Unmenge von Beispielen paßt, & das, anderseits, als ein Standard zur Klassifikation von Fällen aufgestellt ist.

Ms-127 Das Irreführende der üblichen Darstellung besteht darin, daß
42[3] & es scheint, als ließe sich die allgemeine auch ohne alle Beispiele,
43[1] ohne einen Gedanken an Intension**en** (im Plural) ganz verstehen, da sich eigentlich alles extensional abmachen ließe, wenn es aus äußeren Gründen nicht unmöglich wäre.

Ms-127 27.01.1943
43[2]

Vergleiche die beiden Formen der Erklärung:

"Wir sagen $\mathrm{limn} x \to \infty \Phi(x) = L$,

wenn es sich zeigen läßt, daß ....", & "$\mathrm{limn} \to \infty \Phi(n) = L$ heißt:

es gibt für jedes ε ein δ...."

Ms-127 57[4] & 58[1] & 58[2] & 59[1]

40 Dedekind gibt ein allgemeines Schema der Ausdrucksweise; sozusagen eine logische Form des Raisonnements. Eine allgemeine Formulierung des Vorgangs. Der Effekt ist ein ähnlicher, wie der der Einführung des Wortes “Zuordnung” zur allgemeinen Erklärung der Funktionen. Es wird eine allgemeine Redeweise eingeführt, die zur Charakterisierung eines mathem. Vorgangs sehr nützlich ist. (Ähnlich wie in der Aristotelischen Logik). Die Gefahr aber ist, daß man mit dieser allgemeinen Redeweise die vollständige Erklärung der einzelnen Fälle zu besitzen glaubt (die gleiche Gefahr wie in der Logik).

Ms-127 59[2] & 60[1]

Wir bestimmen den Begriff *der Regel* zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruches weiter & weiter. Aber der Inhalt des Begriffes?! – Nun, können wir denn nicht das Begriffsgebäude ausbauen als Behältnis für welche Anwendung immer daherkommt? Kann ich denn nicht die *Form* ausbauen (die Form zu der mir irgendein Inhalt die *Anregung* geboten hat) & gleichsam eine Sprachform vorbereiten für mögliche Verwendung? Denn diese Form wird auch, wenn sie leer bleibt, die Gestalt der Mathematik bestimmen helfen.

Ms-127 60[2]

25.02.1943

Ist denn nicht die Subjekt-Prädikat-Form in dieser Weise offen & wartet auf die verschiedensten neuen Anwendungen?

Ms-127 60[3] & 61[1] D.h.: ist es wahr, daß die ganze Schwierigkeit, die Allgemeinheit des mathem. Funktionsbegriffs betreffend, schon in der Aristotelischen Logik auftritt, da die Allgemeinheit der Sätze & Prädikate von uns ebensowenig überblickt werden kann, wie die der mathem. Funktionen?

Ms-127 64[4] & 65[1] 41 01.03.1943

Begriffe die in ‘notwendigen’ Sätzen vorkommen müssen auch in nicht-notwendigen auftreten & eine Bedeutung haben.

Ms-127 160[2] & 161[1] 42 Würde man von Einem sagen, er verstehe den Satz “563 + 437 = 1000”, der nicht wüßte, wie man ihn beweisen kann? Kannst Du leugnen, daß es ein Zeichen des Verstehens des Satzes ist, wenn Einer weiß, wie er zu beweisen wäre?

Ms-127 161[4] Das Problem eine mathematische Entscheidung eines Theorems zu finden könnte man mit einigem Recht das Problem nennen einer Formel mathematischen Sinn zu geben.

Ms-127 162[1] Die Gleichung kuppelt (zwei) Begriffe; so daß ich nun von einem zum andern übergehen kann.

Ms-127 162[5] & 163[1] Die Gleichung bildet eine Begriffsbahn. Aber ist eine Begriffsbahn ein Begriff?? Und wenn nicht, ist eine scharfe Grenze zwischen ihnen?

Ms-127 163[2] Denke Du hast jemand eine Technik des Multiplizierens gelehrt. Er verwendet sie in einem Sprachspiel. Damit er nun nicht immer von neuem multiplizieren muß, schreibt er sich die Multiplikation in verkürzter Form, als Gleichungen nämlich auf & benützt diese, wo er früher multipliziert hat.

Ms-127 164[2] & 165[1]

Von der Technik des Multiplizierens sagt er, daß sie Verbindungen zwischen den Begriffen schlägt. Er wird dasselbe auch von der Multiplikation sagen. Und endlich auch von der Gleichung: Denn es ist ja wesentlich, daß sich der Übergang auch einfach durch das Schema der Gleichung muß darstellen lassen. Daß also der Übergang *nicht* immer von neuem gemacht werden muß. Wird er nun aber geneigt sein, vom Prozeß des Multiplizierens zu sagen, er sei ein Begriff?

Ms-127 165[2]

Er ist doch eine *Bewegung*. Eine Bewegung, scheint es, zwischen zwei Ruhepunkten; diese sind die Begriffe.

Ms-127 165[3] & 166[1]

Fasse ich den Beweis als eine *Bewegung* von einem Begriff zum andern auf, dann werde ich von ihm nicht auch sagen wollen er gebe nur einen neuen Begriff Aber kann ich nicht die angeschriebene Multiplikation als *ein* Bild auffassen vergleichbar einem Zahlzeichen, & kann sie nicht auch als Begriffszeichen funktionieren?

Ms-127 167[1]

43 Ich möchte sagen: Wenn wir einmal die eine, einmal die andre Seite der Gleichung verwenden, verwenden wir zwei Seiten desselben Begriffs.

Ms-127 168[1]

44 Ist der begriffliche Apparat ein Begriff?

Ms-127 172[3]

45 Wie zeigt denn einer, daß er einen mathematischen Satz versteht? Darin, etwa, daß er ihn anwendet. Also nicht auch darin, daß er ihn beweist?

Ms-127 172[4]

Ich möchte sagen: der Beweis zeigt mir einen neuen Zusammenhang, daher gibt er mir auch einen neuen Begriff.

Ms-127 173[1] Ist der neue Begriff nicht der Beweis selbst?

Ms-127 173[2] Du kannst doch gewiß, wenn der Beweis erbracht ist, ein neues Urteil bilden. Denn Du kannst doch nun von einer bestimmten Figur sagen, sie sei, oder sei nicht, dieser Beweis.

Ms-127 173[3] & 174[1] Ja, aber ist der Beweis als *Beweis* betrachtet, gedeutet, eine Figur? Als *Beweis*, könnte ich sagen, soll er mich von etwas überzeugen. Ich soll, auf ihn hin, etwas tun, oder lassen. Und auf einen neuen Begriff hin tue, oder lasse ich nichts. Ich will also sagen: der Beweis ist das Beweisbild in bestimmter Art verwendet. Und das, wovon er mich überzeugt kann nun sehr verschiedener Art sein. (Denke an Beweise Russellscher Tautologien, Beweise in der Geometrie, & in der Algebra.)

Ms-127 174[2] Der Mechanismus ... kann mich von etwas überzeugen (kann etwas beweisen). Aber unter welchen Umständen – in welcher Umgebung von Tätigkeiten & Problemen – werde ich sagen er überzeuge mich von etwas?

Ms-127 176[2] “Aber ein Begriff überzeugt mich doch von nichts, denn er zeigt mir nicht eine Tatsache.” – Aber warum soll mich ein Begriff nicht vor allem davon überzeugen, daß ich *ihn* gebrauchen will.

Ms-127 176[3] Warum soll der (neue) Begriff, einmal gebildet, mir nicht unmittelbar den Übergang zu einem Urteil gestatten?

Ms-127 184[3] & 185[1] 46 “Einen math. Satz verstehen” das ist ein sehr vager Begriff. Sagst du aber “Auf’s Verstehen kommt’s überhaupt nicht an. Die math. Sätze sind nur Stellungen in einem Spiel” so ist das auch Unsinn! ‘Mathematik’ ist eben kein scharf umgrenzter Begriff.

Ms-127 185[2] & 186[1]

Daher der Streit ob ein Existenzbeweis der keine Konstruktion ist ein wirklicher Existenzbeweis ist. Es frägt sich nämlich: *verstehe* ich den Satz “Es gibt ...” wenn ich keine Möglichkeit habe zu finden wo es existiert. Und da gibt es zwei Gesichtspunkte: Als deutschen Satz z.B. verstehe ich ihn soweit ich ihn nämlich erklären kann (& merke, wie weit meine Erklärung geht!). Was aber kann ich mit ihm anfangen? Nun nicht das was mit einem Konstruktionsbeweis. Und soweit, was ich mit dem Satz machen kann, das Kriterium seines Verstehens ist soweit ist es nicht *von vornherein* klar, ob & wie weit ich ihn verstehe. Das ist der Fluch des Einbruchs der math. Logik in die Mathematik, daß nun jeder Satz sich in mathematischer Schreibung darstellen läßt & wir uns daher verpflichtet fühlen ihn zu verstehen. Obwohl ja diese Schreibweise nur die Übersetzung der vagen gewöhnlichen Prosa ist.

Ms-127 187[3] & 188[1]

47 Ein Begriff ist nicht wesentlich ein Prädikat. Wir sagen zwar manchmal: “dieses Ding ist keine Flasche” aber es ist dem Sprachspiel mit dem Begriff Flasche gar nicht wesentlich daß solche Urteile darin gefällt werden. Achte eben darauf wie ein Begriffswort (z.B. “Platte”) in einem Sprachspiel gebraucht wird.

Ms-127 188[2]

Es brauchte z.B. gar keinen Satz “dies ist eine Platte” geben; sondern etwa nur den: “hier ist eine Platte”.

Ms-127 188[3] & 189[1] **48** Die “mathem. Logik” hat das Denken von Mathematikern & Philosophen gänzlich verbildet, indem sie eine oberflächliche Deutung der Formen unserer Umgangssprache zur Analyse der Strukturen der Tatsachen erklärte. Sie hat hierin freilich nur auf der Aristotelischen Logik weiter gebaut.

Ms-127 194[2] & 195[1] **49** Es ist schon wahr: das Zahlzeichen gehört zu einem Begriffswort & nur mit diesem ist es, sozusagen, ein Maß.

Ms-127 204[1] & 205[1] **50** Wenn Du dieser Maus ins Maul schaust wirst du zwei lange Schneidezähne sehen. – Wie weißt du das? – Ich weiß daß alle Mäuse sie haben, also auch diese. (Und man sagt nicht: “& dieses Ding ist eine Maus, also hat auch sie ...”) Warum ist das eine so wichtige Bewegung? Nun, wir studieren z.B. Tiere, Pflanzen etc. etc., bilden allgemeine Urteile & wenden sie im einzelnen Fall an. – Es ist aber doch eine Wahrheit daß diese Maus die Eigenschaft hat, *wenn alle* Mäuse sie haben! Das ist eine Bestimmung über die Anwendung des Wortes “alle”: Die tatsächliche Allgemeinheit liegt wo anders. Nämlich *z.B.* in dem allgemeinen Vorkommen jener Untersuchungsmethode & ihrer Anwendung.

Ms-127 205[2] Oder: “Dieser Mann ist ein Student der Math.”. Wie weißt du das? –“Alle Leute in diesem Zimmer sind Mathematiker; es sind nur solche zugelassen worden.” –

Ms-127 205[3] & 206[1] Das interessante Allgemeine ist, daß wir oft ein Mittel haben uns von dem allgemeinen Satz zu überzeugen, ehe wir besondere Fälle in Betracht ziehen: & daß wir dann mittels der allgemeinen Methode den besondern Fall beurteilen.

Ms-127 206[2] Wir haben dem Pförtner den Befehl gegeben nur Leute mit Einladungen hereinzulassen & rechnen nun darauf, daß dieser Mensch, der hereingelassen wurde, eine Einladung hat.

Ms-127 206[3] & 207[1] Das interessante Allgemeine am logischen Satz ist nicht die Tatsache, die er auszusprechen scheint sondern die immer wiederkehrende Situation in der dieser Übergang gemacht wird.

Ms-127 229[4] & 230[1] **51** Wenn man vom Beweis sagt, er zeige *wie* (z.B.) 25 × 25 625 ergeben; so ist das natürlich eine seltsame Redeweise, da das arithmetische Ergeben ja kein zeitlicher Vorgang ist. Aber nun zeigt ja der Beweis auch keinen Vorgang.

Ms-127 230[2] & 231[1] Denke Dir eine Reihe von Bildern. Sie zeigen, wie zwei Leute nach den & den Regeln mit Rapieren fechten. Eine Bilderreihe kann das doch zeigen. Hier bezieht sich das Bild auf eine Wirklichkeit. Man kann nicht sagen, es zeige, *daß* so gefochten wird, aber *wie* gefochten wird. In einem andern Sinne kann man sagen, die Bilder zeigen, wie man in drei Bewegungen von dieser Lage in jene kommen kann. Und nun zeigen sie auch *daß* man auf diese Weise in diese Lage kommen kann.

Ms-127 198[3] **52** Der Philosoph muß sich so drehen & wenden, daß er an den mathematischen Problemen herumkommt, nicht gegen eines rennt, – das gelöst werden müßte ehe er weitergehen kann.

Ms-127 198[4] & Sein Arbeiten in der Philosophie ist gleichsam eine Faulheit in der Mathematik.

199[1] Nicht ein neues Gebäude ist aufzuführen, oder eine neue
Ms-127 Brücke zu schlagen, sondern die Geographie, *wie sie jetzt ist,* zu
199[3] beschreiben.

Ms-127 Wir sehen wohl Stücke der Begriffe, aber nicht klar die
199[4] Abhänge, die den einen in andere übergehen lassen.

Ms-127 Darum hilft es in der Philosophie der Mathematik nichts
200[1] Beweise in neue Formen zu bringen. Obwohl hier eine starke
Versuchung liegt.

Ms-127 Auch vor 500 Jahren konnte es eine Philosophie der
200[2] Mathematik geben, dessen was damals die Mathematik war.

Ms-127 53 Der Philosoph ist der, der in sich viele Krankheiten des
219[4] & Verstandes heilen muß, ehe er zu den Notionen des gesunden
220[1] Menschenverstandes kommen kann.

VI

Ms-164 FCv[1] 1 Die Beweise ordnen die Sätze. Sie geben ihnen Zusammenhang.

Ms-164 FCv[2] 2 Der Begriff einer formalen Prüfung setzt den Begriff einer Regel des Umformens & also einer Technik voraus.

Ms-164 FCv[3] Denn nur durch eine Technik können wir eine Regelmäßigkeit *begreifen*.

Ms-164 FCv[4] & 2[1] Die Technik ist außerhalb des Beweisbildes. Man könnte den Beweis genau sehen & ihn doch nicht als Transformation nach diesen Regeln verstehen.

Ms-164 2[2] Man wird gewiß die Addition der Zahlen ..., um zu sehen ob sie 1000 geben eine formale Prüfung der Zahlzeichen nennen. Aber doch *nur*, wenn das Addieren eine praktizierte Technik ist. Denn wie könnte der Vorgang denn sonst irgendeine Prüfung genannt werden?

Ms-164 2[3] Der Beweis ist eine formale Prüfung nur innerhalb einer *Technik* des Transformierens.

Ms-164 2[4] & 3[1] Wenn Du fragst mit welchem Recht sprichst Du diese Regel aus, so ist die Antwort der Beweis.

Ms-164 3[2] Mit welchem Recht sagst Du das? Mit *welchem* Recht sagst Du das?

Ms-164 3[3] & 4[1] Wie prüfst Du das Thema auf eine kontrapunktische Eigenschaft? Du transformierst es nach *dieser* Regel, setzt es *so* mit einem andern zusammen; u. dergl.. So erhältst Du ein bestimmtes Resultat. Du erklärst es, wie Du es durch ein Experiment auch erhieltest. Soweit konnte, was Du tust, auch ein Experiment sein. Das Wort "erhältst" ist hier zeitlich gebraucht; Du erhieltst das Resultat um 3 Uhr. – In dem mathematischen Satz, den ich dann forme ist das Verbum ("erhält", "ergibt" etc.) unzeitlich gebraucht. Die Tätigkeit der Prüfung brachte das & das Resultat hervor. Die Prüfung war bis jetzt also sozusagen experimentell. Nun wird sie als Beweis aufgefaßt. Und der Beweis ist das *Bild* dieser Prüfung.

Ms-164 5[1] Der Beweis steht hinter dem Satz, wie die Anwendung. Er hängt auch mit der Anwendung zusammen.

Ms-164 5[2] Der Beweis ist der Weg der Prüfung.

Ms-164 5[3] Die Prüfung ist eine formale nur insofern als wir das Ergebnis als einen formalen Satz auffassen.

Ms-164 5[4] & 6[1] 3 Und wenn dieses Bild die Voraussage rechtfertigt – d.h., wenn Du es nur sehen brauchst & überzeugt bist ein Vorgang werde so & so verlaufen – dann rechtfertigt das Bild natürlich auch die Regel. – In diesem Falle steht der Beweis hinter der Regel als Bild, das sie rechtfertigt. − −

Ms-164 6[2] Warum rechtfertigt denn das Bild der Bewegung den Mechanismus des Glaubens, *diese* Bewegung werde diese Art von Mechanismus immer machen? – Es gibt unserm Glauben eine bestimmte Richtung.

Ms-164 6[3] & 7[1] Wenn der Satz in der Anwendung nicht zu stimmen scheint, so muß mir der Beweis doch zeigen warum & wie er stimmen *muß*, d.h. *wie* ich ihn mit der Erfahrung versöhnen muß.

Ms-164 7[2] Der Beweis ist also auch eine Anweisung zur Benutzung der Regel.

Ms-164 7[3] 4 Wie rechtfertigt der Beweis die Regel? – Er zeigt wie, & daher warum sie benützt werden kann.

Ms-164 7[4] & 8[1] Der Läufer des Königs zeigt uns *wie* 8 × 9 72 ergibt – aber da ist die Regel des Zählens nicht als Regel anerkannt. Der Läufer des Königs zeigt uns, *daß* 8 × 9 72 ergibt: Nun erkennen wir die Regel an.

Ms-164 8[2] Oder sollte ich sagen: Der Läufer des Königs zeigt mir wie 9 × 8 72 ergeben *kann*, d.h. er zeigt mir *eine* Weise.

Ms-164 8[3] & 9[1] Der Vorgang zeigt mir ein Wie des Ergebens.

Ms-164 9[2] Insofern 8 × 9 = 72 eine Regel ist heißt es natürlich nichts zu sagen, jemand zeige mir *wie* 8 × 9 = 72 ist; es sei denn dies heiße: jemand zeigt mir wie man zu dieser Regel gekommen ist.

Ms-164 9[3] Ist nun nicht das Durchgehen jedes Beweises ein solcher Vorgang?

Ms-164 9[4] & 10[1] Hieße es etwas zu sagen: “Ich will Dir zeigen wie 8 × 9 zuerst 72 ergab”?

Ms-164 10[2] & 11[1] 5 Das seltsame ist ja, daß das Bild, nicht die Wirklichkeit, einen Satz soll erweisen können! Als spielte hier das Bild selbst die Rolle der Wirklichkeit. – Aber so ist es doch nicht: denn aus dem Bild leite ich nun eine Regel ab. Und die verhält sich zum Bild nicht so, wie der Erfahrungssatz zur Wirklichkeit. – Das Bild zeigt natürlich nicht, daß das & das geschieht. Es zeigt nur daß, was geschieht *so* aufgefaßt werden kann.

Ms-164 11[2] Das Bild zeigt, wie man nach einer Regel vorgeht ohne anzustoßen.

Ms-164 11[3] Man kann also auch sagen: der Vorgang, der Beweis, zeige mir, in wiefern $8 \times 9 = 72$ ist.

Ms-164 11[4] Das Bild zeigt mir natürlich nicht daß etwas geschieht, aber daß was immer geschieht sich so wird anschauen lassen.

Ms-164 11[5] & 12[1] Wir werden dazu gebracht, diese Technik in diesem Falle zu verwenden. Ich werde dazu gebracht – & in**sofern** von etwas, überzeugt.

Sieh, so geben 3 und 2 5. Merke Dir diesen Vorgang. “Du merkst Dir dabei die Regel auch gleich.”

Ms-164 12[2] & 13[1] 6 Der Euklidische Beweis der Endlosigkeit der Primzahlenreihe könnte so geführt werden, daß die Untersuchung der Zahlen zwischen p und p! + 1 an einem Beispiel oder mehreren vorgeführt & uns so eine Technik der Untersuchung gelehrt würde. Die Kraft des Beweises läge dann natürlich nicht darin, daß in diesem Beispiel eine Primzahl > p gefunden würde. Und das ist, auf den ersten Blick, seltsam. Man wird nun sagen daß der algebraische Beweis strenger ist als der durch Beispiele, weil er sozusagen der Extrakt des wesentlichen Prinzips dieser Beispiele ist. Aber *eine* Einkleidung enthält ja der algebraische Beweis auch. *Verstehen* – könnte ich sagen – muß man beide!

Ms-164 13[2] & 14[1] Der Beweis lehrt uns eine Technik, eine Primzahl zwischen p & p! + 1 zu finden. Und wir werden überzeugt, daß diese Technik immer zu *einer* Primzahl > p führen muß. Oder, daß wir uns verrechnet haben, wenn sie es nicht tut.

Ms-164 14[2] & 15[1] Wäre man nun hier geneigt zu sagen, der Beweis zeige uns *wie* es eine unendliche Reihe von Primzahlen gibt? Nun, man könnte es sagen. Und jedenfalls: "inwiefern es unendlich viele Primzahlen gibt". Man könnte sich ja auch denken wir hätten einen Beweis, der uns zwar bestimmte zu sagen, es gebe unendlich viele Primzahlen, aber uns nicht lehrte, eine Primzahl > p zu finden. Nun würde man vielleicht sagen: "diese beiden Beweise, bewiesen dann trotz alledem den gleichen Satz die gleiche math. Tatsache". Dies zu sagen, könnte Grund vorhanden sein, oder auch nicht.

Ms-164 15[2] & 16[1] 7 Der Zuschauer sieht den ganzen, eindrucksvollen Vorgang. Und er wird von etwas überzeugt; denn das ist ja der besondere Eindruck den er erhält. Er geht von dem Schauspiel, überzeugt von etwas. Überzeugt daß er mit andern Zahlen (z.B.) zum selben Ende kommen wird. Er wird bereit sein, das, wovon er überzeugt wurde, so & so auszusprechen. Überzeugt wovon? Von einer psychologischen Tatsache? –

Ms-164 16[2] Er wird sagen, er habe aus dem, was er gesehen hat, einen Schluß gezogen. – *Nicht* aber, wie aus einem Experiment. (Denk an die periodische Division.)

Ms-164 16[3] & 17[1] Könnte er sagen: “Was ich gesehen habe, war sehr eindrucksvoll. Ich habe daraus einen Schluß gezogen. Ich werde in Zukunft ...”? (Etwa: ich werde in Zukunft immer *so* rechnen.)

Er erzählt:

“Ich habe gesehen, daß es so sein muß.”

Ms-164 17[2] “Ich habe gesehen, daß es so sein muß” – so wird er berichten.

Ms-164 17[3] Er wird nun vielleicht im Geiste den Beweisvorgang durchlaufen.

Ms-164 17[4] & 18[1] Aber er sagt nicht: Ich habe gesehen, daß das geschieht. Sondern: daß es so sein muß. Dieses “muß” bedeutet einen Zirkel.

Ms-164 19[1] – – – Sondern: daß es so sein muß. Das zeigt, welche Art der Lehre er aus der Szene gezogen hat. Das “muß” zeigt, daß er einen Zirkel gemacht hat.

Ms-164 18[2] Ich entscheide mich dafür, die Dinge *so* anzusehen. Also auch, so & so zu handeln.

Ms-164 18[3] Ich denke mir, daß der Zuschauer selbst eine Moral aus dem Vorgang zieht.

Ms-164 18[4] Es muß so sein bedeutet, daß der Ausgang als dem Prozeß wesentlich erklärt wurde.

Ms-164 19[2] 8 Dieses Muß zeigt daß er einen Begriff angenommen hat.

Ms-164 19[3] Dieses Muß bedeutet daß er im Kreis gegangen ist.

Ms-164 19[4] & 20[1] Statt einem naturwissenschaftlichen Satz hat er eine Begriffsbestimmung von dem Vorgang abgelesen.

Begriff heißt hier Methode. Im Gegensatz zu der Anwendung der Methode.

Ms-164 20[2] 9 Sieh *so* gibt 50 und 50 100. Man hat etwa sukzessive fünf mal 10 zu 50 addiert.

Und man verfolgt das Anwachsen der Zahl bis sie zu 100 wird. Hier wird natürlich der beobachtete Vorgang ein Vorgang der Rechnung in irgendeiner Weise (auf dem Abakus, etwa), ein Beweis.

Ms-164 20[3] & 21[1] Die Bedeutung des "so" ist natürlich nicht der Satz "50 + 50 = 100" sage: das gehe irgendwo vor. Es ist also nicht wie wenn ich sage: "siehst Du *so* galoppiert ein Pferd" – & ihm Bilder zeige.

Ms-164 21[2] Man könnte aber sagen: "Siehst Du, *darum* sage ich '50 + 50 = 100'".

Ms-164 21[3] Oder: "Siehst Du, *so* erhalte ich (oder: erhält man) den Satz, daß 50 + 50 = 100 ist."

Ms-164 21[4] & 22[1] & 23[1] Wenn ich nun aber sage: "Sieh' *so* ergibt 3 + 2 5" & lege dabei 3 Äpfel auf den Tisch & dann 2 dazu; so will ich etwa sagen: 3 Äpfel & 2 Äpfel geben 5 Äpfel, wenn keiner wegkommt, oder dazu kommt. – Oder man könnte Einem auch sagen: Wenn Du (wie ich jetzt) 3 Äpfel & dann noch 2 auf den Tisch legst so geschieht fast immer das, was Du jetzt siehst & es liegen nun 5 Äpfel da. Ich will ihm etwa zeigen, daß 3 Äpfel & 2 Äpfel nicht *so* 5 Äpfel ergeben, wie sie 6 Äpfel ergeben können (indem etwa plötzlich einer erscheint). Das ist eigentlich eine Erklärung, Definition der Operation des Addierens. So könnte man ja wirklich das Addieren mit dem Abakus erklären.

Ms-164 23[2] "Wenn wir 3 Dinge zu 2 Dingen legen so kann das verschiedene Anzahlen von Dingen ergeben. Aber als *Norm* sehen wir den Vorgang an daß 3 Dinge + 2 Dinge 5 Dinge ergeben. Siehst Du, *so* schaut es aus wenn sie 5 ergeben."

Ms-164 23[3] & 24[1] Könnte man dem Kind nicht sagen: "Zeig mir wie 3 + 2 5 ergeben". Und das Kind hätte daraufhin auf dem Abakus 3 + 2 zu rechnen.

Ms-164 24[2] Wenn man das Kind im Rechenunterricht fragte “wie ergeben 3 + 3 5?” – was soll es da zeigen? Nun, es soll offenbar 3 Kugeln zu 2 Kugeln schieben + die Kugeln zählen (oder dergleichen).

Ms-164 24[3] & 25[1] Könnte man nicht fragen: “Zeig mir wie dieses Thema einen Kanon gibt”. Und wer so gefragt wurde müßte nun beweisen, daß es einen Kanon gibt. – Man würde den “*wie*” fragen, den man zeigen lassen will, daß er überhaupt versteht wovon hier die Rede ist.

Ms-164 25[2] Und wenn das Kind nun zeigt, wie 3 + 2 5 geben, so zeigt es einen Vorgang, der als Grund der Regel “2 + 3 = 5” betrachtet werden kann.

Ms-164 25[3] & 26[1] 10 Wie aber, wenn man den Schüler fragt: “Zeig mir, wie es unendlich viele Primzahlen gibt” – Hier ist die Grammatik zweifelhaft! Es ginge aber an zu sagen: “Zeig mir, inwiefern man sagen kann, es gäbe unendlich viele Primzahlen”.

Ms-164 26[2] & 27[1] Wenn man sagt: “Zeig mir, daß es ...” so ist die Frage, *ob es* ..., schon gestellt & nur noch “ja” oder “nein” zu sagen. Sagt man “zeig mir, *wie* es ...” so ist hier das Sprachspiel, überhaupt, erst zu erklären. Man hat jedenfalls noch keinen *klaren* Begriff davon, was es mit dieser Behauptung überhaupt soll. (Man fragt sozusagen: “wie kann so eine Behauptung überhaupt gerechtfertigt werden?”)

Ms-164 27[2] Soll ich nun eine andre Antwort geben auf die Frage: “Zeig mir, wie ...” als auf die Frage: “Zeig mir, daß ...”?

Ms-164 27[3] Du ziehst aus dem Beweis eine Lehre. Wenn Du aus dem Beweis eine Lehre ziehst, so muß ihr Sinn unabhängig sein vom Beweis, denn sonst hätte sie nie vom Beweis getrennt werden können. Ähnlich kann ich die Konstruktionslinien in einer Zeichnung wegwischen & das Übrige stehen lassen.

Ms-164 27[4] & 28[1] Es ist also als bestimmte der Beweis den Sinn des bewiesenen Satzes nicht; & doch wieder als bestimmte er ihn.

Ms-164 28[2] Aber ist das nicht so mit jeder Verifikation eines jeden Satzes?

Ms-164 28[3] & 29[1] & 30[1] **11** Ich glaube: Nur in einem bestimmten großen Zusammenhang kann man überhaupt sagen es gäbe unendlich viele Primzahlen. D.h.: Es muß dazu schon eine ausgedehnte Technik des Rechnens mit den Kardinalzahlen geben. Nur innerhalb dieser Technik hat dieser Satz Sinn. Ein Beweis des Satzes gibt ihm seinen Platz im ganzen System der Rechnungen. Und dieser Platz kann nun auf mehr als eine Weise beschrieben werden, da ja das ganze komplizierte System im Hintergrund *doch* vorausgesetzt wird.

Wenn z.B. 3 Koordinatensysteme einander in bestimmter Weise zugeordnet sind, so kann ich nun die Lage eines Punktes zu allen dadurch bestimmen daß ich sie zu irgendeinem angebe.

Ms-164 30[2] Der Beweis eines Satzes erwähnt ja nicht, beschreibt ja nicht, das ganze Rechnungssystem das hinter dem Satz steht & ihm seinen Sinn gibt.

Ms-164 30[3] & 31[1]

Nimm an ein Erwachsener mit Intelligenz & Erfahrung hat nur die ersten Elemente des Rechnens gelernt etwa die vier Grundrechenoperationen mit Zahlen bis zu 20. Er hat dabei auch das Wort "Primzahl" kennen gelernt. Und diesem sagte jemand: Ich werde Dir beweisen daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Nun wie kann er es ihm beweisen? Er muß ihm *rechnen lehren*. Das ist hier ein Teil des Beweisens. Er muß der Frage "Gibt es unendlich viele Primzahlen" sozusagen erst Sinn geben.

Ms-164 31[2] & 32[1]

12 Die Philosophie hat sich mit *der* Versuchung des Mißverstehens auseinander zu setzen, die auf *dieser* Stufe des Wissens bestehen. (Auf einer andern Stufe bestehen wieder neue.) Aber das macht das Philosophieren nicht leichter!

Ms-164 32[2] & 33[1]

13 Ist es nun nicht absurd zu sagen, man verstehe den Sinn des Fermatschen Satzes nicht? – Nun, man könnte antworten: die Mathematiker stehen ja diesem Satz nicht *ganz* ratlos gegenüber. Sie versuchen doch jedenfalls gewisse Methoden des Beweisens; und, sofern sie Methoden versuchen, *soweit* verstehen sie den Satz. – Aber ist das richtig? *Verstehen* sie ihn nicht so vollständig als man ihn nur verstehen kann?

Ms-164 33[2]

Nun, nehmen wir an es würde sein Gegenteil bewiesen, ganz gegen die Erwartung der Mathematiker. Man zeigt also nun, es *könne* gar nicht so sein.

Ms-164 33[3] & 34[1]

Aber muß ich denn nicht, um zu wissen, was ein Satz wie der Fermatsche bedeutet, wissen was das Kriterium dafür ist, daß der Satz wahr ist? Und ich kenne freilich Kriterien für die Wahrheit *ähnlicher* Sätze aber kein Kriterium der Wahrheit dieses Satzes.

Ms-164 34[2]

'Verstehen' ein vager Begriff!

Ms-164 34[3]

Erstens, es gibt so etwas wie: einen Satz zu verstehen *glauben*. Und ist Verstehen ein psychischer Vorgang – warum soll er uns so sehr interessieren? Es sei denn daß er erfahrungsmäßig mit der Fähigkeit, vom Satz Gebrauch zu machen, verbunden ist.

Ms-164 35[1]

"Zeig mir, wie ..." heißt: zeig mir, in welchem Zusammenhang Du diesen Satz (dieses Maschinenteil) gebrauchst.

Ms-164 35[2]

14 Ich werde Dir zeigen, wie es unendlich viele Primzahlen gibt, setzt einen Zustand voraus, in welchem der Satz, daß es unendlich viele Primzahlen gebe für den Andern keine, oder nur die vagste Bedeutung hatte. Es mochte für ihn nur ein Scherz oder ein Paradox sein.

Ms-164 36[1] & 37[1]

Wenn dieser Vorgang Dich davon überzeugt dann muß er sehr eindrucksvoll sein. – Aber ist er es? – Nicht besonders. Warum ist er es nicht *mehr*? Ich glaube er wäre nur dann eindrucksvoll wenn man ihn von Grund auf erklärte. Wenn man z.B. nicht bloß $p! + 1$ hinschriebe, sondern es vorher erklärte & mit Beispielen illustrierte. Wenn man also die Technik nicht als etwas Selbstverständliches voraussetzte sondern sie darstellte.

Ms-164 37[2]

15

Wir kopieren das Zeichen “2” rechts herum immer von dem zuletzt geschriebenen. Wenn wir richtig kopieren so ist das letzte Zeichen wieder eine Kopie des ersten.

Ms-164 37[3] & 38[1] Ein Sprachspiel

.

Einer sagt dem Andern das Resultat voraus. Der Andre zieht die Pfeile & ist gespannt darauf, wie sie ihn führen werden & er freut sich daran, wie sie ihn endlich zum vorausgesagten Resultat hin führen. Er reagiert *etwa* ähnlich darauf, wie man auf einen Witz reagiert.

A mag das Resultat zuvor konstruiert, oder nur erraten haben. B weiß davon nichts & es interessiert ihn nicht.

Ms-164 38[2] & 39[1] Wenn er die Regel auch kannte, so war er ihr doch noch nie *so* gefolgt. Er *tut* jetzt etwas *Neues*. Es gibt aber auch eine Neugierde & Überraschung wenn man den Weg schon gegangen ist. So kann man eine Geschichte wieder & wieder lesen, ja sie auswendig wissen & dennoch immer wieder von einer bestimmten Wendung überrascht sein.

Ms-164 39[2] & 40[1] Ehe ich den beiden Pfeilen

gefolgt bin

,

weiß ich nicht, wie der Weg, oder die Resultante, ausschauen wird. Ich kenne das Gesicht nicht, das ich erhalten werde. Ist es sonderbar, daß ich es nicht kannte? Wie sollte ich’s denn kennen. Ich hatte es ja nie gesehen! Ich kannte die Regel & beherrschte sie, & sah das Pfeilbüschel. –

Ms-164 40[2] & 41[1] ~~Und wenn ich annehme, daß A das Resultat zuvor nicht konstruiert hat, ist seine Voraussage dann nicht (offenbar) eine echte Voraussage?~~

Warum war es aber dann keine echte Voraussage "wenn Du der Regel folgen wirst, wirst Du dies erzeugen"? Während das gewiß eine echte Vorhersage ist: "wenn Du nach bestem Wissen & Gewissen der Regel folgen wirst, so wirst Du …". Die Antwort ist: das erste ist keine Voraussage weil ich auch sagen konnte: "wenn Du der Regel folgen wirst, so *mußt* Du dies erzeugen." Es ist dann keine Voraussage, wenn der Begriff des *Folgens* nach der Regel so bestimmt ist, daß das Resultat das Kriterium dafür ist, ob der Regel gefolgt wurde.

Ms-164 42[1] A sagt: "Wenn Du der Regel folgst, wirst Du *das* erhalten", oder er sagt einfach: "Du wirst das erhalten". Dabei zeichnet er den resultierenden Pfeil hin.

Ms-164 42[2] & 43[1] War nun, was A sagte, in diesem Spiele eine Voraussage? Nun zum Teufel, in gewissem Sinne: Ja! Wird das nicht besonders klar, wenn wir annehmen, daß die Voraussage *falsch* war? Eine Voraussage war es nur dann nicht, wenn die *Bedingung* den Satz zum Pleonasmus machte. A hätte sagen können: "Wenn Du mit jedem Deiner Schritte einverstanden sein wirst, dann wirst Du *dahin* kommen".

Ms-164 43[2] & 44[1]

Nimm an während B das Polygon zieht, veränderten die Pfeile des Büschels ein wenig ihre Richtung. B zieht immer einen Pfeil parallel, so wie er in diesem Augenblick gerade ist. Er ist nun ebenso überrascht & gespannt wie in dem vorigen Spiel obwohl hier das Ergebnis nicht das einer Rechnung ist. Er hat also das erste Spiel so aufgefaßt wie das zweite.

Ms-164 44[2]

“Wenn Du der Regel folgen wirst, wirst Du dahin gelangen” ist darum keine Voraussage, weil dieser Satz einfach sagt “Das Resultat dieser Rechnung ist ...” und das ist ein wahrer, oder falscher math. Satz. Die Anspielung auf die Zukunft & auf Dich ist nur Einkleidung.

Ms-164 44[3] & 45[1]

Muß denn A überhaupt einen klaren Begriff davon haben ob seine Voraussage mathematisch oder anders gemeint ist?! Er sagt einfach “Wenn Du der Regel folgst wird ... herauskommen” & freut sich etwa an dem Spiel. Wenn z.B. das Vorausgesagte nicht herauskommt, untersucht er nicht weiter.

Ms-164 45[2]

16 – – – Und diese Reihe ist durch eine Regel definiert. Oder auch durch die Abrichtung zum Vorgehen nach der Regel. Und der unerbittliche Satz ist, daß nach dieser Regel diese Zahl auf diese folgt.

Ms-164 45[3] & 46[1]

Und dieser Satz ist kein Erfahrungssatz. Aber warum kein Erfahrungssatz? Eine Regel ist doch etwas, wonach wir vorgehen & ein Zahlzeichen aus einem andern erzeugen. Ist es also nicht eine Erfahrung, daß diese Regel jemand von hier dorthin führt.

Ms-164 46[2] Und führt sie ihn einmal von 4 zu 5, so vielleicht ein andermal von 4 zu 7. Warum ist das unmöglich?

Es fragt sich, was wir zum Kriterium des Vorgehens nach der Regel nehmen. Ist es z.B. ein Gefühl der Befriedigung, das den Akt des Vorgehens nach der Regel begleitet? Oder eine Intuition (Eingebung) die mir sagt daß ich richtig gegangen bin? Oder sind es gewisse praktische Folgen des Vorgehens, die bestimmen, ob ich wirklich der Regel gefolgt bin? – Dann wäre es möglich, daß 4 + 1 manchmal 5 manchmal etwas anderes ergäbe. Es wäre *denkbar*, d.h.: eine experimentelle Untersuchung würde zeigen, ob 4 + 1 immer 5 ergibt.

Ms-164 47[2] & 48[1] Soll es kein Erfahrungssatz sein, daß die Regel von 4 zu 5 führt, so muß *dies*, das Ergebnis, zum Kriterium dafür genommen werden, daß man nach der Regel vorgegangen ist.

Ms-164 48[2] Die Wahrheit des Satzes, daß 4 + 1 5 ergibt, ist also, sozusagen, *überbestimmt*. Überbestimmt dadurch, daß man das Resultat der Operation zum Kriterium dafür erklärt, daß diese Operation ausgeführt ist.

Ms-164 48[3] & 49[1] Der Satz ruht nun auf einem Fuß mehr, als der Erfahrungssatz der ihm gleich lautet. Er wird zu einer Bestimmung. Und wir können ihn zu einem neuen Sprachspiel verwenden: Wir beurteilen ob einer der Regel richtig oder unrichtig folgt dadurch ob er dies oder ein andres Resultat erhält. Wir können nämlich jetzt in anderem Sinne beurteilen, ob jemand der Regel gefolgt ist.

Ms-164 49[2] & 50[1] 4 + 1 = 5 ist daher nun selbst eine Regel nach welcher wir Vorgänge beurteilen. Diese Regel ist das Ergebnis eines Vorgangs den wir als maßgebend zur Beurteilung anderer Vorgänge ansehen. Dieser Vorgang ist der Beweis der Regel.

Ms-164 50[2] 17 Wie beschreibt man den Vorgang des Lernens einer Regel? – Immer wenn A in die Hände klatscht soll B es auch tun.

Ms-164 50[3] Erinnere Dich daran, daß die Beschreibung eines Sprachspiels schon eine Beschreibung ist.

Ms-164 50[4] & 51[1] Ich kann jemand zu einer *gleichmäßigen* Tätigkeit abrichten. Etwa dazu mit Bleistift auf Papier eine Linie dieser Art zu ziehen: – · · – · · – · · – · · – · · – · · – · ·

Ms-164 52[3] & 53[1] – – – Nun frage ich mich, was wünsche ich also, daß er tun soll? Die Antwort ist: “Er soll immer so weiter gehen, wie ich es ihm gezeigt habe”. Und was meine ich eigentlich damit: er solle immer so weitergehen? Die beste Antwort die ich mir darauf geben kann ist ein Beispiel von der Art, wie ich es gerade gegeben habe.

Ms-164 53[2] Dieses Beispiel würde ich verwenden um ihm, aber auch mir selbst, zu sagen, was ich unter gleichmäßig verstehe.

Ms-164 51[2] Wir reden & handeln. Das ist in allem, was ich sage schon vorausgesetzt.

Ms-164 52[1] Ich sage ihm: “So ist es recht” & dieser Ausdruck ist der Träger eines Tones einer Gebärde. Ich lasse ihn gewähren. Oder ich sage: “Nein!” & halte ihn zurück.

Ms-164 52[2] **18** Heißt, was ich sage, daß ‘einer Regel folgen’ undefinierbar ist. Nein. Ich kann es doch auf unzählige Weisen definieren. Nur nützen *uns* hier diese Definitionen nichts.

Ms-164 53[3] & 54[1] **19** Ich könnte ihn nun auch einen Befehl verstehen lehren von der Form

(– · ·) → oder (– · · · · –) →

(Der Leser errät, was ich meine.)

Ms-164 54[2] Nun, was will ich, daß er tun soll. Die beste Antwort, die ich mir selbst darauf geben kann, ist diese Befehle ein Stück weit auszuführen. Oder glaubst Du, ein algebraischer Ausdruck dieser Regel setze weniger voraus?

Ms-164 54[3] & 55[1] Und nun richte ich ihn dazu ab, der Regel

– · – · · · – · · · etc.

zu folgen. Und wieder weiß ich selbst nicht mehr darüber was ich von ihm will, als was mir das Beispiel selbst zeigt. Ich kann freilich die Regel in allerlei Form paraphrasieren, aber das macht sie nur dem verständlicher, der schon diesen Paraphrasen folgen kann.

Ms-164 55[2] **20** So habe ich also Einem etwa das Zählen & Multiplizieren im Dezimalsystem beigebracht. “365 × 428” ist ein Befehl & er befolgt ihn, indem er die Multiplikation ausführt.

Ms-164 56[2] Dabei bestehen wir darauf daß der gleiche Ansatz immer das gleiche Multiplikationsbild im Gefolge hat, also auch das gleiche Resultat. Verschiedene Multiplikationsbilder mit dem gleichen Ansatz erkennen wir nicht an.

Ms-164 56[3] & 57[1] Es wird hier nun die Situation eintreten, daß der Rechnende Rechenfehler macht; & auch die daß er die Rechenfehler richtig stellt.

Ms-164 55[3] & 56[1] Ein weiteres Sprachspiel ist dieses: Er wird gefragt "wieviel ist "365 × 428"?" Und auf diese Frage kann er zweierlei tun. Entweder die Multiplikation ausführen, oder wenn er sie früher schon ausgeführt hat, das Resultat der ersten Ausführung ablesen.

Ms-164 57[2] **21** Der Begriff 'einer Regel folgen' setzt eine Gepflogenheit voraus. Daher wäre es Unsinn, zu sagen: einmal in der Geschichte der Menschheit sei jemand einer Regel gefolgt. (Habe ein Spiel gespielt, einen Satz ausgesprochen oder einen verstanden; u.s.f.)

Ms-164 57[3] & 58[1] Hier ist nichts schwerer, als sich nicht in Pleonasmen zu verlieren & nur zu sagen, was wirklich etwas beschreibt.

Ms-164 58[2] Denn hier ist die Versuchung überwältigend, noch etwas zu sagen, wenn schon alles beschrieben ist.

Ms-164 58[3] & 59[1] Es ist von der größten Wichtigkeit daß zwischen den Menschen beinahe nie ein Streit darüber entsteht, ob die Farbe dieses Gegenstandes dieselbe ist wie die Farbe jenes, die Länge dieses Stabes dieselbe wie die Länge jenes etc. Diese friedliche Übereinstimmung ist die charakteristische Umgebung des Gebrauchs des Wortes "gleich".

Ms-164 59[2] Und analoges muß man vom Vorgehen nach einer Regel sagen.

Ms-164 59[4] Es bricht kein Streit darüber aus, ob der Regel gemäß vorgegangen wurde, oder nicht.

Es kommt darüber z.B. nicht zu Tätlichkeiten.

Ms-164 59[5] & 60[1] Das ist das Gerüst, von dem aus unsere Sprache wirkt (z.B. eine Beschreibung gibt.)

Ms-164 60[2] **22** Es sagt nun jemand, daß in der Kardinalzahlenreihe, die der Regel " + 1" gehorcht, welche Regel uns so & so beigebracht wurde, 450 auf 449 folgt. Das ist nun nicht der Erfahrungssatz, daß wir von 449 zu 450 kommen wenn es uns scheint wir hätten die Operation + 1 auf 449 angewandt. Vielmehr ist es die Bestimmung wir haben diese Operation nur dann angewandt wenn das Resultat 450 ist.

Ms-164 61[1] Wir haben den Erfahrungssatz (sozusagen) zur Regel verhärtet. Und es ist nun keine Behauptung die wir durch die Erfahrung prüfen sondern ein Paradigma das zur Darstellung der Erfahrung dient. Mit diesem Paradigma spielen wir nun ein neues Sprachspiel.

Ms-164 62[1] Ein Urteil nämlich ist "Er hat 25 × 25 gerechnet war dabei aufmerksam & gewissenhaft & hat 615 erhalten" & ein anderes "Er hat 25 × 25 gerechnet ..., sich aber verrechnet & statt 625 615 herausgebracht". Aber kommen beide Urteile nicht auf das selbe hinaus?

Ms-164 62[2] & 63[1] Der arithmetische Satz ist nicht der Erfahrungssatz: "wenn ich *das* tue, so erhalte ich *das*" – wo das Kriterium dafür daß ich *das* tue nicht sein darf was dabei herauskommt.

Ms-164 63[2] 23 Könnten wir uns nicht denken, daß es beim Multiplizieren hauptsächlich darauf ankäme den Geist in bestimmter Weise zu konzentrieren & daß dann zwar bei dem gleichen Ansatz nicht immer das Gleiche herauskommt aber für die bestimmten praktischen Probleme die wir lösen wollen gerade diese Verschiedenheiten des Resultats vorteilhaft wären.

Ms-164 63[3] & 64[1] Ist die Hauptsache nicht die, daß beim *Rechnen* das Hauptgewicht darauf gelegt wird ob richtig oder falsch gerechnet wurde & abgezogen vom psychischen Zustand etc. des Rechnenden?

Ms-164 64[2] & 65[1] Die Rechtfertigung des Satzes 25 × 25 = 625 ist natürlich, daß das Multiplizieren von 25 mit 25 625 ergibt. Aber 25 × 25 = 625 ist nicht diese Aussage, sondern die, daß 25 × 25 625 ergeben *soll*.

Ms-164 66[1] & 67[1] Wollen wir eine Rechnung praktisch benutzen so überzeugen wir uns davon daß "richtig gerechnet" wurde, daß das *richtige* Resultat erhalten wurde. Und das richtige Resultat der Multiplikation z.B. darf nur *eins* sein & hängt nicht davon ab, was die *Anwendung* der Rechnung ergeben wird. Wir beurteilen also die Fakten mit Hilfe der Rechnung ganz anders als wir es täten wenn wir das Resultat der Rechnung nicht als etwas ein für allemal bestimmtes ansahen.

Ms-164 67[2] Nicht Empirie, & doch Realismus in der Philosophie, das ist das Schwerste. (Gegen Ramsey)

Ms-164 67[3] Du verstehst von der Regel selbst nicht mehr als Du erklären kannst.

Ms-164 67[4] & 68[1] 24 "Ich habe einen bestimmten Begriff von der Regel. Wenn man ihr in diesem Sinne folgt, so kann man von dieser Zahl nur zu dieser kommen." Das ist eine spontane Entscheidung.

Ms-164 68[2] Warum sage ich aber "ich *muß*", wenn es meine Entscheidung ist? Ja kann ich mich denn nicht entscheiden müssen.

Ms-164 68[3] Heißt, daß es eine spontane Entscheidung ist, nicht nur: So handle ich; frage nach keinem Grunde!

Ms-164 68[4] Du sagst, Du mußt; aber kannst nicht sagen, was Dich zwingt.

Ms-164 68[5] & 69[1] Ich habe einen bestimmten Begriff von der Regel. Ich *weiß* was ich in jedem besonderen Fall zu tun habe. Ich weiß, d.h., ich zweifle nicht, es ist mir offenbar. Ich sage: "selbstverständlich". Ich kann keinen Grund angeben.

Ms-164 69[2] Wenn ich sage: “ich entscheide spontan”, so heißt das natürlich nicht: ich überlege, welche Zahl hier wohl die beste wäre & entscheide mich dann für …

Ms-164 69[3] & 72[1] Wir sagen: “Zuerst muß richtig gerechnet sein, dann wird sich zeigen was die Naturbetrachtung ergibt.” Die richtige Rechnung ist, das Schema, wonach die Phänomene beurteilt werden.

Ms-164 72[2] & 73[1] 25 Es hat einer die Regel des Zählens im Dezimalsystem gelernt. Jetzt vergnügt er sich damit Zahl auf Zahl der “natürlichen Zahlenreihe” hinzuschreiben.

Oder er befolgt den Befehl im Sprachspiel “schreibe den Nachfolger der Zahl … in der Reihe … hin”. – Wie kann ich dieses Sprachspiel jemandem erklären? Nun, ich kann ein Beispiel (oder Beispiele) beschreiben. – Um zu sehen, ob er das Sprachspiel verstanden hat, kann ich ihn Beispiele rechnen lassen.

Ms-164 73[2] & 74[1] Wie, wenn Einer die Multiplikationstafeln, Logarithmentafeln etc. nachrechnete, weil er ihnen nicht traute. Kommt er zu einem andern Resultat so traut er diesem & sagt, er hätte seinen Geist so auf die Regeln konzentriert, daß sein Resultat als das richtige zu gelten habe. Weist man ihm einen Fehler nach, so sagt er, er zweifle lieber an der Zuverlässigkeit seines Verstandes & seiner Sinne *jetzt*, als damals wie er die Rechnung zuerst gemacht hatte.

Ms-164 74[2] & 75[1] Wir können die Übereinstimmung in allen Fragen des Rechnens als gegeben annehmen. Aber macht es nun einen Unterschied, ob wir den Rechensatz als Erfahrungssatz oder als Regel aussprechen?

Ms-164 75[2] 26 Würden wir denn die Regel $25^2 = 625$ anerkennen wenn wir nicht Alle immer zu diesem Resultat kämen? Nun, warum sollen wir dann nicht den Erfahrungssatz statt der Regel benutzen können? – Ist die Antwort hierauf: weil das Gegenteil des Erfahrungssatzes nicht dem Gegenteil der Regel entspricht.

Ms-164 75[3] & 76[1] Wenn ich Dir ein Stück einer Reihe hinschreibe, daß Du dann *diese* Gesetzmäßigkeit in ihr siehst, das kann man eine Erfahrungstatsache, eine psychologische Tatsache, nennen. Aber, *wenn* Du dies Gesetz in ihr erblickt hast, daß Du dann die Reihe *so* fortsetzt, das ist keine Erfahrungstatsache mehr. Aber wieso ist es keine Erfahrungstatsache: denn "*dies* in ihr erblicken" wär ja doch nicht das *Gleiche* wie: sie so fortsetzen! Nur so kann man sagen dies sei keine Erfahrungstatsache, daß man den Schritt auf dieser Stufe für den dem Regelausdruck entsprechenden erklärt.

Ms-164 77[1] Du sagst also: "Nach der Regel die *ich* in dieser Folge sehe, geht es *so* weiter." Nicht: erfahrungsgemäß! Sondern, das ist eben der Sinn dieser Regel.

Ms-164 77[2] Ich verstehe: Du sagst: "das ist nicht erfahrungsgemäß" – ist es aber nicht doch erfahrungsgemäß?

Ms-164 77[3] & 78[1]

“Nach dieser Regel geht es so”, d.h., Du *gibst* dieser Regel eine Extension. Warum kann ich ihr aber nicht heute die, morgen jene Extension geben?

Ms-164 78[2]

Nun ich kann es tun. Ich könnte ihr z.B. abwechselnd eine von zwei Interpretationen geben.

Ms-164 78[3]

27 Habe ich einmal eine Regel aufgefaßt, so bin ich nun in meinem Fortschreiten *gebunden*. Aber das heißt natürlich nur, ich bin in meinem *Urteilen* gebunden darüber, was der Regel gemäß ist, & was nicht.

Ms-164 78[4] & 79[1]

Wenn ich nun eine Regel in der mir gegebenen Folge sehe; – kann das einfach darin bestehen, daß ich, z.B., einen algebraischen Ausdruck vor mir sehe? Muß der nicht einer Sprache angehören?

Ms-164 79[2]

Einer schreibt eine Folge von Zahlen an. Endlich sage ich: “Jetzt verstehe ich’s: ich muß immer – – –”. Und dies ist doch der Ausdruck der Regel. Aber doch nur in einer Sprache!

Ms-164 79[3] & 80[1]

Wann sage ich denn, ich sehe die Regel – oder eine Regel – in dieser Folge. Wenn ich z.B. zu mir selbst über diese Folge in bestimmter Weise reden kann. Aber nicht auch einfach, wenn ich sie fortsetzen kann? Nein ich erkläre mir selbst oder einem Andern allgemein wie sie fortzusetzen ist. Aber könnte ich diese Erklärung nicht bloß in Gesten geben, also ohne eine eigentliche Sprache?

Ms-164 80[2] & 81[1]

28 Jemand fragt mich: “was ist die Farbe dieser Blume.” Ich antworte: “rot”. – Bist Du absolut sicher? Ja, absolut sicher! Aber konnte ich mich nicht täuschen & die falsche Farbe “rot” nennen? Nein. Die Sicherheit mit der ich die Farbe “rot” benenne ist die Starrheit des Maßstabs, ist die Starrheit von der ich ausgehe. Sie ist in meiner Beschreibung nicht in Zweifel zu ziehen. Dies charakterisiert eben, was wir beschreiben nennen. (Ich kann natürlich auch hier ein Versprechen annehmen, aber nichts anderes.)

Ms-164 81[2]

Das Folgen nach der Regel ist am *Grunde* unseres Sprachspiels. Es charakterisiert das, was wir Beschreibung nennen.

Ms-164 82[1]

Das ist die Ähnlichkeit meiner Betrachtung mit der Relativitätstheorie, daß sie sozusagen eine Betrachtung über die Uhren ist mit denen wir die Ereignisse vergleichen.

Ms-164 82[2]

Ist $25^2 = 625$ eine Erfahrungstatsache? Du möchtest sagen: “Nein”. – Warum nicht? – “Weil es nach den Regeln nicht anders sein kann.” – Und warum das? – Weil das die Bedeutung der Regeln ist. Weil das der Vorgang ist, auf dem wir alle Urteile aufbauen.

Ms-164 83[1]

29 Wenn wir die Multiplikation ausführen, so legen wir ein Gesetz nieder. Was ist aber der Unterschied zwischen dem Gesetz & dem Erfahrungssatz: daß wir dieses Gesetz geben?

Ms-164 83[2] & 84[1]

Wenn man mich die Regel gelehrt hat, das Ornament

zu wiederholen & man sagt mir nun “gehe so weiter!”: wie weiß ich, was ich das nächste mal zu tun habe? – Nun ich tue es mit Sicherheit, ich werde es auch zu verteidigen wissen.

Nämlich bis zu einem gewissen Punkt. Wenn das keine Verteidigung sein soll, dann gibt es keine.

Ms-164 84[2] "So wie ich die Regel verstehe, folgt *das*."

Ms-164 84[3] Einer Regel folgen ist eine menschliche Tätigkeit.

Ms-164 84[4] Ich gebe der Regel eine Extension.

Ms-164 84[5] & 85[1] Könnte ich sagen: "Sieh da, wenn ich dem Befehl folge ziehe ich diese Linie". Nun in gewissen Fällen werde ich das sagen. Wenn ich z.B. eine Kurve nach einer Gleichung konstruiert habe.

Ms-164 85[2] "Sieh da! Wenn ich dem Befehl folge, tue ich *dies*!" Das soll natürlich nicht heißen: wenn ich dem Befehl folge, folge ich dem Befehl. Ich muß also für dieses "dies" eine andere Identifizierung haben.

Ms-164 85[3] "Also *so* sieht die Befolgung dieses Befehls aus!"

Ms-164 85[4] & 86[1] Kann ich sagen: "Erfahrung lehrt mich: wenn ich die Regel *so* auffasse, daß ich dann *das* tun muß."? Man kann es nicht sagen wenn ich das So-Auffassen & So-Fortsetzen als Eins betrachte .

Ms-164 86[2] Einer Transformationsregel folgen ist nicht problematischer als der Regel folgen: "schreibe immer wieder das Gleiche". Denn die Transformation ist eine Art der Identität.

Ms-164 86[3] & 87[1] 30 Man könnte doch fragen: Wenn alle Menschen, die so erzogen sind ohnehin *so* rechnen, oder sich doch wenigstens auf *diese* Rechnung als die richtige einigen; wozu braucht man das *Gesetz*?

Ms-164 87[2] “$25^2 = 625$” kann darum nicht der Erfahrungssatz sein, daß die Menschen so rechnen, weil $25^2 \neq 625$ dann nicht der Satz wäre daß die Menschen nicht dieses, sondern ein anderes Resultat erhalten; & auch wahr sein könnte wenn die Menschen überhaupt nicht rechneten.

Ms-164 88[1] Die Übereinstimmung der Menschen im Rechnen ist keine Übereinstimmung der Meinungen oder Überzeugungen.

Ms-164 88[2] Könnte man sagen: “Beim Rechnen kommen Dir die Regeln unerbittlich vor; Du fühlst, Du kannst nur das tun & nichts andres, wenn Du der Regel folgen willst”?

Ms-164 88[3] & 89[1] “Wie ich die Regel sehe, verlangt sie *das*.” Es hängt nicht davon ab, ob ich so, oder so gestimmt bin.

Ms-164 89[2] Ich fühle daß ich der Regel eine Interpretation gegeben habe, *ehe* ich ihr gefolgt bin; & daß diese Interpretation genug ist zu *bestimmen* was ich im bestimmten Fall zu tun habe um ihr zu folgen. Wenn ich die Regel so auffasse, wie ich sie aufgefaßt habe, so entspricht ihr nun diese Handlung.

Ms-164 89[3] & 90[1] “Hast Du die Regeln verstanden?” – Ja, ich hab sie verstanden. – “Dann wende sie jetzt auf die Zahlen … an!” – Wenn ich ihr folgen will, habe ich nun noch eine Wahl?

Ms-164 90[2] Angenommen er befiehlt mir der Regel zu folgen & ich fürchte mich ihm nicht zu gehorchen: bin ich nun nicht gezwungen? Aber das ist doch auch so, wenn er nur befiehlt: “bring mir diesen Stein”. Bin ich durch diese Worte weniger gezwungen?

Ms-164 90[3] & 91[1] & 92[1] **31** Wie weit kann man die Funktion der Sprache beschreiben? Wer eine Sprache nicht beherrscht, den kann ich zu ihrer Beherrschung abrichten. Wer sie beherrscht, dem kann ich die Art & Weise der Abrichtung in die Erinnerung rufen, oder beschreiben; zu einem besonderen Zweck; indem ich also schon die Technik des Beschreibens verwende. Wie weit kann man die Funktion der Regel beschreiben? Wer noch keine beherrscht den kann ich nur abrichten. Aber wie kann ich mir selbst das Wie der Regel erklären? Das Schwere ist hier nicht bis auf den Grund zu graben, sondern den Grund, der vor uns liegt, als Grund zu erkennen.

Ms-164 92[2] Denn der Grund spiegelt uns immer wieder eine größere Tiefe vor, & wenn wir diese zu erreichen suchen, finden wir uns immer wieder auf dem alten Niveau.

Ms-164 92[3] Unsere Krankheit ist die, erklären zu wollen.

Ms-164 92[4] "Wenn Du die Regel verstehst, ist Dir die Route vorgezeichnet."

Ms-164 93[1] **32** Welche Öffentlichkeit gehört wesentlich dazu, daß ein Spiel existiere, daß ein Spiel erfunden werden kann?

Ms-164 93[2] Welche Umgebung bedarf es, daß Einer das Schachspiel (z.B.) erfinden kann. Freilich ich könnte heute ein Brettspiel erfinden das *nie* wirklich gespielt würde. Ich würde es einfach beschreiben. Aber das ist nur möglich weil es schon ähnliche Spiele gibt, d.h. weil solche Spiele *gespielt werden*.

Ms-164 94[1] Man könnte auch fragen: "Ist Regelmäßigkeit möglich *ohne* Wiederholung?"

Ms-164 94[2] Ich kann wohl heute eine neue Regel geben, die *nie* angewendet wurde & doch verstanden wird. Wäre das aber möglich, wenn *nie* eine Regel tatsächlich angewandt worden wäre?

Ms-164 94[3] Und wenn man nun sagt, "Genügt nicht die Anwendung in der Phantasie?" – so ist die Antwort Nein. – (Möglichkeit einer privaten Sprache.)

Ms-164 95[1] Ein Spiel, eine Sprache, eine Regel, ist eine Institution.

Ms-164 95[2] & 96[1] "Wie oft aber muß eine Regel wirklich angewandt worden sein daß man das Recht habe von einer Regel zu sprechen?" – Wie oft muß ein Mensch addiert, multipliziert, dividiert haben, daß man sagen könne er beherrsche die Technik dieser Rechnungsarten? Und damit meine ich nicht wie oft muß er richtig gerechnet haben um *Anderen* zu beweisen er könne rechnen; sondern: um es sich selbst zu beweisen.

Ms-164 96[2] & 97[1] & 98[1]

33 Aber könnten wir uns nicht denken, daß jemand ohne jede Abrichtung sich beim Anblick einer Rechenaufgabe in dem Seelenzustand befindet, der normalerweise nur das Resultat von Abrichtung & Übung ist? So daß *er* also wüßte, er könne rechnen, obwohl er nie gerechnet hat. (Man könnte also scheint es sagen: die Abrichtung wäre nur Geschichte, & nur erfahrungsgemäß zur Hervorbringung des Wissens notwendig.) – Aber wenn er nun im Zustand jener Gewißheit ist und dann falsch multipliziert. Was soll er selbst nun sagen? Und nehmen wir an er multiplizierte dann einmal richtig, einmal wieder ganz falsch. – Die Abrichtung kann freilich als bloße Geschichte vernachlässigt werden wenn er nun stets richtig multipliziert. Aber rechnen *können* heißt für die Andern sowie auch für ihn selbst: richtig rechnen.

Ms-164 98[2]

Was wir, in einer komplizierten Umgebung "einer Regel folgen" nennen, würden wir, wenn es isoliert dastünde, gewiß nicht so nennen.

Ms-164 98[3]

34 Die Sprache, möchte ich sagen, bezieht sich auf eine Lebens**weise**.

Ms-164 98[4] & 99[1]

Um das Phänomen der Sprache zu beschreiben, muß man eine Praxis beschreiben, nicht einen einmaligen Vorgang *welcher Art immer* er sei.

Ms-164 99[2]

Das ist eine sehr schwierige Erkenntnis.

Ms-164 99[3] & 100[1] & 101[1] Denken wir: ein Gott erschaffe eine Welt ganz wie die unsere in diesem Augenblick ist . Die Menschen gingen ihren verschiedenen Beschäftigungen nach & sprächen genau so wie wir es tun. Einige von ihnen z.B. treiben Mathematik. Fünf Minuten nachdem Gott diese Welt erschaffen hat zerstört er sie wieder. Minuten an. Einer dieser Leute tut genau das was ein Mathematiker in England tut, der gerade eine Berechnung macht. – Sollen wir sagen, dieser zwei Minuten-Mensch rechne? Könnten wir uns nicht z.B. eine Vergangenheit & eine Zukunft zu diesen zwei Minuten denken, die uns die Vorgänge ganz anders benennen ließe.

Ms-164 101[2] & 102[1] Angenommen diese Wesen sprächen nicht Englisch sondern verständigten sich anscheinend in einer Sprache die es auf der Erde nicht gibt. Welchen Grund hätten wir, zu sagen, sie sprächen eine Sprache? Und doch, *könnte* man nicht, was sie tun, auch so auffassen?

Ms-164 102[2] Und angenommen, sie täten etwas, was wir geneigt wären "Rechnen" zu nennen; etwa weil es ähnlich ausschaut. – Aber *ist* es rechnen; & wissen es (etwa) die Leute, die es tun, & nur wir nicht?

Ms-164 102[3] & 103[1] **35** Wie weiß ich daß die Farbe die ich jetzt sehe "grün" heißt? Nun, zur Bestätigung könnte ich andere Leute fragen; aber wenn sie mit mir nicht übereinstimmten würde ich gänzlich verwirrt sein & vielleicht sie oder mich für verrückt halten. D.h. entweder mich nicht mehr zu urteilen trauen, oder auf das was sie sagen nicht mehr wie auf ein Urteil reagieren. Wenn ich ertrinke & "Hilfe!" rufe, wie weiß ich was das Wort "Hilfe" bedeutet? Nun, so reagiere ich in dieser Situation. – Nun *so* weiß ich auch was "grün" heißt & auch wie ich die Regel in dem besondern Fall zu befolgen habe.

Ms-164 104[1] & 105[1] Ist es *vorstellbar* daß das Kräftepolygon von

nicht so

sondern anders aussieht? Nun ist es vorstellbar daß die Parallele zu a nicht wie a′ sondern anders gerichtet aussieht? D.h.: ist es möglich, daß ich nicht a′ sondern einen andern gerichteten Pfeil als Parallele mit a anschaue? Nun, ich könnte mir z.B. denken daß ich den parallelen Pfeil irgendwie perspektivisch sehe & daher

↗ ↑

parallele Pfeile nenne; & daß es mir nicht auffällt, daß ich eine andere Anschauungsart gebraucht habe. So also *ist* es vorstellbar daß ich ein anderes Kräftepolygon den Pfeilen entsprechend zeichne.

Ms-164 106[1] **36** Was ist das für ein Satz: "das Wort 'OBEN' hat vier Buchstaben"? Ist es ein Erfahrungssatz?

Ms-164 106[2] Ehe wir die Buchstaben gezählt haben wissen wir es nicht.

Ms-164 106[3] & 107[1] Wer die Buchstaben des Worts ‘OBEN’ zählt, um zu erfahren wieviele Buchstaben die so klingende Lautreihe hat tut ganz dasselbe wie der, welcher zählt um zu erfahren wieviele Buchstaben das dort & dort aufgeschriebene Wort hat. Der Erstere tut also etwas was auch ein Experiment sein könnte. Und das könnte der Grund sein, den Satz "‘OBEN’ habe 4 Buchstaben", synthetisch a priori zu nennen.

Ms-164 107[2] Das Wort "Plato" hat so viele Laute wie der Drudenfuß Ecken. Ist das ein Satz der Logik? – Ist es ein Erfahrungssatz?

Ms-164 107[3] Ist Zählen ein Experiment? Es *kann* eins sein.

Ms-164 107[4] & 108[1] & 109[1] Denke Dir ein Sprachspiel in dem einer die Laute von Wörtern zu zählen hat. Es könnte nun sein, daß ein Wort scheinbar immer den gleichen Klang hätte aber wenn wir seine Laute zählen so kommen wir bei verschiedenen Anlässen zu verschiedenen Zahlen. Es könnte z.B. sein daß uns ein Wort in verschiedenen Zusammenhängen gleich zu lauten schien (gleichsam durch eine akustische Täuschung), aber beim zählen der Laute ergäbe sich eine Verschiedenheit. In einem solchen Falle werden wir etwa die Laute eines Wortes bei verschiedenen Anlässen immer wieder zählen & dies wird etwa eine Art Experiment sein. Anderseits kann es aber sein daß wir die Laute von Wörtern ein für allemal zählen eine Rechnung machen & das Resultat dieser Zählung verwenden. Der resultierende Satz wird im ersten Fall zeitlich, im zweiten unzeitlich sein.

Ms-164 109[2] & 110[1] Wenn ich die Laute des Wortes ‘Dädalus’ zähle so kann ich Verschiedenes als das Ergebnis betrachten:

1. Das Wort, welches dort steht oder so aussieht oder jetzt ausgesprochen wurde oder etc. hat 7 Laute.

2. Das Lautbild “Dädalus” hat 7 Laute. Der zweite Satz ist zeitlos. Die Verwendung der beiden Sätze muß verschieden sein.

Ms-164 110[2] Das *Zählen* ist in beiden Fällen *gleich*. Nur, was wir damit tun, ist verschieden.

Ms-164 110[3] & 111[1] Die Zeitlosigkeit des zweiten Satzes ist nicht etwa ein Ergebnis des Zählens, sondern der Entscheidung das Ergebnis des Zählens in bestimmter Weise zu verwenden.

Ms-164 111[2] Im Deutschen hat das Wort “Dädalus” 7 Laute. Das ist doch ein Erfahrungssatz.

Ms-164 111[3] & 112[1] Denke es zählte jemand die Laute von Wörtern um ein Sprachgesetz, etwa ein Gesetz der Entwicklung der Sprache zu finden oder zu prüfen. Er sagt: “‘Dädalus’ hat 7 Laute”. Dies ist ein Erfahrungssatz. Betrachte hier die *Identität* des Wortes. Das gleiche Wort kann hier einmal die, einmal jene Lautzahl haben.

Ms-164 112[2] Nun sage ich Einem: “Zähl die Laute in diesen Wörtern & schreib die Zahl zu jedem Wort!”

Ms-164 112[3] “Ich möchte sagen: Durch Abzählen der Laute des Worts kann man einen Erfahrungssatz bekommen – aber auch eine Regel.”

Ms-164 113[1] Zu sagen: “Das Wort … hat … Laute – & das ist zeitlos wahr” ist eine Bestimmung über die Identität des Begriffs ‘das Wort …’. Daher die Zeitlosigkeit.

Ms-164 113[2] Statt “Das Wort … hat … Laute – im zeitlosen Sinne” könnte man auch sagen: “Das Wort … hat *wesentlich* … Laute”.

Ms-164 113[3] **37** $p \mid p \bullet \ \mid \ \bullet q \mid q = p \bullet q$

$p \ \mid \ q \bullet \ \mid \ \bullet p \ \mid \ q = p \vee q$

$x \mid y \bullet \ \mid \ \bullet z \mid u \overset{\text{def}}{=} \parallel (x,y,z,u)$

Ms-164 114[1] Die Definitionen brauchen gar nicht Verkürzungen zu sein, sondern sie könnten auf andere Weise neue Zusammengehörigkeiten machen. Etwa durch Klammern oder den Gebrauch verschiedener Farben der Zeichen.

Ms-164 114[2] Ich kann z.B. einen Satz beweisen indem ich durch Farben andeute, daß er die Form eines meiner Axiome hat, aber durch eine gewisse Substitution verlängert.

Ms-164 114[3] & 115[1] **38** “Ich weiß, wie ich zu gehen habe” heißt: ich zweifle nicht, wie ich zu gehen habe.

Ms-164 115[2] “Wie kann man einer Regel folgen?” So möchte ich fragen.

Ms-164 115[3] Wie kommt es aber, daß ich so fragen will, wo ich doch keinerlei Schwierigkeiten darin finde einer Regel zu folgen.

Ms-164 115[4] Wir mißverstehen hier offenbar die Tatsachen die uns vor Augen liegen.

Ms-164 115[5] & 116[1] Wie kann mir das Wort "Platte" anzeigen, was ich zu tun habe, da ich doch jede Handlung mit jeder Deutung in Einklang bringen kann?

Ms-164 116[2] Wie kann ich einer Regel folgen, da doch, was immer ich tue, als ein Folgen ausgelegt werden kann?

Ms-164 116[3] Was muß ich wissen, um dem Befehl folgen zu können? Gibt es ein *Wissen*, das die Regel nur *so* befolgbar macht. Ich muß manchmal etwas *wissen*; ich muß *manchmal* die Regel *deuten* ehe ich sie anwende.

Ms-164 117[1] & 118[1] Wie konnte denn der Regel im Unterricht eine Deutung gegeben werden die zur so & so vielten Stufe hinaufreicht? Und wenn diese Stufe in der Erklärung nicht genannt wurde, wie können wir denn übereinstimmen darüber was auf dieser Stufe zu geschehen hat, da doch, was immer geschieht mit der Regel & den Beispielen in Einklang gebracht werden kann. Es ist also, sagst Du, über diese Stufen nichts gesagt worden.

Ms-164 118[2] Das Deuten hat ein Ende.

Ms-164 118[3] & 119[1] 39 Es ist wahr alles ließe sich irgendwie rechtfertigen. Aber das Phänomen der Sprache beruht auf der Übereinstimmung im Handeln . Es ist von der größten Wichtigkeit daß wir alle, oder die ungeheure Mehrzahl in gewissen Dingen übereinstimmen. Ich kann z.B. ganz sicher sein, daß die Farbe dieses Gegenstandes von den aller meisten Menschen die ihn sehen 'grün' genannt wird.

Ms-164 Es wäre denkbar daß Menschen verschiedener Stämme
119[2] & Sprachen besäßen, die alle den gleichen Wortschatz hätten,
120[1] aber die Bedeutungen der Worte wären verschieden. Das Wort das bei einem Stamm grün bedeutet, bedeute in der andern gleich & in der dritten Tisch etc. Ja wir könnten uns auch denken, daß die gleichen Sätze, nur mit gänzlich anderem Sinn von den Stämmen gebraucht würden. Nun, ich würde in diesem Fall nicht sagen, daß sie die gleiche Sprache sprächen.

Ms-164 Wir sagen, die Menschen um sich miteinander zu verständigen
120[2] & müßten über die Bedeutungen der Wörter miteinander
121[1] übereinstimmen. Aber das Kriterium für diese Übereinstimmung ist nicht nur eine Übereinstimmung in Bezug auf Definitionen (z.B. hinweisende Definitionen), sondern auch eine Übereinstimmung in Urteilen. Es ist für die Verständigung wesentlich daß wir in einer großen Anzahl von Urteilen übereinstimmen.

Ms-164 **40** Das Sprachspiel (2), wie kann ich es jemandem oder mir
121[2] & selbst erklären? Wenn immer A. "Platte" ruft bringt B. *diese* Art
122[1] Gegenstand. – Ich könnte auch fragen wie kann *ich* es verstehen? Nun, *nur* sofern ich es erklären kann.

Ms-164 Aber es gibt hier eine eigentümliche Versuchung die sich darin
122[2] ausdrückt, daß ich sagen möchte: Ich kann es nicht verstehen, weil die Deutung der Erklärung im Vagen bleibt.

Ms-164 **41** Das Wort "Übereinstimmung" & das Wort "Regel" sind
122[4] & mit einander *verwandt*, sie sind Vettern. Das Phänomen des
123[1] Übereinstimmens & des Handelns nach einer Regel hängen zusammen.

Ms-164 123[2] & 124[1] Es könnte doch einen Höhlenmensch geben der für sich selbst *regelmäßige* Zeichenfolgen hervorbrächte. Er unterhielte sich z.B. damit an die Wand der Höhle zu zeichnen

– · – – – · – – – · – –

oder – · – · · – · · · – · · · · · –.

Aber er folgt nicht dem allgemeinen Ausdruck einer Regel. Und wir sagen nicht er handle regelmäßig weil wir so einen Ausdruck bilden können.

Ms-164 124[2] Aber wenn er nun gar Π entwickelte! (Ich meine ohne einen allgemeinen Regelausdruck.)

Ms-164 124[3] Nur in einer Praxis kann ein Wort Bedeutung haben.

Ms-164 124[4] & 125[1] Gewiß, ich kann mir selbst eine Regel geben & ihr dann folgen. Aber ist es nicht nur darum eine Regel weil es analog dem ist was im Verkehr der Menschen 'Regel' heißt?

Ms-164 125[2] Wenn eine Drossel in ihrem Gesang die gleiche Phrase stets einige Male wiederholt, sagen wir sie gäbe sich vielleicht jedes mal eine Regel der sie dann folgt?

Ms-164 125[3] & 126[1] 42 – · ·

Betrachten wir sehr einfache Regeln. Der Regelausdruck sei eine Figur, etwa die:

|– –|

& man folgt der Regel indem man eine gerade Reihe solcher Figuren zeichnet (etwa als ein Ornament).

|– –||– –||– –||– –||– –|

Ms-164 Wenn von zwei Schimpansen der eine einmal die Figur |– –| in
126[3] & den Lehmboden ritzte & ein anderer darauf die Reihe |– –||– –|
127[1] & etc. so hätte der erste nicht eine Regel gegeben & der zweite ihr
128[1] gefolgt, *was immer* auch dabei im Verstand der beiden vorginge. Beobachtete man aber z.B. das Phänomen einer Art von Unterricht; eines Vormachens & Nachmachens; geglückter & mißglückter Versuche; von Belohnung & Strafe u. dergl.; & würde am Ende der so Abgerichtete Figuren, die er bis dahin nicht gesehen hatte, wie im ersten Beispiel aneinanderreihen, so würden wir wohl sagen der eine Schimpanse schreibe Regeln die der andre befolge.

Ms-164 43 Wie aber, wenn sich schon beim ersten Male der eine
128[2] Schimpanse *vorgenommen* hätte diesen Vorgang zu wiederholen den andern zu unterrichten? Nur in einer bestehenden Technik des Handelns, Sprechens, Denkens, kann Einer sich etwas vornehmen. (Dies ist ein grammatischer Satz.)

Ms-164 Es ist möglich daß ich heute ein Kartenspiel erfinde, das aber
128[3] & nie gespielt wird. Aber es heißt nichts zu sagen in der
129[1] Geschichte der Menschheit sei nur einmal ein Spiel erfunden worden & das habe niemand gespielt. Das heißt nichts nicht weil es psychologischen Gesetzen widerspricht; die Worte "ein Spiel erfinden", "ein Spiel spielen" haben nur in einer ganz bestimmten Umgebung Sinn.

Ms-164 129[2] & 130[1]

So kann man auch nicht sagen, ein einziges Mal in der Geschichte der Menschheit sei jemand einem Wegweiser gefolgt. Wohl aber: ein einziges Mal etc. sei Einer parallel mit einem Brett gegangen. Und jene erste Unmöglichkeit ist wieder keine psychologische.

Ms-164 130[2]

Die Worte “Sprache”, “Satz”, “Befehl”, “Regel”, “Rechnung”, “Experiment”, “einer Regel folgen” beziehen sich auf eine Technik auf eine Gepflogenheit.

Ms-164 130[3] & 131[1]

Eine Vorstufe zum Handeln nach einer Regel wäre etwa die Lust an einfachen Regelmäßigkeiten, wie das Klopfen einfacher Rhythmen oder Zeichnen oder betrachten einfacher Ornamente. Man könnte jemand also abrichten dem Befehl zu folgen: “zeichne etwas regelmäßiges”, “klopfe regelmäßig”. Und hier wieder muß man sich eine bestimmte Technik vorstellen.

Ms-164 131[2] & 132[1]

Du mußt Dich fragen: Unter welchen besondern Umständen sagen wir es habe sich jemand “bloß verschrieben” oder “er hätte wohl fortsetzen können, hat es aber absichtlich nicht getan” oder “er hätte die Figur die er gezeichnet hat wiederholen wollen, sei aber nicht dazu gekommen”.

Ms-164 132[2]

Der Begriff “regelmäßiges Klopfen”, “regelmäßige Figur” wird uns so beigebracht wie “hell”, “schmutzig” oder “bunt”.

Ms-164 132[3] & 133[1]

44 Aber werden wir nicht von der Regel geführt? Und wie kann sie uns führen da ihr Ausdruck doch von uns so und anders gedeutet werden kann? D.h. da doch verschiedene Regelmäßigkeiten ihm entsprechen. Nun wir sind geneigt zu sagen ein Ausdruck der Regel führe uns, wir sind also geneigt diese Metapher zu gebrauchen.

Ms-164 133[2] & 134[1]

Was ist nun der Unterschied zwischen dem Vorgang nach einer Regel (etwa einem algebraischen Ausdruck) Zahl auf Zahl der Reihe nach abzuleiten & diesem Vorgang: Wenn wir jemandem ein gewisses Zeichen etwa 𝔜 zeigen so fällt ihm eine Ziffer ein; schaut er auf die Ziffer & das Zeichen so fällt ihm wieder eine Ziffer ein u.s.f.. Und jedes mal wenn wir dies Experiment vornehmen fällt ihm die gleiche Reihe von Ziffern ein. Ist der Unterschied zwischen diesem Vorgang & dem Vorgehen nach der Regel der psychologische daß im zweiten Fall ein Einfallen stattfindet? Könnte ich nicht sagen: Wenn er der Regel "|– –|" folgte fiel ihm immer wieder "|– –|"ein?

Ms-164 134[2] & 135[1]

Nun in unserm Fall haben wir doch Intuition, & man sagt ja daß Intuition am Grunde des Handelns nach einer Regel ist. Nehmen wir also an jenes, sozusagen magische Zeichen bewirke die Reihe 123 123 123 etc.; ist das Zeichen *dann* nicht der Ausdruck einer Regel? Nein. Das Handeln nach einer Regel setzt das Erkennen einer *Gleichmäßigkeit* voraus & das Zeichen "123 123 123 etc." war der natürliche Ausdruck einer Gleichmäßigkeit.

Ms-164 135[2] &

Nun wird man vielleicht sagen |22||22||22| sei allerdings eine gleichmäßige Ziffernfolge aber doch nicht

136[1] |2||22||222||2222|

Nun ich könnte das eine andre Art der Gleichmäßigkeit nennen.

Ms-164 **45** Wie aber wenn es einen Stamm gäbe dessen Leute
136[2] & scheinbar für eine Art von Regelmäßigkeit Verständnis hätten
137[1] die ich nicht begreife. Es gäbe nämlich bei diesen auch ein Lernen einen Unterricht ganz analog dem im § .... Sieht man ihnen zu, so würde man sagen, sie folgen Regeln, lernen Regeln folgen. Der Unterricht bewirkt z.B. Übereinstimmung im Handeln der Schüler & Lehrer. Schauen wir aber eine ihrer Figurenreihen an so sehen wir keinerlei Regelmäßigkeit.

Ms-164 Was sollten wir nun sagen? Wir *könnten* sagen: "sie scheinen
137[2] einer Regel zu folgen die uns entgeht.", aber auch "Hier haben wir ein Phänomen des Benehmens von Menschen das wir nicht verstehen".

Ms-164 Der Unterricht im Handeln nach der Regel läßt sich
137[3] & beschreiben, ohne Verwendung des Wortes 'u.s.w.'. Wohl aber
138[1] wird in dieser Beschreibung eine Geste ein Tonfall ein Zeichen die der Lehrer beim Unterricht in bestimmter Weise gebraucht & die die Schüler nachahmen beschrieben werden. Es kann auch die Wirkung dieser Ausdrücke beschrieben werden, wieder ohne Zuhilfenahme des 'u.s.w.', also finit. Die Wirkung des 'u.s.w.' wird sein, Übereinstimmung zu erzeugen über den Unterricht hinaus. Es wird also so bewirkt daß wir Alle oder fast Alle gleich zählen & gleich rechnen.

Ms-164 138[2] & 139[1] Man könnte sich aber auch den Unterricht ohne das 'u.s.w.' denken. Die Leute aber wenn sie aus der Schule kämen würden dennoch alle gleich & über die Beispiele im Unterricht hinaus, rechnen.

Ms-164 139[2] Wie, wenn der Unterricht aber eines Tages nicht mehr Übereinstimmung bewirkte?

Ms-164 139[3] Könnte es Arithmetik ohne Übereinstimmung der Rechnenden geben?

Ms-164 139[4] & 140[1] Könnte ein Mensch allein rechnen? Könnte Einer allein einer Regel folgen?

Ms-164 140[2] Sind diese Fragen etwa ähnlich der: "Kann einer allein Handel treiben?"

Ms-164 140[3] Es hat nur dann Sinn zu sagen "u.s.w." wenn "u.s.w." *verstanden* wird. D.h., wenn der Andere eben so gut fortsetzen kann wie ich, d.h., ebenso fortsetzt wie ich.

Ms-164 140[4] Könnten zwei Menschen miteinander Handel treiben?

Ms-164 141[1] **46** Wenn ich sage: "wenn Du der Regel folgst *muß* das herauskommen" so heißt das nicht: es muß, weil es immer herausgekommen ist; sondern: daß es herauskommt ist eine meiner *Grundlagen*.

Ms-164 141[2] Was herauskommen *muß* ist eine Grundlage, die ich nicht antaste.

Ms-164 141[3] & 142[1]

Bei welcher Gelegenheit wird man sagen: “wenn Du der Regel folgst *muß* das herauskommen”? Es kann das eine mathematische Erklärung sein etwa auf einen Beweis hin, daß ein bestimmter Weg keine Abzweigung hat. Es kann auch sein daß man es jemand sagt um ihm das Wesen der Regel einzuprägen, um ihm etwa zu sagen: “Du machst ja hier kein Experiment”.

Ms-164 142[2] & 143[1]

47 “Ich weiß doch bei jedem Schritt absolut, was ich zu tun habe; was die Regel von mir fordert. Die Regel, wie ich sie auffasse. Ich denke nicht hin & her. Das Bild der Regel macht es klar, wie das Bild der Reihe fortzusetzen ist. Ich weiß doch bei jedem Schritt, was ich zu tun habe. Ich sehe es ganz klar vor mir. Es mag langweilig sein, aber es ist kein Zweifel, was ich zu tun habe.” Woher diese Sicherheit? Aber warum frage ich dies? Ist es nicht genug, daß diese Sicherheit existiert. Wozu brauche ich noch eine Quelle für sie? (Und *Ursachen* für sie kann ich ja angeben.)

Ms-164 144[1]

Wenn jemand dem nicht zu gehorchen wir uns fürchten uns befiehlt der Regel ..., die wir verstehen zu folgen, so werden wir ohne jedes Bedenken Zahl auf Zahl hinschreiben. Und dies ist eine typische Art, wie wir auf eine Regel reagieren.

Ms-164 144[3] & 145[1]

“Du weißt schon, wie das ist”; “Du weißt schon, wie es weiter geht.”

Ms-164 145[2]

Ich kann mir jetzt vorsetzen der Regel (– · –) → zu folgen. So:

– · – – · – – · – – · –

Aber es ist merkwürdig, daß ich die Bedeutung der Regel dabei nicht verliere. Denn wie halte ich sie fest? Aber – wie weiß ich daß ich sie festhalte, daß ich sie nicht verliere?! Es hat gar keinen Sinn zu sagen ich hielte sie fest, wenn es nicht ein äußeres Merkmal dafür gibt. (Wenn ich durch den Weltraum fiele könnte ich etwas halten aber es nicht stille halten.)

Ms-164 146[1] Die Sprache ist eben ein Phänomen des menschlichen Benehmens.

Ms-164 146[2] 48 Der Eine macht eine gebietende Handbewegung, als wollte er sagen "geh!". Der Andre mit dem Ausdruck der Furcht schleicht sich fort. Könnte ich diesen Vorgang, auch wenn er nur einmal geschähe, nicht "Befehlen und Gehorchen" nennen?

Ms-164 146[3] & 147[1] Was soll das heißen: "Könnte ich den Vorgang ... nennen"? Man könnte natürlich gegen jene Benennung einwenden, es wäre sehr wohl denkbar daß bei andern Menschen als bei uns eine ganz andere Gebärde dem "Geh fort!" entspricht & daß etwa unsere Gebärde für diesen Befehl bei ihnen die Bedeutung unseres Darreichens der Hand zum Freundschaftszeichen hat. Und welche Deutung man einer Gebärde zu geben hat hänge von andern Handlungen ab die der Gebärde vorangehen & folgen.

Ms-164 147[2] & 148[1] Wie wir das Wort "Befehlen" & "Gehorchen" verwenden sind Gebärden so wie Wörter in einem Netz mannigfaltiger Beziehungen verschlungen. Konstruiere ich nun einen vereinfachten Fall, so ist es nun nicht klar ob ich dies Phänomen noch "befehlen" & "gehorchen" nennen soll.

Ms-164 148[2] & 149[1] Wir kommen zu einem fremden Volksstamm dessen Sprache wir nicht verstehen. Unter welchen Umständen werden wir sagen sie hätten einen Häuptling? Was wird uns veranlassen zu sagen dieser sei der Häuptling auch wenn er ärmlicher gekleidet ist als andere? Ist unbedingt der der Häuptling dem die Andern gehorchen?

Ms-164 149[2] Was ist der Unterschied zwischen falsch schließen & nicht schließen; zwischen falsch addieren & nicht addieren. Überlege Dir das.

Ms-164 149[3] & 150[1] **49** Was Du sagst scheint darauf hinauszukommen, daß die Logik zur Naturgeschichte des Menschen gehört. Und das ist nicht vereinbar mit der Härte des logischen Muß.

Ms-164 150[2] & 151[1] Aber das logische “muß” ist ein Bestandteil der Sätze der Logik & diese sind *nicht* Sätze der menschlichen Naturgeschichte. Sagte ein Satz der Logik: die Menschen stimmen in der & der Weise miteinander überein (& das wäre die Form des naturgeschichtlichen Satzes), dann sagte sein Gegenteil, es bestehe hier ein *Mangel* an Übereinstimmung. Nicht, es bestehe eine Übereinstimmung anderer Art.

Ms-164 151[2] Die Übereinstimmung der Menschen die der Logik wesentlich ist, ist nicht eine Übereinstimmung in den *Meinungen*. geschweige denn von Meinungen über die Fragen der Logik.

VII

Ms-124 7[3] & 8[1]

1 08.06.1941

Die Rolle der Sätze, die von den Maßen handeln & nicht ‘Erfahrungssätze’ sind. – Jemand sagt mir: ‘Diese Strecke ist 240 Zoll lang’. Ich sage: ’Das sind 20 Fuß, also ungefähr 7 Schritte & habe nun einen Begriff von der Länge erhalten. – Die Umformung beruht auf arithmetischen Sätzen & auf dem Satz, daß 12 Zoll = 1 Fuß ist.

Ms-124 8[2]

Diesen letzteren Satz wird niemand für gewöhnlich, als Erfahrungssatz aussprechen. Man sagt er drückt ein Übereinkommen aus. Aber das Messen würde seinen gegenwärtigen Charakter gänzlich ändern, wenn nicht, z.B., die Aneinanderreihung von 12 Zollstücken für gewöhnlich eine Länge ergäbe, die sich wieder besonders aufbewahren läßt.

Ms-124 8[3]

Muß ich darum sagen, der Satz “12 Zoll = 1 Fuß” sage alle diese Dinge aus, die dem Messen seine gegenwärtige Pointe geben?

Ms-124 9[1] Nein. Der Satz *ruht in* einer Technik. Und, wenn Du willst, in den physikalischen und psychologischen Tatsachen, die diese Technik möglich machen. Aber darum ist sein Sinn nicht diese Bedingungen auszusprechen. Das Gegenteil jenes Satzes, '12 Zoll ≠ 1 Fuß' sagt nicht, daß die Maßstäbe nicht starr genug sind, oder wir nicht Alle in gleicher Weise zählen & rechnen. Der Satz *ruht* in einer Technik, beschreibt sie aber nicht.

Ms-124 9[2] **2** Der Satz spielt die typische (damit aber nicht *einfache*) Rolle der Regel.

Ms-124 9[3] & 10[1] Ich kann mittels des Satzes 12 Zoll = 1 Fuß eine Voraussage machen; nämlich daß 12 zoll-lange Stücke Holz aneinander gelegt sich gleichlang mit einem auf andere Weise gemessenen Stück erweisen wird. Also ist der Witz jener Regel etwa, daß man mittels ihrer gewisse Voraussagen machen kann. Verliert sie nun dadurch den Charakter der *Regel*? –

Ms-124 10[2] Warum kann man jene Voraussage machen? Nun, – alle Maßstäbe sind gleich gearbeitet; sie verändern ihre Längen nicht beträchtlich; Stücke Holz, die man auf einen Zoll oder Fuß zugeschnitten hat, tun dies auch nicht; unser Gedächtnis ist gut genug, damit wir beim Zählen bis '12' Ziffern nicht doppelt nehmen & nicht auslassen; u.a..

Ms-124 10[3] & 11[1] Aber kann man denn nun nicht die Regel durch einen Erfahrungssatz ersetzen, der sagt, daß Maßstäbe so & so gearbeitet sind, daß Leute sie *so* handhaben? Man gäbe etwa eine ethnologische Beschreibung des Messens.

Ms-124 11[2] Nun es ist offenbar, daß diese Darstellung die Funktion einer Regel übernehmen könnte.

Ms-124 11[4] & 12[1] Wer einen math. Satz weiß, soll noch nichts wissen. Ist Verwirrung in unserm Rechnen, rechnet jeder anders & einmal so, einmal so, so liegt noch kein Rechnen vor; stimmen wir überein, nun dann haben wir nur unsre Uhren reguliert, doch noch keine Zeit gemessen. Wer einen math. Satz weiß, soll noch *nichts* wissen. D.h., der math. Satz soll nur das Gerüst liefern für eine Beschreibung.

Ms-124 12[2] 3 Wie kann die bloße Umformung des Ausdrucks von praktischer Konsequenz sein?

Ms-124 12[3] & 13[1] Daß ich 25 × 25 Nüsse habe, läßt sich verifizieren indem ich 625 Nüsse zähle, aber es läßt sich auch auf andre Weise herausfinden, die mit der Zahlangabe '25 × 25' näher verknüpft ist. Und es ist natürlich die Verknüpfung dieser beiden Arten der Zahl**bestimmung**, in der ein Zweck des Multiplizierens ruht.

Ms-124 13[2] 09.06.1941

Die Regel ist, als Regel, losgelöst, & steht, sozusagen, selbstherrlich da; obschon, was ihr Wichtigkeit gibt, die Tatsachen der täglichen Erfahrung sind.

Ms-124 13[3] & 14[1] Was ich zu tun habe, ist, sozusagen, das Amt eines Königs zu beschreiben: wobei ich nun nicht in den Fehler verfallen darf, sein Amt aus dessen Nützlichkeit zu erklären, noch die Nützlichkeit außer Acht zu lassen.

Ms-124 14[2] Ich richte mich beim praktischen Arbeiten nach dem Resultat der Verwandlung des Ausdrucks.

Ms-124 14[3] Wie kann ich dann aber noch sagen, daß es dasselbe heißt, ob ich sage “hier sind 625 Nüsse”, oder “hier sind 25 × 25 Nüsse”?

Ms-124 14[4] Wer den Satz “hier sind 625 …” verifiziert, verifiziert dadurch auch “hier sind 25 × 25 …”; u.u.. Doch steht die eine Form einer Art der Verifikation, die andre einer andern näher.

Ms-124 14[5] & 15[1] Wie kannst Du sagen, daß “… 625 …” & “…25 × 25 …” dasselbe sagen? – Erst durch unsere Arithmetik *werden* sie *eins*.

Ms-124 15[3] Ich kann einmal die eine, einmal die andere Art der Beschreibung, durch Zählen z.B., erhalten. D.h., ich kann jede der beiden Formen auf jede Art erhalten; aber auf verschiedenem Weg.

Ms-124 15[4] & 16[1] Man könnte nun fragen: Wenn der Satz “…625 …” einmal so, einmal anders verifiziert wurde, sagte er da beidemale dasselbe? Oder: Was geschieht, wenn eine Methode des Verifizierens ‘625’, die andre nicht ‘25 × 25’ ergibt? – Ist da “… 625 …” wahr & “ …25 × 25 …” falsch? Nein! – Das eine anzweifeln heißt, das andre anzweifeln: Das ist die Grammatik, die unsre Arithmetik diesen Zeichen gibt.

Ms-124 16[2] Wenn die beiden Arten des Zählens als Begründung einer *Zahlangabe* gebraucht werden, dann ist nur *eine* Zahlangabe, wenn auch in verschiedenen Formen, vorgesehen. Dagegen kann man ohne Widerspruch sagen: “Mir kommt bei der einen Art des Zählens 25 × 25 [& also 625] heraus, bei der anderen nicht 625 [also nicht 25 × 25]”. (Die Arithmetik hat hiergegen keinen Einwand.)

Ms-124 16[3] & 17[1] Daß die Arithmetik die beiden Ausdrücke einander gleichsetzt, ist, könnte man sagen, ein grammatischer Trick. Sie sperrt damit eine bestimmte Art der Beschreibung ab & leitet sie in andere Kanäle. (Und daß dies mit den Tatsachen der Erfahrung zusammenhängt braucht nicht erst gesagt zu werden.)

Ms-124 17[2] & 18[1] 4 Nimm an, ich habe jemand multiplizieren gelehrt, aber nicht mit Hilfe einer ausgesprochenen allgemeinen Regel, sondern nur dadurch daß er sieht wie ich ihm Beispiele vorrechne. Ich kann ihm dann eine *neue* Aufgabe anschreiben, & sagen: “mach dasselbe mit *diesen* beiden Zahlen, was ich mit den früheren getan habe”. Aber ich kann auch sagen: “Wenn Du mit diesen beiden machst, was ich mit den andern gemacht habe, so wirst Du zu der Zahl ... kommen”. Was ist das für ein Satz? “Du wirst das & das schreiben” ist eine Vorhersage. ‘Wenn Du das & das schreiben wirst, wirst Du’s so gemacht haben, wie ich Dir’s gezeigt habe’ bestimmt, was er “seinem Beispiel folgen” nennt.

Ms-124 18[2] ‘Die Lösung dieser Aufgabe ist ...’ – Wenn ich das lese, ehe ich die Aufgabe gerechnet habe, – was ist das für ein Satz?

Ms-124 18[4] & 19[1]

“Wenn Du mit diesen Zahlen machst, was ich Dir mit den andern vorgemacht habe, wirst Du … erhalten” – das heißt doch: ’Das Resultat dieser Rechnung ist …” – & das ist keine Vorhersage, sondern ein mathematischer Satz. Aber es ist dennoch auch eine Vorhersage! – Eine Vorhersage besonderer Art. Wie der, der am Ende findet daß sich beim Addieren der Kolumne wirklich das & das ergibt, wirklich überrascht sein kann; z.B. ausrufen kann: ja, bei Gott, es kommt heraus! Denke Dir nur diesen Vorgang des Vorhersagens & der Bestätigung als ein besonderes Sprachspiel – ich meine: isoliert von dem Übrigen der Arithmetik & ihrer Anwendung.

Ms-124 24[2] & 25[1]

11.06.1941

Was ist an diesem Vorhersagespiel so sonderbar? Was mir sonderbar erscheint, würde entfernt, wenn die Vorhersage lautete: “Wenn Du glauben wirst, meinem Beispiel gefolgt zu sein, wirst Du *das* herausgebracht haben.” , oder: “Wenn Dir alles richtig scheinen wird, wird das das Resultat sein.” Dies Spiel konnte man sich (z.B.) mit dem Eingeben eines bestimmten Giftes verbunden denken, & die Vorhersage wäre, daß die Injektion unsere Fähigkeiten, unser Gedächtnis z.B., in der & der Weise beeinflußt. – Aber, wenn wir uns das Spiel mit dem Eingeben eines Giftes denken können, warum nicht mit dem Eingeben eines Heilmittels? Aber auch dann kann das Schwergewicht der Vorhersage noch immer darauf ruhen, daß der *gesunde* Mensch *das* als Resultat ansieht. Oder vielleicht: daß den gesunden Menschen *das* befriedigt.

Ms-124 25[3] "Folge mir, so wirst Du das herausbringen." heißt natürlich nicht: "Folge mir, dann wirst Du mir folgen" – noch: "Rechne *so* dann wirst Du *so* rechnen". – Aber was heißt "Folge mir"? Im Sprachspiel kann es einfach ein Befehl sein: "Folge mir jetzt!".

Ms-124 26[1] Was ist der Unterschied zwischen den Vorhersagen: "Wenn Du richtig rechnest, wirst Du *das* erhalten" – &: "Wenn Du glauben wirst, daß Du richtig rechnest, wirst Du *das* erhalten"? Wer sagt nun, daß in meinem obigen Sprachspiel die Vorhersage nicht eben das letztere bedeutet? Es scheint, sie bedeutet das nicht – – aber wie *zeigt* sich das? Frage Dich *unter welchen Umständen* würde die Vorhersage das eine, unter welchen das andere vorherzusagen scheinen. Denn es ist klar: es kommt hier auf die übrigen Umstände an.

Ms-124 26[2] Wer mir vorhersagt, daß ich *das* herausbringen werde, sagt der nicht eben vorher daß ich dieses Resultat für richtig halten werde? – "Aber" – sagst Du vielleicht – "nur eben weil es wirklich richtig *ist*!" – Aber was heißt das: "Ich halte die Rechnung für richtig weil sie richtig ist"?

Ms-124 26[3] & 27[1] Und doch kann man sagen: In meinem Sprachspiel denkt der Rechnende nicht daran, daß die Tatsache, daß er *dies* herausbringt, eine Eigentümlichkeit *seines* Wesens ist; die Tatsache erscheint ihm nicht als eine psychologische. Eher stelle ich mir ihn unter dem Eindruck vor, daß er nur einem bereits vorhandenen Faden gefolgt ist. Und das Wie des Folgens als eine Selbstverständlichkeit hinnimmt; & nur *eine* Erklärung seiner Handlung kennt, nämlich: den Lauf des Fadens.

Ms-124 27[2] & 28[1] Er läßt sich allerdings ablaufen, indem er der Regel, oder den Beispielen folgt, aber was er tut betrachtet er nun nicht als Besonderheit *seines* Ablaufs, er sagt nicht: “also *so* bin ich abgelaufen”, sondern: “also *so* läuft es ab”.

Ms-124 28[2] Aber wenn nun Einer dennoch am Ende der Rechnung in unserm Sprachspiel sagte: “also *so* bin ich abgelaufen!” – oder: “also *dieser* Ablauf befriedigt mich!” – Kann ich nun sagen, er habe das (ganze) Sprachspiel mißverstanden? Doch gewiß nicht! Wenn er nicht sonst eine unerwünschte Anwendung von ihm macht.

Ms-124 28[3] 5 Ist es nicht die *Anwendung* der Rechnung die jene Auffassung hervorruft, daß die Rechnung abläuft und nicht wir?

Ms-124 29[1] Die verschiedenen ‘Auffassungen’ müssen verschiedenen Anwendungen entsprechen.

Ms-124 29[3] Denn es ist allerdings ein Unterschied dazwischen: überrascht zu sein, daß ich *davon* befriedigt bin; überrascht zu sein, daß die Ziffern auf dem Papier sich *so* zu benehmen scheinen; & überrascht zu sein darüber, daß *das* herauskommt. Aber in jedem Fall sehe ich die Rechnung in anderm Zusammenhang.

Ms-124 29[4] & 30[1] Ich rede von dem Gefühl des ‘Herausbekommens’, wenn wir etwa eine längere Kolumne von Zahlen verschiedener Gestalt addieren & so eine Zahl wie 1000000 herauskommt, wie uns zuvor gesagt worden war. “Ja, bei Gott, wieder eine Null –” sagen wir. “Man sähe es den Zahlen nicht an –”, könnte ich auch sagen.

Ms-124 30[2] Wie wäre es, wenn wir sagten– statt: '6 × 6 ergibt 36' – : 'Das Ergeben der Zahl 36 durch 6 × 6'? – Den *Satz* ersetzen durch einen substantivischen Ausdruck. (Der Beweis zeigt *das Ergeben*.)

Ms-124 30[4] Warum willst Du die Mathematik immer unter dem Aspekt des Findens & nicht des Tuns betrachten?

Ms-124 30[5] Von großem Einflusse muß es sein, daß wir die Wörter "richtig" & "wahr" & "falsch" & die Form der Aussage im Rechnen gebrauchen. (Kopfschütteln & Nicken)

Ms-124 31[1] Warum soll ich sagen, daß das Wissen, daß alle Menschen, die rechnen gelernt haben, *so* rechnen, kein *mathematisches* Wissen ist? Weil es auf einen andern Zusammenhang hindeutet.

Ms-124 31[3] Ist also Berechnen, was Einer durch Rechnung herauskriegen wird, schon angewandte Mathematik? – & also auch: Berechnen, was ich selbst herauskriegen werde?

Ms-124 34[1] 6 13.06.1941

Es ist ja gar kein Zweifel, daß math. Sätze *in gewissen Sprachspielen* die Rolle von Regeln der Darstellung spielen, im Gegensatz zu Sätzen der Darstellung.

Ms-124 34[3] Aber das sagt nicht, daß dieser Gegensatz nicht nach allen Richtungen hin abfällt. Und *das* wieder nicht, daß der Gegensatz nicht von der größten Wichtigkeit ist.

Ms-124 35[1] Das piédestal der Mathematik, ist die Rolle, welche ihre Sätze in unsern Sprachspielen spielen.

Ms-124 36[2] Was der math. Beweis demonstriert wird als interne Relation hingestellt & dem Zweifel entzogen.

Ms-124 36[3] & 37[1] 7 Was ist einem mathematischen Satz & einem mathematischen Beweis gemein, daß sie beide “mathematisch” heißen? Nicht, daß der math. Satz mathematisch bewiesen sein muß; nicht, daß der math. Beweis einen math. Satz beweisen muß. Was hat der unbewiesene Satz (das Axiom) mathematisches? (&) was hat er gemein mit einem mathematischen *Beweis*?

Ms-124 37[2] Soll ich antworten: ‘Die Schlußregeln des math. Beweises sind immer math. Sätze’? Oder: ‘Math. Sätze & Beweise dienen dem Schließen’? Das wäre schon näher dem Wahren.

Ms-124 37[3] & 38[1] 8 Der Beweis muß eine interne Relation etablieren, nicht eine äußere. Denn wir könnten uns auch einen Vorgang der Transformation eines Satzes durchs *Experiment* denken & eine, die zum Vorhersagen des vom transformierten Satz Behaupteten benützt würde. Man könnte sich z.B. (ganz gut) denken, daß Zeichen durch hinzulegen anderer Zeichen sich solchermaßen verschöben, daß sie eine wahre Vorhersage bilden auf der Grundlage der in ihrer Anfangslage ausgedrückten Bedingungen. Ja, wenn Du willst, kannst Du den rechnenden Menschen als einen Apparat dieser Art betrachten.

Ms-124 38[2] Denn, daß ein Mensch das Resultat *errechnet*, in dem Sinne: daß er nicht gleich das Resultat, sondern erst verschiedenes anderes hinschreibt, macht ihn nicht weniger zu einem physikalisch-chemischen Hilfsmittel, eine Zahl zu erzeugen, wenn gewisse andere ihm zugebracht werden.

Ms-124 38[3] & 39[1] Ich müßte also sagen: Der bewiesene Satz ist nicht: diejenige Zeichenfolge, welche der so & so abgerichtete Mensch unter den & den Umständen erzeugt.

Ms-124 39[2] 14.06.1941

Wenn wir den Beweis so betrachten, ändert sich, was wir erblicken, gänzlich. Die Zwischenstufen werden ein uninteressantes Nebenprodukt. (Wie im Innern des Automaten ein Geräusch, ehe er uns die Ware zuwirft.)

Ms-124 39[5] & 40[1] 9 Wir sagen: der Beweis sei ein Bild. Aber dies Bild bedarf doch der Approbation, die wir ihm (nämlich) beim Nachrechnen erteilen. –

Ms-124 40[2] Wohl wahr; aber wenn es von dem Einen die Approbation erhielte, von dem Andern nicht & sie sich nicht *verständigen* könnten – hätten wir dann ein Rechnen? Also ist es nicht die Approbation allein, die es zur Rechnung macht, sondern die Gleichheit der Approbationen.

Ms-124 40[3] Denn es ließe sich ja auch ein Spiel denken, in welchem Menschen durch Ausdrücke, etwa ähnlich denen allgemeiner Regeln, angeregt, für bestimmte praktische Aufgaben, also ad hoc, sich Zeichenfolgen einfallen lassen, & daß sich dies sogar bewährte. Und hier brauchen die 'Rechnungen', wenn man sie so nennen wollte, nicht miteinander übereinstimmen. (Hier könnte man von 'Intuition' reden.)

Ms-124 41[1] Die Übereinstimmung der Approbationen ist die Vorbedingung unsers Sprachspiels, sie wird nicht in ihm konstatiert.

Ms-124 44[3] & 45[1] Wenn die Rechnung ein Experiment ist & *die Bedingungen sind erfüllt* dann müssen wir als Ausgang nehmen, was kommt; & wenn die Rechnung ein Experiment ist, so ist der Satz, daß sie das & das ergibt, doch der Satz, daß unter solchen Bedingungen diese Art von Zeichen entsteht. Und entsteht also unter diesen Bedingungen einmal ein, einmal ein anderes Resultat, so darf man nun nicht sagen "da stimmt etwas nicht", oder "beide Rechnungen können nicht in Ordnung sein", sondern man müßte sagen: diese Rechnung ergibt nicht immer das gleiche Resultat (*warum*, muß nicht bekannt sein). Aber obwohl der Vorgang nun ebenso interessant, ja vielleicht noch interessanter ist, haben wir nun keine Rechnung mehr. Und das ist natürlich wieder eine grammatische Bemerkung über den Gebrauch des Wortes "Rechnung". Und natürlich hat diese Grammatik eine Pointe.

Ms-124 46[1] Was heißt es, sich über einen Unterschied im Resultat einer Rechnung *verständigen*? Es heißt doch, zu einem gleichförmigen Rechnen zu gelangen. Und kann man das nicht so kann nun Einer nicht sagen, der Andre rechne auch; nur eben mit anderen Ergebnissen.

Ms-124 46[2] **10** Wie ist es nun, – soll ich sagen: Der gleiche Sinn könne nur *einen* Beweis haben? Oder: wenn ein Beweis gefunden wird, ändere sich der Sinn? Freilich würden Einige sich dagegen wehren, sagen: ‘So kann man also nie den Beweis eines Satzes finden, denn, hat man ihn gefunden, so ist er nicht mehr Beweis *dieses* Satzes.’ Aber das sagt noch gar nichts. –

Ms-124 47[1] Es kommt eben darauf an, *was* den Sinn des Satzes festlegt. Wovon wir sagen wollen, es lege den Sinn des Satzes fest. Der Gebrauch muß ihn festlegen. Aber was rechnen wir zum Gebrauch? –

Ms-124 47[2] 16.06.1941

Die Beweise beweisen denselben Satz, heißt etwa: beide erweisen ihn für uns als ein brauchbares Instrument zu dem Gleichen.

Ms-124 47[3] Und der Zweck ist eine Anspielung auf Außermathematisches.

Ms-124 47[4] & 48[1] Ich sagte einmal: ‘Wenn Du wissen willst, was ein math. Satz sagt, sieh’, was sein Beweis beweist. Nun, ist darin nicht Wahres & Falsches? Ist der Sinn, der Witz, eines math. Satzes wirklich klar, wenn man nur seinen Beweis versteht?

Ms-124 48[2] Dem Russellschen "~f (f)" fehlt vor allem die Anwendung, & daher der Sinn. Wendet man diese Form aber dennoch an, dann ist nicht gesagt, daß 'f(f)' ein Satz in irgendeinem gewohnten Sinn sein muß, oder 'f (ξ)' eine Satzfunktion. Denn der Begriff des Satzes, außer der des Satzes der Logik, ist ja durch Russell nur in allgemeinen, herkömmlichen Zügen erklärt. Man sieht hier auf die Sprache, ohne auf das Sprachspiel zu sehen.

Ms-124 48[3] & 49[1] Wenn wir von verschiedenen Bilderreihen sagen, sie demonstrierten, z.B., daß 25 × 25 = 625, so ist leicht genug zu erkennen, was den *Ort* dieses Satzes fixiert, den beide Wege erreichen.

Ms-124 49[3] & 50[1] Der andre Beweis reiht den Satz in eine neue Ordnung ein; dabei findet oft ein Übersetzen einer Art von Operation in eine gänzlich andere statt. Wie wenn wir Gleichungen in Kurven übertragen. Und dann sehen wir etwas für die Kurven ein & dadurch für die Gleichungen.

Aber mit welchem Rechte überzeugen wir uns durch einen Gedankengang, der dem Gegenstand unsrer Gedanken scheinbar ganz heterogen ist? Nun, unsre Operationen liegen jenem Gegenstand auch nicht ferner, als, etwa, das Dividieren im Dezimalsystem, dem verteilen von Nüssen. Besonders, wenn man sich vorstellt (was man leicht kann) daß jene Operation ursprünglich zu einem andern Zweck als dem des Teilens u. dergl. erfunden worden wäre.

Ms-124 50[2] & 51[1]

Fragst Du: “Mit welchem Recht?” so ist die Antwort: Vielleicht mit gar keinem. – Mit welchem Recht sagst Du, daß die Fortsetzung dieses Systems mit jenem immer parallel laufen wird? (Es ist als ob Du Zoll & Fuß *beide* als Einheit festsetztest & behauptetest, 12n Zoll werden immer mit n Fuß gleich lang sein.)

Ms-124 51[2] & 52[1]

17.06.1941

Wenn zwei Beweise denselben Satz beweisen, so kann man sich allerdings Umstände denken, in denen die ganze diese Beweise verbindende Umgebung wegfiele, sodaß sie allein & nackt dastünden & kein Grund vorhanden wäre, zu sagen sie hätten eine gemeinsame Pointe, sie bewiesen denselben Satz. Man muß sich nur denken, daß die Beweise ohne den, sie beide umhüllenden & verbindenden, Organismus der Anwendungen, sozusagen nackt & und bloß, dastünden. (Wie zwei Knochen aus dem ungeheuer mannigfachen Zusammenhang des Organismus gelöst; in dem allein wir gewohnt sind, an sie zu denken.)

Ms-124 52[2] & 53[1]

11 Nimm an, man rechnete mit Zahlen & verwendet manchmal auch die Division durch Ausdrücke von der Form (n − n), & erhielte auf diese Weise hie & da andere als die normalen Resultate des Multiplizierens, etc. Das störe aber niemand. – Vergleiche damit: Man legt Listen, Verzeichnisse, von Personen an, aber nicht wie wir es tun, alphabetisch; & so kommt es, daß der gleiche Name in mancher Liste öfters als einmal figuriert. – Aber nun kann man annehmen, daß das niemandem auffällt; oder, daß die Leute es sehen, es ihnen aber weiters nichts macht. Wie man Leute eines Stammes denken könnte, die, wenn sie Münzen zur Erde fallen lassen, es nicht der Mühe Wert halten sie aufzuheben. (Sie haben dann etwa eine Redensart: “Es gehört den Andern” oder dergleichen.)

Ms-124 53[2]

Nun aber ändert sich die Zeit, & die Menschen fangen an (zuerst nur wenige) Exaktheit zu fordern. Mit Recht, mit Unrecht? – Waren die früheren Verzeichnisse *nicht* eigentlich Verzeichnisse? –

Ms-124 53[3] & 54[1]

Sagen wir, wir erhielten manche unsrer Rechenresultate durch einen versteckten Widerspruch. Nun – sind sie dadurch illegitim? – Aber wenn wir nun solche Resultate durchaus nicht anerkennen wollen & doch fürchten, es könnten welche durchschlüpfen. – Nun dann haben wir also eine Idee die einem neuen Kalkül als Vorbild dienen soll. Wie man die Idee zu einem Spiel haben kann.

Ms-124 54[2] Der R'sche Widerspruch ist nicht, weil er ein Widerspruch ist, beunruhigend, sondern weil das ganze Gewächs, dessen Ende er ist, ein Krebsgewächs ist, das zweck- & sinnlos aus dem normalen Körper herauszuwachsen scheint.

Ms-124 54[3] Kann man nun sagen: "Wir wollen einen Kalkül, der uns sicherer die Wahrheit sagt"?

Ms-124 54[4] & 55[1] 18.06.1941

Aber Du kannst doch einen Widerspruch nicht gelten lassen! – Warum nicht? Wir gebrauchen ihn ja manchmal in unsrer Rede, freilich selten – aber man könnte sich eine Sprachtechnik denken, in der er ein ständiges Implement ist. Man könnte z.B. von einem Objekt in Bewegung sagen, es existiere & es existiere nicht an diesem Ort; Veränderung könnte durch den Widerspruch ausgedrückt werden.

Ms-124 55[2] Nimm ein Thema, wie das Haydnsche (Chorale St. Antoni), nimm den Teil der Brahmsschen Variationen, der dem ersten Teil des Themas entspricht & stell die Aufgabe den zweiten Teil der Variation im Stil ihres ersten Teiles zu konstruieren. Das ist ein Problem (sehr) ähnlich den mathematischen Problemen. Ist die Lösung gefunden, etwa wie Brahms sie gibt, so zweifelt man nicht, daß dies die Lösung sei.

Ms-124 55[3] & 56[1] Mit diesem Weg sind wir einverstanden. Und doch ist es hier klar, daß es leicht verschiedene Wege geben kann, kann mit deren jedem wir uns einverstanden erklären können, deren jeden wir konsequent nennen können.

Ms-124 56[3] & 57[1] ‘Wir machen lauter legitime – d.h. in den Regeln erlaubte – Schritte, & auf einmal kommt ein Widerspruch heraus. Also ist das Regelverzeichnis, wie es ist, nichts nutz, denn der Widerspruch wirft das ganze Spiel um.’ Warum läßt Du ihn es umwerfen? Aber ich will, daß man nach der Regel soll *mechanisch* weiter schließen können, ohne je zu widersprechenden Resultaten zu gelangen. Nun, welche Art der Voraussicht willst Du? Eine, die Dein gegenwärtiger Kalkül nicht zuläßt? Nun, dadurch ist er nicht ein schlechtes Stück Mathematik, oder, nicht im vollsten Sinne Mathematik. Der Sinn des Wortes “mechanisch” verführt Dich.

Ms-124 57[3] 12 Wenn Du zu einem praktischen Zweck einen Widerspruch mechanisch vermeiden willst, wie Dein Kalkül es jetzt nicht kann, so ist das etwa, wie wenn Du nach einer Konstruktion des …-Ecks suchst, das Du bis jetzt nur durch Probieren hast zeichnen können; oder nach einer Lösung der Gleichung 3^{ten} Grades, die Du bisher nur approximiert hast. Nicht schlechte Mathematik wird hier verbessert, sondern ein neues Stück Mathematik geschaffen.

Ms-124 57[4] & 58[1] 19.06.1941

Nimm an, ich wollte eine Irrationalzahl so bestimmen, daß in ihrer Entwicklung nicht die Figur ‘777’ vorkommt. Ich könnte π nehmen & bestimmen: wenn jene Figur entsteht setzen wir statt ihr ‘000’. Nun sagt man mir: das genügt nicht, denn der, welcher die Stellen berechnet, ist verhindert, auf die vorhergehenden zurückzuschauen. Nun brauche ich einen andern Kalkül; einen in dem ich mich zum Voraus versichern kann, er könne '777' nicht liefern. Ein mathematisches Problem.

Ms-124 58[2] & 59[1] 'Solange die Widerspruchsfreiheit nicht bewiesen ist, kann ich nie ganz sicher sein, daß mir jemand, der gedankenlos, aber gemäß den Regeln, rechnet, nicht irgend etwas Falsches herausrechnet.' So lange also jene Voraussicht nicht gewonnen ist, ist der Kalkül unzuverlässig. – Aber denke, ich fragte: "*Wie* unzuverlässig?"– Wenn wir von Graden der Unzuverlässigkeit redeten, könnten wir ihr dadurch nicht den metaphysischen Stachel nehmen? Waren die ersten Regeln des Kalküls nicht gut? Nun, wir gaben sie nur *weil* sie gut waren. – Wenn sich später ein Widerspruch ergibt, – haben sie *nicht* ihre Pflicht getan? Nicht doch, sie waren für diese Anwendung nicht gegeben worden.

Ms-124 59[2] Ich kann meinem Kalkül eine bestimmte Art der Voraussicht geben wollen. Sie macht ihn nicht zu einem *eigentlicheren* Stück Mathematik, aber, etwa, zu gewissem Zweck brauchbarer.

Ms-124 59[3] & 60[1] Die Idee des Mechanisierens der Math.. Die Mode des axiomatischen Systems.

Ms-124 60[4] & 61[1] 13 Aber nehmen wir an, die 'Axiome' & 'Schlußweisen' seien nicht nur irgendwelche Konstruktionsweisen, sondern sie überzeugten uns auch durchaus von dem Konstruierten! Nun, dann heißt das, daß es Fälle gibt, in denen die Konstruktion aus diesen Bausteinen *nicht* überzeugt. Und tatsächlich sind die logischen Axiome gar nicht überzeugend, wenn wir für die Satzvariablen Strukturen einsetzen, die niemand ursprünglich als mögliche Werte vorhergesehen hat, als man nämlich ihrer Wahrheit (im Anfang) die unbedingte Anerkennung gab.

Ms-124 61[2] Wie aber, wenn man sagt: die Axiome und Schlußweisen sollen doch so gewählt werden, daß sie keinen falschen Satz beweisen können?

Ms-124 61[3] 'Wir wollen nicht nur einen ziemlich zuverlässigen, sondern einen *absolut* zuverlässigen Kalkül. Die Mathematik muß *absolut* sein.'

Ms-124 61[4] & 62[1] Nimm an, ich hätte die Regeln für's Spiel 'Fuchs & Jäger' aufgestellt – stellte mir das Spiel unterhaltlich & hübsch vor – später finde ich, daß die Jäger immer gewinnen können, wenn man einmal weiß, wie. Ich bin nun, sagen wir, mit meinem Spiel unzufrieden. Die von mir gegebenen Regeln haben ein Resultat gezeitigt, daß ich nicht vorausgesehen hatte & das mir das Spiel verdirbt.

Ms-124 62[2] 14 20.06.1941

'N. kam darauf, daß man bei den Berechnungen oft durch Ausdrücke der Form '(n − n)' gekürzt hatte. Er wies die dadurch entstehende Diskrepanz der Resultate nach & zeigte, wie Menschenleben durch diese Art des Rechnens verloren worden waren.'

Ms-124 62[3] & 63[1] Aber nehmen wir an, auch die Andern hätten jene Widersprüche gemerkt, nur sich nicht darüber Rechenschaft geben können woher sie kämen. Sie hätten, sozusagen, mit schlechtem Gewissen gerechnet. Sie hätten zwischen widersprechenden Resultaten *eins* gewählt, aber mit Unsicherheit, während ihnen N's Entdeckung vollkommene Sicherheit gegeben hätte. – Aber sagten sie sich: 'mit unserm Kalkül ist etwas nicht in Ordnung'? War ihre Unsicherheit von der Art der unsern, wenn wir eine physikalische Berechnung anstellen, aber nicht sicher sind, ob diese Formeln hier wirklich das richtige Resultat ergeben? Oder war es ein Zweifel darüber, ob ihre Mathematik wirklich Mathematik sei? In diesem Falle: was taten sie, um sich davon zu überzeugen?

Ms-124 64[2] Die Leute haben bisher nur verhältnismäßig selten vom Kürzen durch Ausdrücke vom Wert 0 Gebrauch gemacht. Irgendeinmal entdeckt Einer, daß sie auf diese Weise wirklich jedes beliebige Resultat ausrechnen können. – Was tun sie nun? Nun, wir könnten uns sehr verschiedenes vorstellen. Sie können, z.B., nun erklären, diese Art des Rechnens habe (damit) ihren Witz verloren, & *so* sei künftig nicht (mehr) zu rechnen.

Ms-124 64[3] 'Er glaubt, er rechnet – möchte man sagen – er rechnet tatsächlich nicht.'

Ms-124 64[4] & 65[1] **15** Wenn die Rechnung für mich ihren Witz verloren hat, sobald ich weiß, wie ich nun alles Beliebige errechnen kann – hat sie keinen gehabt, solang ich das *nicht* wußte?

Ms-124 65[2] Ich mag freilich jetzt alle diese Rechnungen als nichtig erklären – ich führe sie eben jetzt nicht mehr aus – aber waren es darum keine Rechnungen?

Ms-124 65[3] Ich habe (einmal), ohne es zu wissen, über einen Widerspruch geschlossen. Ist mein Resultat nun falsch, oder doch unrecht erworben?

Ms-124 65[4] Wenn der Widerspruch wirklich so gut versteckt ist, daß wir ihn nicht merken, warum sollen wir nicht das, was wir jetzt tun das eigentliche Rechnen nennen?

Ms-124 65[5] & 66[1] Wir sagen, der Widerspruch würde den Kalkül *vernichten*. Aber wenn er nun sozusagen in winzigen Dosen aufträte, gleichsam blitzweise, nicht als ein ständiges Rechenmittel, würde er da das Spiel auch vernichten?

Ms-124 66[2] 21.06.1941

Denk’ Dir, die Leute hätten sich eingebildet $(a + b)^2$ müsse gleich sein $a^2 + b^2$. (Ist das eine Einbildung von der Art: es müsse eine Dreiteilung des Winkels mit Lineal und Zirkel geben?) Kann man sich also so einbilden, zwei Rechnungsweisen müßten dasselbe ergeben, wenn es nicht der Fall ist?

Ms-124 66[3] & 67[1] Ich addiere eine Kolumne, addiere sie auf verschiedene Weise, nehme z.B. die Zahlen in verschiedener Reihenfolge & kriege immer wieder, regellos, etwas andres heraus. – Ich werde vielleicht sagen: “Ich bin ganz verwirrt; ich mache entweder regellos Rechenfehler, oder ich mache gewisse Rechenfehler in bestimmten Verbindungen: etwa, auf ‘6 + 3 = 9’ sage ich immer ‘7 + 7 = 15’. Oder ich könnte mir denken, daß ich plötzlich einmal in der Rechnung subtrahiere statt zu addieren, aber nicht denke, daß ich da etwas anderes tue.

Ms-124 67[2] Nun könnte es sein, daß ich den Fehler nicht fände & mich für geistesgestört hielte. Aber das müßte meine Reaktion nicht sein.

Ms-124 67[3] ‘Der Widerspruch hebt den Kalkül auf’ – woher diese Sonderstellung? Sie ist, glaube ich, durch etwas Phantasie gewiß zu erschüttern.

Ms-124 67[4] & 68[1] Um diese philosophischen Probleme zu lösen muß man Dinge miteinander vergleichen, die noch niemand ernstlich miteinander verglichen hat.

Ms-124 68[2] Man kann auf diesem Gebiete allerlei fragen, was zwar zur Sache gehört, aber nicht durch die Mitte der Sache führt. Eine bestimmte Reihe von Fragen führt durch die Mitte, ins Freie. Die andern werden nebenbei beantwortet. Den Weg durch die Mitte zu finden ist ungeheuer schwer.

Ms-124 68[3] Er geht über *neue* Beispiele & Vergleiche. Die abgebrauchten zeigen ihn nicht.

Ms-124 23.06.1941

69[1] Nehmen wir an, der R'sche Widerspruch wäre nie gefunden worden. Nun – ist es ganz klar, daß wir dann einen falschen Kalkül besessen hätten? Gibt es denn hier nicht verschiedene Möglichkeiten?

Ms-124 Und wie, wenn man den Widerspruch zwar gefunden, sich
69[2] aber weiter nicht über ihn aufgeregt, & etwa bestimmt hätte, es seien aus ihm keine Schlüsse zu ziehen. (Wie ja auch niemand aus dem 'Lügner' Schlüsse zieht.) Wäre das ein offenbarer Fehler gewesen?

Ms-124 "Aber dann ist doch das kein eigentlicher Kalkül! Er verliert ja
69[3] & alle *Strenge*!" Nun, nicht *alle*. Und er hat nur dann nicht die
70[1] volle Strenge, wenn man ein bestimmtes Ideal der Strenge hat, einen bestimmten Stil der Mathematik baut.

Ms-124 'Aber ein Widerspruch in der Math. verträgt sich doch nicht
70[2] mit ihrer Anwendung. Er macht, wenn er konsequent, d.h. zur Erzeugung *beliebiger* Resultate verwendet wird, die Anwendung der Math. zu einer Farce, oder einer Art überflüssiger Zeremonie. Seine Wirkung ist etwa die, unstarrer Maßstäbe, die durch Dehnen & Zusammendrücken verschiedene Messungsresultate zulassen.' Aber war das Messen durch Abschreiten *kein* Messen? Und wenn die Menschen mit Maßstäben aus Teig arbeiteten, wäre das an sich schon falsch zu nennen?

Ms-124 Könnte man sich nicht leicht Gründe denken, weshalb eine
70[3] gewisse Dehnbarkeit der Maßstäbe erwünscht sein könnte?

Ms-124 71[1] ‘Aber ist es nicht richtig, die Maßstäbe aus immer härterem, unveränderlicherm Material herzustellen? Gewiß ist es richtig; wenn man es so will.’

Ms-124 71[2] ‘Also redest Du dem Widerspruch das Wort?!’ Durchaus nicht; so wenig, wie den weichen Maßstäben.

Ms-124 71[3] *Ein* Fehler ist zu vermeiden: Man denkt, der Widerspruch *muß* sinnlos sein: d.h., wenn man z.B. die Zeichen ‘p’, ‘~’, ‘ • ’ *konsequent* benützt, so kann ‘p • ~p’ nichts sagen. – Aber denke: was heißt, den & den Gebrauch ‘konsequent fortsetzen’? (‘Dieses Kurvenstück konsequent fortsetzen’.)

Ms-124 71[4] & 72[1] 16 Wozu braucht die Mathematik eine Grundlegung?! Sie braucht sie, glaube ich, ebenso wenig, wie die Sätze über physikalische Gegenstände oder Sinnesdaten, eine *Analyse*. Wohl aber bedürfen die mathematischen, sowie jene andern Sätze einer Klarlegung ihrer Grammatik.

Ms-124 72[2] Die *mathematischen* Probleme der sogenannten Grundlagen liegen für uns der Math. so wenig zu Grunde, wie der gemalte Fels einer gemalten Burg.

Ms-124 72[3] ’Aber wurde die Fregesche Logik durch den Widerspruch zur Grundlegung der Arithmetik nicht untauglich? Doch! Aber wer sagte denn auch, daß sie zu diesem Zweck tauglich sein müsse?!

Ms-124 72[4] & 73[1] 24.06.1941

Man könnte sich sogar denken, daß man die Fregesche Logik einem Wilden als Instrument gegeben hätte, um damit arithm.

Sätze abzuleiten. Er habe den Widerspruch abgeleitet, ohne zu merken, daß es einer ist, & aus ihm nun beliebige wahre & falsche Sätze.

Ms-124 73[2] ‘Ein guter Engel hat uns bisher bewahrt, *diesen* Weg zu gehen.’ Nun, was willst Du mehr? Man könnte, glaube ich, sagen: Ein guter Engel wird immer nötig sein, was immer Du tust.

Ms-124 73[3] & 74[1] 17 Man sagt: das Rechnen sei ein Experiment, um dadurch zu zeigen, wie es so praktisch sein kann. Denn vom Experiment weiß man, daß es wirklich praktischen Wert hat. Nur vergißt man, daß es diesen Wert besitzt vermöge einer Technik, die ein naturgeschichtliches Faktum ist, deren Regeln aber nicht die Rolle von Sätzen der Naturgeschichte haben.

Ms-124 74[2] “Die Grenzen der Empirie” – (Leben wir, weil es praktisch ist zu leben? Denken wir, weil zu denken praktisch ist?)

Ms-124 74[3] 25.06.1941

Daß ein Experiment praktisch ist, das weiß er; also ist die Rechnung ein Experiment.

Ms-124 74[4] Unsre experimentellen Handlungen haben allerdings ein charakteristisches Gesicht. Wenn ich jemand in einem Laboratorium eine Flüssigkeit in eine Proberöhre gießen & über einer Bunsenflamme erhitzen sehe, bin ich geneigt zu sagen, er mache ein Experiment.

Ms-124 74[5] & 75[1] Nehmen wir an, Leute, welche zählen können, wollen – so wie wir – zu verschiedenerlei praktischen Zwecken Zahlen erfahren. Und dazu fragen sie gewisse Leute, die, wenn ihnen das praktische Problem erklärt wurde, die Augen schließen, & sich die dem Zweck entsprechende Zahl einfallen ließen – – so läge hier keine Rechnung vor, wie verläßlich immer die Zahlangabe sein mag. Ja diese Zahlbestimmung könnte praktisch viel verläßlicher sein, als jede Rechnung.

Ms-124 75[2] Eine Rechnung – könnte man sagen – ist etwa ein Teil der Technik eines Experiments, aber allein kein Experiment.

Ms-124 75[3] 27.06.1941

Vergißt man denn, daß zum Experiment eine bestimmte *Anwendung* des Vorgangs gehört? Und die Rechnung vermittelt die Anwendung.

Ms-124 76[1] Würde denn jemand daran *denken*, das Übersetzen einer Chiffre mittels eines Schlüssels ein Experiment zu nennen?

Ms-124 76[3] Wenn ich zweifle, ob die Zahlen n und m multipliziert l ergeben werden, so bin ich nicht *darüber* im Zweifel, ob eine Verwirrung in unserm Rechnen ausbrechen wird & etwa die Hälfte der Menschen eines – die andere Hälfte etwas andres für richtig erklären werden.

Ms-124 76[4] & 77[1] ‘Experiment’ ist eine Handlung nur von einem gewissen Gesichtspunkt gesehen. Und es ist *klar*, daß die Rechnungshandlung auch ein Experiment sein kann. Ich kann z.B. prüfen wollen, was dieser Mensch unter solchen Umständen, auf diese Aufgabenstellung hin, rechnet. – Aber, ist es nicht eben das, was Du fragst, wenn Du wissen willst, wieviel 52 × 63 ist! Das mag ich wohl fragen – meine Frage mag sogar in diesen Worten ausgedrückt sein. (Vergl. damit: Ist der Satz “Horch, sie stöhnt!” ein Satz über ihr Benehmen, oder über ihr Leiden?) Aber wie ist es nun, wenn ich seine Rechnung vielleicht *nachrechne*? – ‘Nun, dann mache ich noch ein Experiment um ganz sicher herauszufinden, daß alle normalen Menschen so reagieren.’ – Und wenn sie nun *nicht* gleichförmig reagieren –: welches ist das mathematische Resultat?

Ms-124 77[2] & 78[1] 18 “Soll die Rechnung praktisch sein, so muß sie Tatsachen mitteilen. Und das kann nur das Experiment.” Aber welches sind ‘Tatsachen’? Glaubst Du, Du kannst zeigen, welche Tatsache gemeint ist, indem Du etwa mit dem Finger auf sie zeigst? Macht das schon die Rolle klar, welche die ‘Feststellung’ einer Tatsache spielt? – Wenn nun die Mathematik erst den *Charakter* dessen bestimmte, was Du ‘Tatsache’ nennst! ‘Es ist interessant zu wissen *wieviele* Schwingungen dieser Ton hat.’ Aber die Arithmetik hat Dich diese Frage erst gelehrt. Sie hat Dich gelehrt, diese Art von Tatsachen zu sehen.

Ms-124 78[2] Die Mathematik – will ich sagen – lehrt Dich nicht einfach die Antwort auf eine Frage; sondern ein ganzes Sprachspiel, mit Fragen & Antworten.

Ms-124 78[3] Sollen wir sagen, die *Mathematik* lehre uns zählen?

Ms-124 79[1] Kann man von der Mathematik sagen, sie lehre uns experimentelle *Forschungsweisen*? Oder sie helfe uns, solche Forschungsweisen finden?

Ms-124 79[2] ‘Die Mathematik, um praktisch zu sein, muß uns Tatsachen lehren.’ – Aber müssen diese Tatsachen die *mathematischen* Tatsachen sein? – Aber warum soll sie nicht, statt uns ’Tatsachen zu lehren‘, die Formen dessen schaffen, was wir Tatsachen nennen?

Ms-124 79[3] “Ja aber es bleibt doch empirische Tatsache, daß die Menschen so rechnen!” – Ja, aber damit werden ihre Rechensätze nicht zu empirischen Sätzen.

Ms-124 79[4] & 80[1] “Ja, aber es muß doch unser Rechnen auf empirischen Tatsachen beruhen!” Gewiß. Der Zusammenhang besteht (eben) darin, daß die Rechnung das Bild eines Experiments ist; & zwar den Gang zeigt, den es so gut wie immer nimmt. Von den anderen erhält es seine Pointe, seine Physiognomie: aber das sagt durchaus nicht, daß die *Sätze* der Mathematik die Funktionen der empirischen Sätze haben. (Das wäre beinahe, als glaubte Einer: weil doch nur die Schauspieler im Stücke auftreten, so könnten auf der Bühne des Theaters auch keine andern Leute nützlich beschäftigt sein.)

Ms-124 80[2] In der Rechnung *gibt es keine* kausalen Zusammenhänge, nur die Zusammenhänge des Bildes.

Ms-124 82[4] & 02.07.1941

85[1] ‘Die Minute hat 60 Sekunden.’ Das ist ein Satz ganz *ähnlich* einem mathematischen. Hängt seine Wahrheit von der Erfahrung ab? – Nun: könnten wir von Minuten und Sekunden reden, wenn es keinen Zeitsinn gäbe; wenn es keine Uhren gäbe, oder, aus physikalischen Gründen, nicht geben könnte; wenn alle die Zusammenhänge nicht statt hätten, die unsern Zeitmaßen Sinn & Bedeutung geben? In diesem Falle – würden wir sagen – hätte das Zeitmaß seinen Witz verloren (wie die Handlung des Mattsetzens ohne das Schachspiel) – oder es hätte dann einen ganz anderen Sinn. – Macht aber die eine so beschriebene Erfahrung den Satz falsch, die andre wahr? Nein; *das* beschriebe nicht seine Funktion. Er funktioniert ganz anders.

Ms-124 ‘Das Rechnen, um praktisch sein zu können, muß auf
84[2] empirischen Tatsachen beruhen.’ – Warum soll es nicht lieber bestimmen, was empirische Tatsachen *sind*?

Ms-124 Erwäge: ‘Unsre Mathematik wandelt Experimente in
81[3] Definitionen um.’

Ms-124 **19** Aber können wir uns keine menschliche Gesellschaft
81[2] denken, in der es ebensowenig ein Rechnen, ganz in unserm Sinn, wie ein Messen, ganz in unserm Sinn, gibt? – Doch. – Aber wozu will ich mich dann bemühen, was Mathematik ist, herauszuarbeiten? Weil es bei uns eine Mathematik gibt & eine besondere Auffassung derselben, ein Ideal, gleichsam, ihrer Stellung & Funktion, – & dieses muß klar herausgearbeitet werden.

Ms-124 82[1] Fordere nicht zuviel, & fürchte nicht, daß Deine gerechte Forderung in’s Nichts zerrinnen wird.

Ms-124 82[2] Meine Aufgabe ist es nicht, Russells Logik von *innen* anzugreifen, sondern von außen.

Ms-124 82[3] D.h.: nicht, sie mathematisch anzugreifen – sonst triebe ich Mathematik – sondern ihre Stellung, ihr Amt.

Ms-124 84[3] Meine Aufgabe ist es nicht über den Gödelschen Beweis (z.B.) zu reden; sondern an ihm vorbei zu reden.

Ms-124 84[4] & 84[5] & 85[1] 20 Die Aufgabe, die Zahl der Wege zu finden, auf denen man den Fugen dieser Mauern ohne abzusetzen & ohne Wiederholung entlangfahren kann, erkennt

jeder als *mathematische* Aufgabe. – Wäre die Zeichnung viel komplizierter & größer, nicht zu überblicken, so könnte man annehmen sie ändere sich, ohne das wir’s merken, & dann wäre die Aufgabe, jene Zahl (die sich vielleicht gesetzmäßig ändert) zu finden, keine mathematische mehr. Aber auch wenn sie gleichbleibt, ist die Aufgabe dann nicht mathematisch. – Aber auch wenn die Mauer zu überblicken ist, so heißt das nicht, die Aufgabe ist eine mathematische – als sagte man: *diese* Aufgabe ist nun eine der Embryologie. Vielmehr: *hier* brauchen wir eine mathematische Lösung. (Wie: hier ist, was wir bedürfen, eine *Vorlage*.)

Ms-124 85[2] ‘Erkannten’ wir das Problem als mathematisches, weil die Mathematik vom Nachfahren von Zeichnungen handelt?

Ms-124 85[3] & 86[1] Warum sind wir also geneigt, *dieses* Problem schlechtweg ein 'mathematisches' zu nennen? Weil wir es ihm gleich ansehen, daß hier die Beantwortung einer *mathematischen* Frage *so gut wie* alles ist, was wir brauchen. Obschon man das Problem, z.B., leicht als ein psychologisches sehen könnte. Ähnliches von der Aufgabe, aus einem Blatt Papier das & das zu falten.

Ms-124 86[2] & 87[1] Es kann so ausschauen, als ob die Mathematik hier eine Wissenschaft ist, die mit *Einheiten* Experimente macht, Experimente, bei denen es nämlich nicht auf die Arten der Einheiten ankommt, also nicht darauf, ob sie Erbsen, Glaskugeln, Striche, usw. sind. – Nur was von *allen* diesen gilt findet sie heraus. Also nichts über ihren Schmelzpunkt, aber, daß 2 und 2 von ihnen 4 sind. Und das Problem der Mauer № 1 ist eben ein mathematisches, d.h.: kann durch *diese* Art von Experiment gelöst werden. – Und worin das math. Experiment besteht? Nun, im Hinlegen & Verschieben von Dingen, Ziehen von Strichen, Anschreiben von Ausdrücken, Sätzen, etc. Und man muß sich dadurch nicht stören lassen, daß die äußere Erscheinung dieser Experimente nicht die physikalischer & chemischer, etc. hat, es Nur eine Schwierigkeit ist da: der Vorgang ist leicht genug zu sehen, zu beschreiben – aber *wie* ist es als Experiment anzuschauen? Welches ist hier der Kopf, welches der Fuß des Experiments? Welches sind die Bedingungen des Experiments, welches sein Resultat? Ist das Resultat das Rechnungsergebnis, oder das Rechnungsbild, oder die Zustimmung (worin immer diese besteht) des Rechnenden?

Ms-124 87[2] Werden aber, etwa, die Prinzipien der Dynamik zu Sätzen der reinen Mathematik dadurch, daß man ihre Interpretation offen läßt & sie nur zum Erzeugen eines Maßsystems verwendet?

Ms-124 87[3] “Der math. Beweis muß übersichtlich sein” – das hängt mit der Übersichtlichkeit jener Figur zusammen.

Ms-124 87[4] & 88[1] 21 Vergiß nicht: der Satz, der von sich selbst aussagt, er sei unbeweisbar, ist als *mathematische* Aussage aufzufassen – – denn das ist nicht *selbstverständlich*. Es ist nicht selbstverständlich, daß der Satz, die & die Struktur sei so & so nicht konstruierbar, als mathematischer Satz aufzufassen sei.

Ms-124 88[2] D.h.: wenn man sagt: “er sagt von sich selbst aus” – so ist das auf eine spezielle Weise zu verstehen. Hier nämlich entsteht leicht Verwirrung durch den bunten Gebrauch des Ausdrucks “dieser Satz sagt etwas von … aus“.

Ms-124 88[3] In diesem Sinne sagt der Satz $625 = 25 \times 25$ auch etwas über sich selbst aus: daß nämlich die linke Ziffer erhalten wird, wenn man die rechts stehenden multipliziert.

Ms-124 88[4] Der Gödelsche Satz, der etwas über sich selbst aussagt, *erwähnt* sich selbst nicht.

Ms-124 89[2] ‘Der Satz sagt, daß diese Zahl aus diesen Zahlen auf diese Weise nicht erhältlich ist.’ – Aber bist Du auch sicher, daß Du ihn recht ins Deutsche übersetzt hast? Ja gewiß, es scheint so. – Aber kann man da nicht fehlgehen?

Ms-124 89[4] & 90[1]

Könnte man sagen: Gödel sagt, daß man einem math. Beweis auch muß trauen können, wenn man ihn, praktisch, als den Beweis der Konstruierbarkeit der Satzfigur nach den Beweisregeln auffassen will? Oder: Ein math. Satz muß als Satz einer auf sich selbst wirklich anwendbaren Geometrie aufgefaßt werden können. Und tut man das so zeigt es sich, daß man sich auf einen Beweis in gewissen Fällen nicht verlassen kann.

Ms-124 90[3]

Die Grenzen der Empirie sind nicht unverbürgte Annahmen, oder intuitiv als richtig erkannte; sondern Arten & Weisen des Vergleichs & des Handelns.

Ms-124 90[4] & 91[1] & 92[1]

22 03.07.1941

'Nehmen wir an, wir haben einen arithmetischen Satz, der sagt, eine bestimmte Zahl … könne nicht aus den Zahlen …, …, …, durch die & die Operationen gewonnen werden. Und nehmen wir an, es ließe sich eine Übersetzungsregel geben, nach welcher dieser arithm. Satz in die Ziffer jener ersten Zahl – die Axiome, aus denen wir versuchen ihn zu beweisen, in die Ziffern jener andern Zahlen – & unsere Schlußregeln in die im Satz erwähnten Operationen sich übersetzen ließen. – Hätten wir dann *den arithm Satz* aus den Axiomen nach unsern Schlußregeln abgeleitet, so hätten wir *dadurch* seine Ableitbarkeit demonstriert, aber auch einen Satz bewiesen, den man nach jener Übersetzungsregel dahin aussprechen kann: dieser arithm. Satz (nämlich unserer) sei unableitbar. Was wäre nun da zu tun? Ich denke mir, wir schenken unserer *Konstruktion* des *Satzzeichens* glauben, also dem *geometrischen* Beweis. Wir sagen also, diese 'Satzfigur' ist aus jenen so & so gewinnbar. Und übertragen, nur, in eine andre Notation heißt das: diese Ziffer ist mittels dieser Operationen aus jenen zu gewinnen. Soweit hat der Satz & sein Beweis nichts mit einer besondern *Logik* zu tun. Hier war jener konstruierte Satz einfach eine andere Schreibweise der konstruierten Ziffer; sie hatte die *Form* eines Satzes aber wir verglichen sie nicht mit andern Sätzen als Zeichen, welches dies oder jenes *sagt*, einen *Sinn* hat.

Ms-124 Aber freilich ist zu sagen daß jenes Zeichen weder als
92[2] Satzzeichen noch als Zahlzeichen angesehen werden braucht. – Frage Dich: was macht es zu dem einen, was zu dem anderen?

Ms-124 Lesen wir nun den konstruierten Satz (oder die Ziffer) als Satz
92[3] & der mathematischen Sprache (etwa auf Deutsch), so spricht er
93[1] das Gegenteil von dem, was wir eben als bewiesen betrachtet. Wir haben also den wörtlichen Sinn des Satzes als falsch demonstriert & ihn zu gleicher Zeit *bewiesen* – wenn wir nämlich seine Konstruktion aus den zugelassenen Axiomen mittels der zugelassenen Schlußregeln als Beweis betrachten.

Ms-124 Wenn jemand uns einwürfe, wir könnten solche *Annahmen*
93[2] nicht machen, da es *logische* oder *mathematische* Annahmen wären, so antworten wir, daß nur nötig ist anzunehmen jemand habe einen Rechenfehler gemacht & sei *dadurch* zu dem Resultat gelangt, das wir 'annehmen', & er könne diesen Rechenfehler vorderhand nicht finden.

Ms-124 94[1] Hier kommen wir wieder auf den Ausdruck “der Beweis überzeugt uns” zurück. Und was uns hier an der Überzeugung interessiert, ist weder ihr Ausdruck durch Stimme oder Gebärde, noch das Gefühl der Befriedigung oder ähnliches; sondern ihre Betätigung in der Verwendung des Bewiesenen.

Ms-124 94[2] Man könnte mit Recht fragen, welche Wichtigkeit Gödel’s Beweis für unsre Arbeit habe. Denn ein Stück Mathematik kann nicht Probleme von der Art der unsern lösen. – Die Antwort ist: daß die *Situation* uns interessiert, in die ein solcher Beweis uns bringt. ‘Was sollen wir nun sagen?’ – das ist unser Thema.

Ms-124 95[2] So seltsam es klingt, so scheint meine Aufgabe das Gödelsche Theorem betreffend (bloß) darin zu bestehen, klar zu stellen, was in der Mathematik so ein Satz bedeutet, wie: “angenommen, man könnte dies beweisen”.

Ms-124 95[1] 23 04.07.1941

Es kommt uns viel zu selbstverständlich vor, daß wir “wieviele?” fragen & darauf zählen & rechnen!

Ms-124 95[3] Zählen wir, weil es praktisch ist zu zählen? Wir zählen! – Und so rechnen wir auch.

Ms-124 95[5] Man kann auf Grund eines Experiments – oder wie man es sonst nennen will – manchmal die Maßzahl des Gemessenen, manchmal aber auch das geeignete Maß bestimmen.

Ms-124 96[1] So ist also die Maßeinheit das Resultat von Messungen? Ja & nein. Nicht das Messungsresultat, aber vielleicht die *Folge* von Messungen.

Ms-124 96[2] Es wäre also *eine* Frage: "hat uns die Erfahrung gelehrt, *so* zu rechnen?" – & eine andre: "ist die Rechnung ein Experiment?".

Ms-124 96[3] & 97[1] **24** 05.03.1944

Aber läßt sich nicht alles aus allem nach irgend einer Regel – ja nach *jeder* Regel mit entsprechender Deutung – ableiten? Was heißt es, wenn ich z.B. sage: Diese Zahl läßt sich durch Multiplikation jener beiden erhalten? Frage Dich: wann gebraucht man diesen Satz? Nun, es ist z.B. kein psychologischer Satz, der sagen soll, was Menschen unter gewissen Bedingungen tun werden, was sie befriedigen wird; es ist auch kein physikalischer das Benehmen von Zeichen auf dem Papier betreffend. Er wird nämlich in einer andern Umgebung, als ein psychologischer, oder physikalischer, angewandt.

Ms-124 97[2] Nimm an Menschen lernen rechnen, ungefähr, wie sie es tatsächlich tun; aber stell Dir nun verschiedene ‘Umgebungen’ vor, die das Rechnen einmal zu einem psychologischen Experiment, einmal zu einem physikalischen mit den Rechenzeichen, einmal zu etwas anderem macht! Wir nehmen an die Kinder lernen zählen & die einfachen Rechnungsarten durch Nachahmen, Aufmunterung & Zurechtweisung. Aber von einem gewissen Punkt wird nun die Nichtübereinstimmung der Rechnenden (also etwa die Rechenfehler) nicht als etwas Schlechtes, sondern als etwas psychologisch Interessantes behandelt. “Also das hieltest Du damals für richtig?” heißt es, “wir Andern haben es alle *so* gemacht”.

Ms-124 98[1] Ich will sagen: daß das, was wir Mathematik, die *mathematische* Auffassung des Satzes $13 \times 14 = 182$, nennen mit der besondern Stellung zusammenhängt, die wir zu der Tätigkeit des Rechnens einnehmen. Oder, die besondere Stellung, die die Rechnung … in unserm Leben, in unsern übrigen Tätigkeiten hat. Das Sprachspiel in dem sie steht.

Ms-124 98[2] Man kann ein Musikstück auswendig lernen, um es richtig spielen zu können; aber auch in einem psychologischen Experiment, um das Arbeiten des musikalischen Gedächtnisses zu untersuchen. Man könnte es aber auch dem Gedächtnis einprägen um danach irgendwelche Veränderungen in der Partitur zu beurteilen.

Ms-124 98[3] & 99[1] 25 Ein Sprachspiel: Ich rechne Multiplikationen & sage dem Andern: wenn Du richtig rechnest wird das & das herauskommen; worauf er die Rechnung ausführt und sich der Richtigkeit, & manchmal der Falschheit, meiner Voraussage freut. Was setzt dieses Sprachspiel voraus? Daß 'Rechenfehler' leicht zu finden sind & immer Übereinstimmung über Richtigkeit, oder Falschheit der Rechnung rasch erzielt wird.

Ms-124 99[2] "Wenn Du mit jedem Schritt übereinstimmen wirst, wirst Du zu diesem Resultat gelangen."

Ms-124 99[3] Was ist das Kriterium dafür, daß ein Schritt der Rechnung richtig ist; ist es nicht, daß mir der Schritt richtig erscheint, & anderes von der gleichen Art? Was ist das Kriterium dafür, daß ich zweimal die gleiche Ziffer hinschreibe? Ist es nicht, daß mir die Ziffern gleich *erscheinen*, & ähnliches?

Ms-124 99[4] Was ist das Kriterium dafür, daß ich hier dem Paradigma gefolgt bin?

Ms-124 100[1] "Wenn Du sagen wirst, daß jeder Schritt richtig ist, wirst Du das herausbekommen."

Ms-124 100[2] Die Voraussage ist eigentlich: Du wirst, wenn Du Dein Tun für richtig hältst, *das* tun. Du wirst, sofern Du jeden Schritt für richtig anerkennst, diesen Weg gehen. – Daher auch zu diesem Ende gelangen.

Ms-124 100[3] *Logisch* wird geschlossen, wenn keine Erfahrung der Konklusion widerstreiten kann, sie widerstreite denn den Prämissen. D.h., wenn der Schluß nur eine Bewegung in der Darstellung ist.

Ms-124 100[4] & 101[1]

26 In einem Sprachspiel werden Sätze gebraucht; Meldungen, Befehle, u. dergl. Und nun werden auch Rechensätze von den Personen verwendet. Sie sagen sie etwa zu sich selbst, zwischen den Befehlen und Meldungen.

Ms-124 101[2] & 102[1]

06.03.1944

Ein Sprachspiel, in dem Einer nach einer Regel rechnet & nach den Rechnungsresultaten Steine eines Baues setzt. Er hat gelernt mit Schriftzeichen nach Regeln zu operieren. – Wer den Vorgang dieses Lehrens & Lernens beschreibt hat alles gesagt, was sich über das richtige Handeln nach der Regel sagen läßt. Wir können nicht weiter gehen. Es nützt z.B. nichts zum Begriff der Übereinstimmung zurück zu gehen, weil es nicht sicherer ist, daß eine Handlung mit einer andern übereinstimmt, als daß die Handlung einer Regel gemäß geschehen ist. Es ist ja, nach einer Regel vorgehen, auch auf eine Übereinstimmung gegründet

Ms-124 102[2]

Wie gesagt, worin einer Regel (richtig) folgen besteht, kann man nicht *näher* beschreiben, als indem man das *Lernen* des 'Vorgehens nach der Regel' beschreibt. Und diese Beschreibung ist natürlich eine alltägliche, wie die des Kochens, oder Nähens etwa. Sie setzt schon soviel voraus, wie diese. Sie unterscheidet Eins vom Andern; informiert also einen Menschen, der etwas ganz bestimmtes nicht weiß. (Vergl. Bemerkung: die Philosophie verwende keine vorbereitende Sprache etc.)

Ms-124 102[3] & 103[1]

07.03.1944

Denn wer mir beschreibt, wie Leute zum Befolgen einer Regel abgerichtet werden & wie sie richtig drauf reagieren, wird selber in der Beschreibung eine Regel gebrauchen & ihr Verständnis bei mir voraussetzen.

Ms-124 103[2] Wir haben also jemand die Technik des Multiplizierens beigebracht. Dabei verwenden wir Wörter der Aufmunterung & der Zurückweisung. Wir werden ihm auch manchmal das *Ziel* der Multiplikation anschreiben. “Das mußt Du erhalten, wenn es richtig sein soll” können wir ihm sagen.

Ms-124 103[3] & 104[1] Kann nun der Schüler aber widersprechen & sagen: ’Woher weißt Du das? Und ist, was Du willst, daß ich der Regel folgen soll, oder daß ich dies Resultat erhalten soll? Denn die beiden brauchen ja nicht zusammen zu treffen.” Nun, wir nehmen nicht an, daß der Schüler das sagen kann; wir nehmen an daß er die Regel von beiden Seiten her gelten läßt. Daß er den einzelnen Schritt *&* das Rechnungsbild – & also das Rechnungsresultat – als Kriterien der Richtigkeit auffaßt, & daß, wenn diese nicht übereinstimmen er an eine Verwirrung der Sinne glaubt.

Ms-124 104[2] 27 Ist es nun denkbar, daß einer der Regel richtig folgt & zu verschiedenen Malen beim Multiplizieren 15 × 13 doch verschiedenes errechnet? Daß kommt darauf an, *welche Kriterien* er für das richtige Folgen gelten läßt. In der Mathematik ist das Resultat selbst auch ein Kriterium des richtigen Rechnens. So aufgefaßt ist es also undenkbar der Regel richtig zu folgen & verschiedene Rechnungsbilder zu erhalten.

Ms-124 104[3] & 105[1] Das Nicht-Geltenlassen des Widerspruchs charakterisiert die Technik der Verwendung der Wahrheitsfunktionen. Lassen wir den Widerspruch gelten, so heißt das, daß wir die Verwendung der Wahrheitsfunktionen ändern; als faßten wir z.B. eine doppelte Verneinung nicht mehr als Bejahung auf. Und diese Änderung wäre von Bedeutung, da die Technik unserer Logik ihrem Charakter nach zusammenhängt mit – – –

Ms-124 105[2] "Die Regeln zwingen mich zu etwas", nun das kann man schon sagen, weil, was mir mit der Regel übereinzustimmen scheint ja nicht von meiner Willkür abhängt. Daher kann es ja geschehen daß ich die Regeln eines Brettspiels ersinne & nachträglich herausfinde daß in diesem Spiel wer anfängt gewinnen *muß*. Und so ähnlich ist es ja, wenn ich finde, daß die Regeln zu einem Widerspruch führen.

Ms-124 105[3] 08.03.1944

Ich bin nun gezwungen anzuerkennen, daß das eigentlich kein Spiel ist.

Ms-124 106[1] 'Die Regeln des Multiplizierens, einmal angenommen, zwingen mich nun anzuerkennen, daß … × … gleich … ist.' Angenommen, daß es mir unangenehm wäre, dies anzuerkennen. Soll ich sagen: "Nun, das kommt von dieser Art Abrichtung. Menschen die so abgerichtet, so konditioniert, sind, kommen dann in solche Schwierigkeiten."?

Ms-124 106[2] & 107[1]

‘Wie zählen wir im Dezimalsystem?’ – “Wir schreiben auf 1, 2, auf 2, 3 … – auf 13 14 … auf 123 124, *u.s.f.*” – Das ist eine Erklärung für den, der zwar irgend etwas nicht wußte, das ‘u.s.f.’ aber verstand. Und es verstehen, heißt, es nicht als Abkürzung verstehen; es heißt *nicht*, daß er jetzt im Geiste eine viel längere Reihe als die meiner Beispiele sieht. Daß er es versteht, zeigt sich darin, daß er nun gewisse Anwendungen macht, in gewissen Fällen *dies* sagt & *so* handelt.

Ms-124 107[2]

“Wie zählen wir im Dezimalsystem?” – … – Nun, ist das keine Antwort? – Aber nicht für den, der das “u.s.f.” nicht versteht. – Aber kann unsere Erklärung es ihm nicht begreiflich gemacht haben? Kann er durch sie nicht die Idee der Regel erhalten haben? – Frage Dich, was die Kriterien dafür sind, daß er diese Idee nun erhalten hat.

Ms-124 107[3]

Was zwingt mich denn? – Der Ausdruck der Regel? – Ja; wenn ich einmal so erzogen bin. Aber kann ich sagen, er zwingt mich, ihm zu folgen? Ja; wenn man sich hier die Regel nicht als Linie denkt, der ich nachfahre, sondern als Zauberspruch der uns im Bann hält.

[“schlichter Unsinn, & Beulen …”]

Ms-124 107[4] & 108[1]

28 Warum soll man nicht sagen der Widerspruch, z.B. ‘heteronom’ $\in$ heteronom $\equiv = \sim$ (‘heteronom’ $\in$ heteronom), zeige eine logische Eigenschaft des Begriffs ‘heteronom’?

Ms-124 108[2] “‘Zweisilbig’ ist heteronom”, oder “dreisilbig ist nicht heteronom” sind Erfahrungssätze. Es könnte in irgend einem Zusammenhang wichtig sein, herauszufinden, ob Eigenschaftswörter die Eigenschaften besitzen, die sie bezeichnen, oder nicht. Man gebraucht dann in einem Sprachspiel das Wort “heteronom”. Aber soll nun der Satz “‘h’ $\in$ h” ein Erfahrungssatz sein? Er ist es offenbar nicht & wir würden ihn auch, wenn wir den Widerspruch nicht gefunden haben, nicht als einen Satz in unserm Sprachspiel zulassen.

Ms-124 108[3] & 109[1] 09.03.1944

‘h’ $\in$ h $\equiv$ ~ (‘h’ $\in$ h) könnte man ‘eine wahre Kontradiktion’ nennen. – Aber diese Kontradiktion ist doch kein sinnvoller Satz! Wohl, aber die Tautologien der Logik sind es ja auch nicht.

Ms-124 109[2] ‘Die Kontradiktion ist wahr’ heißt hier: sie ist bewiesen; abgeleitet aus den Regeln für das Wort “h”. Ihre Verwendung ist, zu zeigen, daß “h” eines jener Wörter ist, welche in “$\xi \in b$” eingesetzt keinen Satz ergeben.

Ms-124 109[3] “Die Kontradiktion ist wahr” heißt: Das ist wirklich ein Widerspruch, & Du darfst also das Wort ‘h’ als Argument von ‘$\xi \in h$’ nicht verwenden.

Ms-124 109[4] & 110[1]

29 Ich bestimme ein Spiel & sage: "Machst Du diese Art Zug, so ziehe ich *so*, machst Du jene, so ziehe ich *so*. – Jetzt spiele!" Und nun macht er einen Zug, oder etwas, was ich auch als Zug anerkennen muß, & wenn ich nach meinen Regeln weiterspielen will, so erweist sich, was immer ich tue, als unrichtig. Wie konnte das geschehen? Als ich Regeln aufstellte, da *sagte* ich etwas. Ich folgte einem gewissen Brauch. Ich sah nicht voraus, was wir weiter tun würden, oder sah nur eine bestimmte Möglichkeit. Es war nicht anders, als hätte ich Einem gesagt: „Mit diesen Figuren kannst Du nicht mattsetzen" & hätte eine bestehende Möglichkeit des Mattsetzens übersehen.

Ms-124 110[2] & 111[1]

Die verschiedenen, halb scherzhaften, Einkleidungen des logischen Paradoxes sind nur in sofern interessant als sie einen daran erinnern, daß eine ernsthafte Einkleidung des Paradoxes von Nöten ist, um seine Funktion eigentlich zu verstehen. Es fragt sich: Welche Rolle kann ein solcher 'logischer Irrtum' in einem Sprachspiel spielen?

Ms-124 111[2]

Man gibt jemandem etwa Instruktionen, wie er in dem & dem Fall zu handeln hat; & diese Instruktionen erweisen sich später als *unsinnig*.

Ms-124 111[3] 30 Das logische Schließen ist ein Teil eines Sprachspiels. Und zwar folgt, der im Sprachspiel logische Schlüsse ausführt, gewissen Instruktionen, die beim Lernen des Sprachspiels selber gegeben wurden. Baut der Gehilfe etwa nach gewissen Befehlen ein Haus, so hat er das Herbeitragen der Baustoffe etc. von Zeit zu Zeit zu unterbrechen & gewisse Operationen mit Zeichen auf einem Papier auszuführen; worauf er, dem Resultat entsprechend, wieder zu seiner Bauarbeit zurückkehrt.

Ms-124 112[1] Denke Dir einen Vorgang, in welchem jemand, der einen Karren schiebt darauf gekommen ist, daß er die Radachse reinigen muß, wenn der Karren sich zu schwer schieben läßt. Ich meine nicht, daß er zu sich sagt: "immer, wenn der Karren sich nicht schieben läßt, ...". Sondern er *handelt* einfach so. Und nun kommt er darauf einem Andern zuzurufen: "Der Karren geht nicht; reinige die Achse, oder auch: "Der Karren geht nicht. Also muß die Achse gereinigt werden". Nun das ist ein Schluß. Kein logischer, freilich.

Ms-124 112[2] Kann ich nun sagen: "Der nicht-logische Schluß kann sich als falsch erweisen; der logische nicht"?

Ms-124 112[3] & 113[1] Ist der logische Schluß richtig, wenn er den Regeln gemäß gezogen wurde; oder, wenn er *richtigen* Regeln gemäß gezogen wird? Wäre es z.B. falsch, wenn man sagte, aus ~p solle immer p gefolgert werden? Aber warum soll man nicht lieber sagen: so eine Regel gäbe den Zeichen "~p" & "p" nicht ihre gewöhnliche Bedeutung?

Ms-124 113[2] Man kann es so auffassen – will ich sagen – daß die Schlußregeln den Zeichen ihre Bedeutung geben, weil sie Regeln der Verwendung dieser Zeichen sind. Daß die Schlußregeln zur Bestimmung der Bedeutung der Zeichen gehören. In diesem Sinne können die Schlußregeln nicht falsch, oder richtig sein.

Ms-124 113[3] A hat beim Bau die Länge & Breite einer Fläche gemessen & gibt dem B den Befehl: “Bring 15 × 18 Platten”. B ist dazu abgerichtet zu multiplizieren & dem Resultat entsprechend eine Menge von Platten abzuzählen.

Ms-124 113[4] & 114[1] Der Satz “15 × 18 = 270” braucht natürlich nie ausgesprochen zu werden.

10.03.1944

Ms-124 114[2] Man könnte sagen: Experiment – Rechnung sind Pole, zwischen welchen sich menschliche Handlungen bewegen.

Ms-124 114[3] 31 Wir konditionieren einen Menschen in dieser & dieser Weise; wirken dann auf ihn durch eine Frage ein; & erhalten ein Zahlzeichen. Dieses verwenden wir weiter zu unsern Zwecken & es erweist sich als praktisch. Das ist das Rechnen. – Noch nicht! Dies könnte ein sehr *zweckmäßiger* Vorgang sein – muß aber nicht sein, was wir 'rechnen' nennen. Wie man sich denken könnte, daß zu Zwecken denen heute unsere Sprache dient Laute ausgestoßen würden, die doch keine Sprache bildeten. Zum Rechnen gehört, daß alle die richtig rechnen dasselbe Rechnungsbild produzieren. Und 'richtig rechnen' heißt nicht: bei klarem Verstande, oder ungestört rechnen, sondern *so* rechnen.

Ms-124 115[2] Jeder math. Beweis stellt das math. Regelgebäude auf einen neuen Fuß.

Ms-124 115[3] 32 Ich habe mich gefragt: Ist Mathematik mit rein phantastischer Anwendung nicht auch wirkliche Mathematik? – Aber es frägt sich: Nennen wir es 'Mathematik' nicht etwa nur darum weil es hier Übergänge, Brücken gibt von der phantastischen zur nichtphantastischen Anwendung? D.h.: würden wir sagen, Leute besäßen eine Mathematik, die das Rechnen, Operieren mit Zeichen, *bloß* zu okkulten Zwecken benützten?

Ms-124 115[4] & 116[1]

33 Aber ist es dann doch nicht unrichtig zu sagen: das der Mathematik *Wesentliche* sei, daß sie Begriffe bilde? – Denn die Mathematik ist doch ein anthropologisches Phänomen. Wir können es also als das Wesentliche in einem großen Teil der Mathematik (dessen was 'Mathematik' genannt wird) erkennen & doch sagen, es spiele keine Rolle in anderen Gebieten. Diese Einsicht allein wird freilich nicht ohne Einfluß auf die sein, die die Mathematik nun so sehen lernen. Mathematik ist also eine Familie; aber das sagt nicht daß es uns also gleich sein wird, was alles in sie aufgenommen wird.

Ms-124 116[2]

Man könnte sagen: verstündest Du *keinen* mathematischen Satz besser als (Du) das Mult. Ax. verstehst, so verstündest Du Mathematik *nicht*.

Ms-124 117[4] & 118[1]

34 – Hier ist ein Widerspruch. Aber wir sehen ihn nicht & ziehen Schlüsse aus ihm. Etwa auf mathematische Sätze; & auf falsche. Aber wir erkennen diese Schlüsse an. – Und bricht nun eine von uns berechnete Brücke zusammen, so finden wir dafür eine andere Ursache, oder sagen, Gott habe es so gewollt. War nun unsre Rechnung falsch; oder war es keine Rechnung? Gewiß, wenn wir als Forschungsreisende nun die Leute betrachten, die es so machen, werden wir vielleicht sagen: diese Leute rechnen überhaupt nicht. Oder: in ihren Rechnungen sei ein Element der Willkür, welches das Wesen ihrer Mathematik von dem der unsern unterscheidet. Und doch würden wir nicht leugnen können daß die Leute eine Mathematik haben.

Ms-124 118[2] & 119[1] Was für Regeln muß der König geben, damit er der unangenehmen Situation von nun an entgeht, in die ihn sein Gefangener gebracht hat? – Was für eine Art Problem ist das? – Es ist doch ähnlich diesem: Wie muß ich die Regeln dieses Spiels abändern, daß die & die Situation nicht eintreten kann. Und das ist eine mathematische Aufgabe.

Ms-124 119[2] Aber kann es denn eine mathematische Aufgabe sein, die Mathematik zur Mathematik zu machen?

Ms-124 119[3] Kann man sagen: "Nachdem dies mathematische Problem gelöst war, begannen die Menschen eigentlich zu rechnen"?

Ms-124 119[4] & 120[1] 35 11.03.1944

Was ist das für eine Sicherheit, wenn sie darauf beruht, daß unsre Banken tatsächlich im allgemeinen nicht von allen ihren Kunden auf einmal überrannt *werden*; aber bankrott würden, wenn es doch geschähe?! Nun es ist eine *andere* Art von Sicherheit als die primitivere; aber es ist doch eine Sicherheit. Ich meine: wenn nun wirklich in der Arithmetik ein Widerspruch gefunden würde – nun so bewiese das nur, daß eine Arithmetik mit einem *solchen* Widerspruch sehr gute Dienste leisten konnte; & es besser sein wird, wenn wir unsern Begriff der notwendigen Sicherheit modifizieren als zu sagen, das wäre eigentlich noch keine rechte Arithmetik gewesen.

Ms-124 120[2] "Aber es ist doch nicht die ideale Sicherheit?" – Ideal, – für welchen Zweck?

Ms-124 120[3] Die Regeln des logischen Schließens sind Regeln des *Sprachspiels*.

Ms-124 122[1]

36 12.03.1944

Was für eine *Art* von Satz ist: "Die Klasse der Löwen ist kein Löwe, aber die Klasse der Klassen eine Klasse". Wie wird er verifiziert? Wie könnte man ihn *verwenden*? – So viel ich sehe, nur als grammatische Aussage. Jemand drauf aufmerksam zu machen, daß der Ausdruck "die Klasse der Löwen" nicht die Bezeichnung eines Löwen ist, daß aber Klassen eine Klasse bilden können.

Ms-124 122[2] Man kann sagen, daß Wort "Klasse" werde reflexiv gebraucht, auch wenn man, z.B., die Russellsche Theorie der Typen anerkennt. Denn es wird ja doch auch in ihr reflexiv verwendet.

Ms-124 122[3] & 123[1] Freilich ist, in diesem Sinn zu sagen, die Klasse der Löwen sei kein Löwe etc., ähnlich, als sagte jemand, er habe ein "e" für ein "n" gehalten, wenn er eine Kugel für einen Kegel ansieht.

Ms-124 123[2] Das plötzliche Umwechseln der Auffassung des Bildes eines Würfels & die Unmöglichkeit "Löwe" & "Klasse" als vergleichbare Begriffe zu sehen.

Ms-124 123[3] Der Widerspruch sagt: "Nimm Dich in Acht ...".

Ms-124 123[4] Wie aber wenn man einem bestimmten Löwen (dem König der Löwen etwa) den Namen "Löwe" gibt? Nun wirst Du sagen: aber es ist doch klar daß im Satz "Löwe ist ein Löwe" das Wort "Löwe" auf zwei verschiedene Arten gebraucht wird. (Log. Phil. Abh.) Aber kann ich sie nicht zu *einer* Art des Gebrauchs zählen?

Ms-124 123[5] & 124[1] Aber wenn in dieser Weise der Satz "Löwe ist ein Löwe" gebraucht würde: würde ich den auf nichts aufmerksam machen, den ich auf die Verschiedenheit der Verwendung der beiden "Löwe" aufmerksam machte?

Ms-124 124[2] Man kann ein Tier daraufhin untersuchen, ob es eine Katze ist. Aber den Begriff Katze kann man so jedenfalls nicht untersuchen.

Ms-124 124[3] Wenn auch "die Klasse der Löwen ist kein Löwe" wie ein Unsinn erscheint, dem man nur aus Höflichkeit einen Sinn beilegen könne; so will ich diesen Satz doch nicht so auffassen, sondern als (einen) rechten Satz, wenn er nur richtig aufgefaßt wird. (Also nicht so wie in Log. Phil. Abh.) Meine Auffassung ist also hier sozusagen anders. Aber das heißt, daß ich sage: es gibt auch ein Sprachspiel mit *diesem* Satz.

Ms-124 124[4] "Die Klasse der Katzen ist keine Katze." – Woher weißt Du das?

Ms-124 124[5] & 125[1] 13.03.1944

In der Tierfabel heißt es: "Der Löwe ging mit dem Fuchs spazieren", nicht *ein* Löwe mit einem Fuchs; noch auch der Löwe so & so mit dem Fuchs so & so. Und hier ist es doch wirklich so, als ob die Gattung Löwe als ein Löwe gesehen würde. (Es ist nicht so, wie Lessing sagt, als ob statt irgendeinem Löwen ein bestimmter gesetzt würde. "Grimmbart der Dachs" heißt nicht: ein Dachs mit Namen "Grimmbart".)

Ms-124 126[1] Denk Dir eine Sprache, in der die Klasse der Löwen "der Löwe aller Löwen genannt wird", die Klasse der Bäume "der Baum aller Bäume", etc. – weil sie sich vorstellen alle Löwen bildeten *einen* großen Löwen. [Wir sagen: "Gott hat den Menschen geschaffen".] Dann könnte jemand das Paradox aufstellen, es gäbe keine bestimmte Anzahl aller Löwen. Etc.

Ms-124 126[2] Wäre es aber etwa unmöglich, in so einer Sprache zu zählen & zu rechnen?

Ms-124 126[3] **37** Man könnte sich fragen: Welche Rolle kann ein Satz, wie "Ich lüge immer", im menschlichen Leben spielen? Und da kann man sich Verschiedenes vorstellen.

Ms-124 126[4] **38** 14.03.1944

Ist die Umrechnung einer Länge von Zoll auf cm ein logischer Schluß? "Der Würfel ist 2 Zoll lang. – Also ist er ungefähr 50 mm lang." Ist das ein *logischer* Schluß?

Ms-124 127[1] Ja aber ist nicht eine Regel etwas willkürliches? Etwas, was ich *festsetze*? Und könnte ich festsetzen, daß die Multiplikation 18 × 15 *nicht* 270 ergeben solle? – Warum nicht? – Aber dann ist sie eben nicht nach der Regel geschehen, die ich zuerst festgesetzt, & deren Gebrauch ich eingeübt hatte. Ist denn etwas, was aus einer Regel folgt, (wieder) eine Regel? Und wenn nicht, – was für eine Art von Satz soll ich es nennen?

Ms-124 127[2] & 128[1] & 129[1]

"Es ist den Menschen ... unmöglich einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen." Ja, wenn ich nur eine Ahnung hätte, wie es gemacht wird, – ich versuchte es gleich! – Aber wenn es uns unmöglich ist einen Gegenstand als von sich selbst verschieden anzuerkennen, so ist es also wohl möglich zwei Gegenstände als von einander verschieden anzuerkennen? Ich habe also etwa zwei Sessel vor mir & erkenne an daß es *zwei* sind. Aber da kann ich doch unter Umständen auch glauben, daß es nur *einer* ist; & in *diesem* Sinne kann ich auch einen für zwei halten. – Aber damit erkenne ich doch nicht den Sessel als von sich selbst verschieden an! Wohl; aber dann habe ich auch nicht die zwei als voneinander verschieden anerkannt. Wer glaubt, er könne dies tun –, & eine Art psychologisches Spiel spielt, der übersetze dies in ein Spiel der Gesten. Wenn er zwei Gegenstände vor sich hat, zeige er mit jeder Hand auf einen von ihnen; gleichsam als wolle er ihnen andeuten, daß sie autonom seien. Hat er nur einen Gegenstand vor sich, so deutet er mit beiden Händen auf ihn um anzudeuten, daß man keinen Unterschied zwischen ihm & ihm selbst machen kann. – Warum soll man nun aber nicht das Spiel in umgekehrter Weise spielen?

Ms-124 129[2] & 130[1]

39 15.03.1944

Die Worte "richtig" & "falsch" werden beim Unterricht im Vorgehen nach der Regel gebraucht. Das Wort "richtig" läßt den Schüler gehen, das Wort "falsch" hält ihn zurück. Könnte man nun dem Schüler diese Worte erklären indem man statt ihrer setzt: "das stimmt mit der Regel überein – das nicht"? Nun, wenn er einen Begriff vom Übereinstimmen hat. Aber wie, wenn dieser eben erst gebildet werden muß? (Es kommt darauf an, wie er auf das Wort “übereinstimmen” reagiert.)

Ms-124 130[2] Man lernt nicht einer Regel folgen, indem man zuerst den Gebrauch des Wortes “Übereinstimmung” lernt.

Ms-124 130[3] Vielmehr lernt man die Bedeutung von “Übereinstimmen”, indem man einer Regel folgen lernt.

Ms-124 130[4] Wer verstehen will, was es heißt: “einer Regel folgen”, der muß doch selbst einer Regel folgen können.

Ms-124 130[5] & 131[1] “Wenn Du diese Regel annimmst, *mußt* Du das tun.” – Das kann heißen: die Regel läßt Dir hier nicht zwei Wege offen. (Ein mathematischer Satz.) Ich meine aber: die Regel führt Dich wie ein Gang mit festen Mauern. Aber dagegen kann man doch einwenden, die Regel ließe sich auf alle mögliche Weisen deuten. – Die Regel steht hier wie ein *Befehl*. Und *wirkt* auch wie ein Befehl.

Ms-124 131[2] & 132[1] 40 Ein Sprachspiel: Etwas *Anderes* bringen; das *Gleiche* bringen. Nun wir können uns vorstellen, wie es gespielt wird. – Aber wie kann ich es Einem erklären? Ich kann ihm *diesen* Unterricht geben. – Aber wie weiß er dann, was er das nächste Mal als ‘Gleiches’ bringen soll – mit welchem Recht kann *ich* sagen, daß er das richtige, oder falsche, gebracht hat? – Ja, ich weiß freilich, daß (hier) in gewissen Fällen Menschen auf mich einstürmen würden mit den Zeichen der Mißbilligung. Und heißt das nun etwa, die Definition von “Gleich” wäre die: gleich sei, was alle Menschen für gleich hielten? – Freilich nicht.

Ms-124 Denn, um Gleichheit zu konstatieren, benütze ich ja natürlich
132[2] nicht die Übereinstimmung der Menschen. Welches Kriterium verwendest Du also? Gar keins.

Ms-124 Das Wort ohne Rechtfertigung zu gebrauchen, heißt nicht, es
132[3] zu Unrecht gebrauchen.

Ms-124 Das Problem des vorigen Sprachspiels [№ ...] gibt es natürlich
133[2] auch in dem: Bringe mir etwas Rotes. Denn woran erkenne ich, daß etwas rot ist? An der Übereinstimmung der Farbe mit einem Muster? – Mit welchem Recht sage ich: "Ja, das ist rot."? Nun, ich sage es; & es läßt sich nicht rechtfertigen. Und auch für dieses Sprachspiel, wie für das vorige, ist es charakteristisch, daß es sich unter der ruhigen Zustimmung aller Menschen vollzöge.

Ms-124 Ein unentschiedener Satz der Mathematik ist etwas, was weder
135[2] als Regel, noch als das Gegenteil einer Regel anerkannt ist & die Form einer mathematischen Aussage hat. – Ist diese Form aber ein klar umschriebener Begriff?

Ms-124 Denke Dir den $\lim_{n\to\infty}\varphi n=\ell$ als eine Eigenschaft eines
135[3] Musikstücks (etwa). Aber natürlich nicht *so* daß das Stück endlos weiterliefe, sondern als eine dem Ohr erkennbare Eigenschaft (gleichsam *algebraische* Eigenschaft) des Stückes.

Ms-124 Denk Dir Gleichungen als Ornamente (Tapetenmuster)
137[2] verwendet; & nun eine Prüfung dieser Ornamente daraufhin, welcher Art Kurven sie entsprechen. Die Prüfung wäre analog der kontrapunktischen Eigenschaften eines Musikstücks.

Ms-124 138[3] & 139[1]

41 Ein Beweis der zeigt, daß die Figur "777" in der Extension von π vorkommt aber nicht zeigt *wo*. Nun, so bewiesen wäre dieser 'Existenzsatz' für gewisse Zwecke *keine Regel*. Aber könnte er nicht z.B. als Mittel der Einteilung von Entwicklungsregeln dienen. Es wäre etwa auf analoge Art bewiesen daß "777" in π^2 nicht vorkomme, wohl aber in π • e. etc. Die Frage wäre nun: Ist es vernünftig von dem betreffenden Beweis zu sagen: er beweise die Existenz von "777" in dieser Entwicklung. Dies kann einfach irreführend sein. Das ist eben der Fluch der Prosa, & besonders der Russellschen Prosa, in der Mathematik.

Ms-124 139[2]

Was schadet es, z.B., zu sagen, Gott kenne *alle* irrationalen Zahlen? Oder: sie seien schon alle da, wenn wir auch nur gewisse kennen? Warum sind diese Bilder nicht harmlos? Einmal verstecken sie gewisse Probleme. –

Ms-124 175[2]

Angenommen die Menschen berechnen die Entwicklung von π immer weiter & weiter. Der allwissende Gott weiß also, ob sie bis zur Zeit des Weltuntergangs zu einer Figur 777 gekommen sein werden. Aber kann seine *Allwissenheit* entscheiden, ob die Menschen nach dem Weltuntergang zu jener Figur gekommen *wären*? Sie kann es nicht. Ich will sagen: Auch Gott kann Mathematisches nur durch Mathematik entscheiden. Auch für ihn kann die bloße Regel des Entwickelns nichts entscheiden, was sie für uns nicht entscheidet.

Ms-124 175[3] & 176[1] Man könnte das so sagen: Ist uns die Regel der Entwicklung gegeben, so kann uns nun eine *Rechnung* lehren, daß an der fünften Stelle die Ziffer “2” steht. Hätte Gott dies, ohne diese Rechnung, bloß aus der Entwicklungsregel wissen können? Ich will sagen: Nein.

Ms-124 139[3] 42 Wenn ich von der Mathematik sagte, ihre Sätze bestimmen Begriffe, so ist das *vag*; denn “2 + 2 = 4” bildet einen Begriff in anderem Sinne, als “$p \supset p$”, “$(x).fx \supset fa$”, oder der Dedekindsche Satz. Es gibt hier eben eine Familie von Fällen.

Ms-124 139[4] & 140[1] Der Begriff der Regel zur Bildung eines unendlichen Dezimalbruchs ist – natürlich – kein spezifisch mathematischer. Es ist ein Begriff in Zusammenhang mit einer bestimmten *Tätigkeit* im menschlichen Leben. Der Begriff dieser Regel ist nicht mathematischer, als der: der Regel zu folgen. Oder auch: dieser letztere ist nicht weniger scharf definiert, als der Begriff so einer Regel selbst. – Ja, der Ausdruck der Regel & sein Sinn ist nur ein Teil des Sprachspiels: Der Regel folgen.

Ms-124 140[2] Man kann mit dem *gleichen* Recht allgemein von solchen Regeln reden, als von den Tätigkeiten, ihnen zu folgen.

Ms-124 140[3] Man sagt freilich “das liegt alles schon in unserm Begriff” von der Regel, z.B. – aber das heißt nur: zu *diesen* Begriffsbestimmungen neigen wir. Denn was haben wir denn im Kopf, was alle diese Bestimmungen schon enthält?!

Ms-124 140[4] & 141[1] Die Zahl ist, wie Frege sagt, eine Eigenschaft eines Begriffs – – aber in der Mathematik ist sie ein Merkmal eines mathematischen Begriffs. $\aleph_0$ ist ein *Merkmal* des Begriffs (der) Kardinalzahl; & die *Eigenschaft* einer Technik. $2\aleph_0$ ist ein Merkmal des Begriffs des unendlichen Dezimalbruchs, aber wovon ist diese Zahl eine Eigenschaft? D.h.: von welcher Art von Begriff kann man sie empirisch aussagen?

Ms-124 141[2] **43** Der Beweis des Satzes zeigt mir, was ich auf die Wahrheit des Satzes hin wagen will. Und verschiedene Beweise können mich wohl dazu bringen dasselbe zu wagen.

Ms-124 141[3] Das Überraschende, Paradoxe ist paradox nur in einer gewissen, gleichsam mangelhaften, Umgebung. Man muß diese Umgebung so ergänzen, daß, was paradox schien nicht länger so erscheint.

Ms-124 141[4] & 142[1] Wenn ich bewiesen habe, daß 18 × 15 = 270 ist, so habe ich damit auch den geometrischen Satz bewiesen, daß man durch Anwendung der Transformationsregeln auf das Zeichen “18 × 15” das Zeichen “270” erhält. – Angenommen nun, die Menschen, durch irgendein Gift am klaren Sehen, oder richtigen Erinnern gehindert (wie wir jetzt sagen wollen) erhielten bei dieser Rechnung nicht “270”. – Ist die Rechnung, wenn man mit ihr nicht richtig voraussagen kann, was Einer unter normalen Umständen herausbringen wird, nicht nutzlos? Nun, auch wenn sie es ist, so zeigt das nicht daß der Satz 18 × 15 = 270 der Erfahrungssatz sei: die Menschen rechneten im allgemeinen *so*.

Ms-124 142[2] & 143[1]

Anderseits ist es nicht klar, daß die allgemeine Übereinstimmung der Rechnenden ein charakteristisches Merkmal alles dessen ist was man "Rechnen" nennt. Ich könnte mir denken, daß Leute die rechnen gelernt haben unter bestimmten Umständen, etwa unter dem Einfluß des Opiums, anfingen Einer verschieden vom Andern zu rechnen, & von diesen Rechnungen Gebrauch machten; & daß man nun nicht sagte, sie rechneten ja gar nicht & seien unzurechnungsfähig, sondern daß man ihre Rechnungen als berechtigtes Vorgehen hinnähme. Aber müssen sie nicht wenigstens zum gleichen Rechnen abgerichtet werden? Gehört *das* nicht zum Begriff des Rechnens? Ich glaube, man könnte sich auch da Abweichungen vorstellen.

Ms-124 144[3] & 145[1]

44 Kann man sagen, daß die Mathematik eine experimentelle Forschungsweise, Fragestellung, lehrt? [→] Nun kann man nicht sagen, sie lehre mich z.B. zu fragen, ob ein gewisser Körper sich einer Parabelgleichung gemäß bewegt? – Was tut aber die Mathematik in diesem Fall? Ohne sie oder ohne die Mathematiker wären wir freilich nicht zur Definition dieser Kurve gelangt. War aber, diese Kurve definieren schon Mathematik? Bedingte es z.B. Mathematik, wenn Leute die Bewegung von Körpern darauf hin untersuchten, ob ihre Bahn sich durch eine Ellipsenkonstruktion mit einem Faden & zwei Nägeln darstellen lasse? Wer diese Art der Untersuchung erfunden hätte, hätte der Mathematik getrieben? Er hat doch einen neuen *Begriff* geschaffen. Aber war es auf die Art wie die Mathematik dies tut? War es, wie uns die Multiplikation $18 \times 15 = 270$ einen neuen Begriff gibt?

Ms-124 **45** Kann man also *nicht* sagen, die Mathematik lehrt uns
145[2] zählen? Wenn sie uns aber zählen lehrt, warum nicht auch Farben miteinander vergleichen?

Ms-124 Es ist klar: wer uns die Ellipsengleichung lehrt, lehrt uns einen
145[3] & neuen Begriff. Wer uns aber beweist, daß *diese* Ellipse & *diese*
146[1] Gerade sich in *diesen* Punkten schneiden; nun der gibt uns auch einen neuen Begriff.

Ms-124 Uns die Ellipsengleichung lehren ist ähnlich wie, uns zählen
146[2] lehren. Aber auch ähnlich wie, uns die Frage lehren: "sind hier hundertmal soviel Kugeln als dort?".

Ms-124 Wenn ich nun jemand in einem Sprachspiele diese Frage & eine
146[3] Methode sie zu beantworten gelehrt hätte, hätte ich ihn Mathematik gelehrt? Oder nur, wenn er mit Zeichen operiert hat?

Ms-124 (Wäre das etwa als fragte man: "wäre auch das eine Geometrie,
146[4] die *nur* aus den Euklidschen Axiomen bestünde?")

Ms-124 Wenn die Arithmetik uns die Frage "wieviel?" lehrt, warum
147[1] nicht auch die Frage "Wie dunkel?"?

Ms-124 Aber die Frage "sind hier hundertmal soviel Kugeln als dort"
147[2] ist doch keine mathematische Frage & ihre Antwort kein mathematischer Satz. Eine mathematische Frage wäre: "Sind 170 Kugeln hundertmal soviel als 3 Kugeln?" (Und zwar ist dies eine Frage der reinen, nicht der angewandten Mathematik.)

Ms-124 147[3] Soll ich nun sagen, daß, wer uns Dinge zählen lehrt, & ähnliches, uns neue Begriffe gibt, *& auch* der, welcher uns reine Mathematik mit solchen Begriffen lehrt?

Ms-124 147[4] Ist eine neue Begriffsverknüpfung ein neuer Begriff? Und schafft die Mathematik Begriffsverknüpfungen?

Ms-124 147[5] Das Wort “Begriff” ist ganz & gar zu vag.

Ms-124 148[1] Die Mathematik lehrt uns auf neue Weise mit den Begriffen operieren. Und man kann daher sagen, sie ändert unsere Begriffstätigkeit.

Ms-124 148[2] Aber erst der bewiesene, oder als Postulat angenommene mathematische Satz tut das, nicht der problematische.

Ms-124 148[3] & 149[1]

46 Kann man aber nicht doch mathematisch experimentieren? Z.B. versuchen, ob sich aus einem quadratischen Papier ein Katzenkopf falten läßt, wobei die *physikalischen* Eigenschaften des Papiers, seine Festigkeit, Dehnbarkeit, etc. nicht in Frage gezogen werden? Nun man redet doch hier gewiß von einem Versuchen. Und warum nicht von einem Experimentieren? Dieser Fall ist doch ähnlich dem, Zahlenpaare versuchsweise in die Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ einzusetzen, um eines zu finden das die Gleichung befriedigt. Und kommt man also endlich auf $3^2 + 4^2 = 25$, ist dieser Satz nun das Resultat eines Experiments? Warum nannte man den Vorgang denn ein Versuchen? Hätten wir es auch so genannt, wenn Einer immer aufs erste Mal mit völliger Sicherheit (den Zeichen der Sicherheit) aber ohne Rechnung, solche Probleme löste? Worin bestünde hier das Experimentieren? Angenommen, ehe er die Lösung gibt, erscheint sie ihm als Vision. –

Ms-124 149[2]

47 18.03.1944

Wenn eine Regel Dich nicht zwingt, so *folgst* Du keiner Regel.

Ms-124 149[3]

Aber wie soll ich ihr denn folgen; wenn ich ihr doch folgen kann, wie ich will?

Ms-124 149[4] & 150[1]

Wie soll ich dem Wegweiser folgen, wenn alles was ich tue ein Folgen ist?

Ms-124 150[2]

Aber daß alles (auch) als ein Folgen *gedeutet* werden kann, heißt doch nicht, daß alles ein Folgen ist.

Ms-124 150[3] Aber wie deutet denn also der Lehrer dem Schüler die Regel? (Denn der soll ihr doch gewiß eine bestimmte Deutung geben.) – Nun, wie anders, als durch Worte & Abrichtung? Und der Schüler hat die Regel (*so* gedeutet) inne, wenn er so & so auf sie reagiert. *Das* aber ist wichtig, daß diese Reaktion, die uns das Verständnis verbürgt, bestimmte Umstände, bestimmte Lebens- & Sprachformen als Umgebung, voraussetzt. (Wie es keinen Gesichtsausdruck gibt ohne Gesicht.) Dies ist eine wichtige Gedankenbewegung.)

Ms-124 151[3] & 152[1] **48** Zwingt mich eine Linie dazu ihr nachzufahren? – Nein; aber wenn ich mich dazu entschlossen habe sie *so* als Vorlage zu gebrauchen, dann zwingt sie mich. – Nein; dann zwinge *ich* mich sie so zu gebrauchen. Ich halte mich gleichsam an ihr fest. – Aber wichtig ist hier doch, daß ich sozusagen ein für allemal den Entschluß mit der (allgemeinen) Deutung fassen & halten kann, & nicht bei jedem Schritt von frischem *deute*.

Ms-124 152[2] Die Linie, könnte man sagen, gibt's mir ein, wie ich gehen soll. Aber das ist natürlich nur ein Bild. Und gäbe sie mir jedesmal etwas andres ein, so folgte ich ihr *nicht* als Regel. Und was "anderes", & was "das Gleiche" heißt, das kann nur das Leben entscheiden.

Ms-124 152[3] "Die Linie gibt mir ein, wie ich gehen soll": das paraphrasiert nur, daß sie meine *letzte* Instanz dafür ist, wie ich gehen soll.

Ms-124 152[4] & 153[1]

49 Denke dir Einer folgte einer Linie als Regel auf diese Weise: Er hält einen Zirkel, dessen eine Spitze er der Regel entlang führt, während die andre Spitze *die* Linie zieht, die der Regel folgt. Und wie er so der Regel-Linie entlang geht, öffnet & schließt er den Zirkel, anscheinend mit großer Genauigkeit, wobei er immer auf die Regel schaut, als bestimme *sie* sein Tun. Wir nun, die wir ihm zusehen, sehen keinerlei Regelmäßigkeit in diesem Öffnen & Schließen. Wir können daher seine Art, der Linie zu folgen, von ihm auch nicht lernen. Wir glauben ihm aber, die Linie habe ihm eingegeben, was er tat.

Ms-124 153[2]

Wir würden hier (vielleicht) wirklich sagen: “Die Vorlage scheint ihm *einzugeben*, wie er zu gehen hat. Aber sie ist keine Regel.”

Ms-124 153[3]

50 Nimm an einer folgt der Reihe $x = 1, 3, 5, 7, \ldots$ indem er die Reihe der $x^2 + 1$ hinschreibt; & er fragte sich: “aber tue ich auch immer das Gleiche, oder jedesmal etwas anderes?” Wer von einem Tag auf den andern verspricht: “morgen werde ich das Rauchen aufgeben”, sagt der jeden Tag das Gleiche; oder jeden Tag etwas anderes?

Ms-124 153[4] & 154[1]

Wie ist das zu entscheiden, ob er immer das gleiche tut, wenn ihm die Linie eingibt, wie er gehen soll?

Ms-124 154[2]

51 Wollte ich nicht sagen: Nur das gesamte Bild der Verwendung des Wortes “gleich” in seiner Verwebung mit den Verwendungen der andern Wörter kann entscheiden, ob er das Wort verwendet wie wir?

Ms-124 154[3] Tut er nicht immer das Gleiche, nämlich, es sich von der Linie eingeben zu lassen, wie er gehen soll? Wie aber, wenn er sagt, die Linie gebe ihm einmal dies, einmal jenes ein? Könnte er nun nicht sagen: er tue in *einem* Sinne immer das Gleiche, aber einer Regel folge er doch nicht? Und kann aber auch nicht der, der einer Regel folgt, doch sagen, in einem gewissen Sinne tue er jedesmal etwas Anderes? So bestimmt also, ob er das Gleiche tut, oder immer etwas anderes, nicht, ob er einer Regel folgt.

Ms-124 154[4] & 155[1] Nur *so* kann man den Vorgang, einer Regel folgen, beschreiben, daß man in anderer Weise beschreibt, was wir dabei tun.

Ms-124 155[2] Hätte es einen Sinn zu sagen: "Wenn er jedesmal etwas *anderes* täte, würden wir nicht sagen: er folge einer Regel"? Das hat *keinen* Sinn.

Ms-124 155[3] & 156[1] 52 Einer Regel folgen ist ein bestimmtes Sprachspiel. Wie kann man es beschreiben? Wann sagen wir, er habe die Beschreibung verstanden? – Wir tun dies & das; wenn er nun so & so reagiert, hat er das Spiel verstanden. Und dieses 'dies & das' & 'so & so' enthält kein "und so weiter". – Oder: verwendete ich bei der Beschreibung ein "und so weiter" & würde ich gefragt, was das bedeutet, müßte ich es wieder durch eine Aufzählung von Beispielen erklären; oder etwa durch eine Geste. Und ich würde es dann als Zeichen des Verständnisses ansehen, wenn er die Geste etwa mit einem verständnisvollen Gesichtsausdruck wiederholte, & in speziellen Fällen so & so handelte.

Ms-124 156[2] “Aber reicht denn nicht das Verständnis weiter, als alle Beispiele?” Ein sehr merkwürdiger Ausdruck, & ganz natürlich.

Ms-124 156[3] Wenn man Beispiele aufzählt & dann sagt “und so weiter”, so wird dieser letztere Ausdruck auf andere Weise erklärt, als die Beispiele.

Ms-124 156[4] Denn das “und so weiter” könnte man einerseits durch einen Pfeil ersetzen der anzeigt, daß das Ende der Beispielreihe nicht ein Ende ihrer Anwendung bedeuten soll. Anderseits heißt “und so weiter” auch: es ist genug, Du hast mich verstanden; wir brauchen keine weiteren Beispiele.

Ms-124 156[5] & 157[1] Wenn wir den Ausdruck durch eine Geste ersetzen, so könnte es ja sein, daß die Menschen unsre Beispielreihe nur dann verstünden,, wie sie sollten, (nur dann ihr richtig folgten,) wenn wir am Schluß diese Geste machten. Diese wäre also ganz analog der des Zeigens auf einen Gegenstand, oder Ort.

Ms-124 157[2] 53 Nimm an, eine Linie gebe mir ein, wie ich ihr folgen soll; d.h., wenn ich ihr mit den Augen nachgehe, so sagt mir etwa eine innere Stimme: zieh *so*. – Nun, was ist der Unterschied zwischen diesem Vorgang, einer Art Inspiration zu folgen & dem, einer Regel zu folgen? Denn sie sind doch nicht das Gleiche. In dem Fall der Inspiration *warte* ich auf die Anweisung. Ich werde einen Andern nicht meine ‘Technik’ lehren können, der Linie zu folgen. Es sei denn, ich lehre ihn eine Art des Hinhorchens, der Rezeptivität, etc. Aber dann kann ich natürlich nicht erwarten, daß er der Linie so folgt, wie ich.

Ms-124 157[3] & 158[1] Man könnte sich auch so einen Unterricht in einer Art von Rechnen denken. Die Kinder können dann, ein jeder auf seine Weise, rechnen; solange sie nur auf die innere Stimme horchen & ihr folgen. – Dieses Rechnen wäre wie ein Komponieren.

Ms-124 158[2] Denn gehört nicht zum Befolgen einer Regel die *Möglichkeit* einen Andern im Folgen abzurichten? Und zwar durch Beispiele. Und das Kriterium seines Verständnisses muß die Übereinstimmung der einzelnen Handlungen sein. Also nicht wie beim Unterricht in der Rezeptivität.

Ms-124 158[3] 54 Wie folgst Du der Regel? – "Ich mach es *so*: " … & nun folgen allgemeine Erklärungen & Beispiele. − − Wie folgst Du der Stimme der Linie? – "Ich sehe auf sie hin, schließe alle Gedanken aus, etc. etc."

Ms-124 158[4] "Ich würde nicht sagen, daß sie mir immer etwas anderes eingebe, wenn ich ihr als Regel folgte.' Kann man das sagen?

Ms-124 159[2] 55 19.03.1944

Kannst du Dir absolutes Gehör vorstellen, wenn Du es nicht hast? Kannst Du es Dir vorstellen, *wenn* Du es hast? – Kann ein Blinder sich das Sehen von rot vorstellen? Kann *ich* mir es vorstellen? Kann ich mir vorstellen, daß ich so & so spontan reagiere, wenn ich's nicht tue? Kann ich mir's besser vorstellen, wenn ich's tue?

Ms-124 159[3] Kann ich aber das Sprachspiel spielen, wenn ich nicht so reagiere?

Ms-124 56 20.03.1944

159[4] & 160[1] Man fühlt nicht, daß man immer des Winks (der Eingebung) der Regel gewärtig sein muß. Im Gegenteil. Wir sind nicht gespannt darauf, was sie uns jetzt sagen wird, sondern sie sagt uns immer dasselbe, & wir tun, was sie uns sagt. Man könnte sagen: wir sehen, was wir beim Befolgen der Regel tun, unter dem Gesichtspunkt des *immer Gleichen* an.

Ms-124 160[2] Man könnte dem, den man abzurichten anfängt, sagen: "Sieh, ich tu immer das Gleiche: …".

Ms-124 160[3] **57** Wann sagen wir: "Die Linie gibt mir das *als Regel* ein – immer das Gleiche." Und anderseits: "Sie gibt mir immer wieder ein, was ich zu tun habe – sie ist keine Regel." Im ersten Fall heißt es: ich habe keine weitere Instanz dafür, was ich zu tun habe. Die Regel tut es ganz allein; ich brauche ihr nur zu folgen (& folgen ist eben *eins*). Ich fühle nicht z.B., es ist seltsam, daß mir die Linie immer etwas sagt. – Der andre Satz sagt: Ich weiß nicht, was ich tun werde; die Linie wird's mir sagen.

Ms-124 160[4] & 161[1] Die Kunstrechner, die zum richtigen Resultat gelangen, aber nicht sagen können, wie. Sollen wir sagen: sie rechnen nicht? (Eine Familie von Fällen.)

Ms-124 161[2] Diese Dinge sind feiner gesponnen, als grobe Hände ahnen.

Ms-124 161[3] **58** Kann ich nicht einer Regel zu folgen *glauben*? Gibt es diesen Fall nicht? Und kann ich dann nicht auch *keiner* Regel zu folgen glauben & doch einer folgen? Würden wir nicht auch etwas *so* nennen?

Ms-124 161[4] & 162[1]

59 Wie kann ich das Wort "gleich" erklären? – Nun, durch Beispiele. – Aber ist das *alles*? gibt es nicht eine noch tiefere Erklärung; oder muß nicht doch das *Verständnis* der Erklärung tiefer sein? – Ja, hab ich denn selbst ein tieferes Verständnis? *Habe* ich mehr, als ich in der Erklärung gebe? Woher dann aber das Gefühl, ich hätte mehr, als ich sagen kann? Ist es, daß ich das nicht Begrenzte als Länge deute, die über jede Länge hinausreicht? (Die nicht begrenzte Erlaubnis, als Erlaubnis zu etwas Grenzenlosem.)

Ms-124 162[2]

Die Vorstellung die mit dem Grenzenlosen geht, ist die von etwas so großem, daß wir sein Ende nicht sehen können.

Ms-124 162[3]

Die Verwendung des Wortes "Regel" ist mit der Verwendung des Wortes "gleich" verwoben.

Ms-124 162[4]

Überlege Dir: Unter welchen Umständen wird der Forschungsreisende sagen: Das Wort " ..." dieses Stammes heißt soviel wie unser "und so weiter"? Stelle Dir Einzelheiten ihres Lebens & ihrer Sprache vor, die ihn dazu berechtigen würden.

Ms-124 162[5]

"Ich weiß doch, was 'gleich' heißt!" – Daran zweifle ich nicht; ich weiß es auch.

Ms-124 162[6] & 163[1]

60 "Die Linie gibt's mir ein ..." Hier ist der Ton auf dem *Ungreifbaren* dieses Eingebens. Eben darauf, daß *nichts* meine Handlung von der Regel trennt, daß nichts zwischen ihr & der Handlung steht.

Ms-124 163[3] Man könnte sich aber denken, daß einer mit solchen Gefühlen multipliziert, richtig multipliziert; immer wieder sagt: “Ich weiß nicht – jetzt gibt mir die Regel auf einmal *das* ein!” & daß wir antworten: “Freilich; Du gehst ja ganz nach der Regel vor.”

Ms-124 163[4] & 164[1] Einer Regel folgen: das läßt sich verschiedenem entgegensetzen. Der Forschungsreisende wird, unter anderm, auch die Umstände beschreiben (können), unter denen ein Einzelner dieser Leute nicht von sich selbst sagt, er folge einer Regel. Nämlich auch dann, wenn es in mancher Beziehung so aussieht.

Ms-124 164[2] Aber könnten wir nicht auch rechnen, wie wir rechnen (Alle übereinstimmend, etc.) & doch bei jedem Schritt das Gefühl haben, von den Regeln wie von einem Zauber geleitet zu werden; erstaunt darüber vielleicht, daß wir übereinstimmen? (Der Gottheit etwa für diese Übereinstimmung dankend.)

Ms-124 164[3] Daraus siehst Du nur, wieviel zu der Physiognomie dessen gehört, was wir im alltäglichen Leben “einer Regel folgen” nennen!

Ms-124 164[4] Man folgt der Regel ‘*mechanisch*’. Man vergleicht sich also mit einem Mechanismus.

Ms-124 164[5] “Mechanisch”, das heißt: ohne zu denken. Aber *ganz* ohne zu denken? Ohne *nachzudenken*.

Ms-124 165[1] Der Forscher könnte sagen: “Sie folgen Regeln, aber es sieht doch ganz anders aus, als bei uns.”

Ms-124 165[2] "Sie gibt mir, verantwortungslos, dies, oder das ein" heißt: ich kann es Dich nicht lehren, *wie* ich der Linie folge. Ich setze nicht voraus, daß Du ihr folgen wirst wie ich, auch wenn Du ihr folgst.

Ms-124 165[3] 61 21.03.1944

Eine Addition von Formen, in der gewisse Glieder verschmelzen spielt in unserm Leben eine sehr geringe Rolle. – Wie wenn

&

die Figur

ergeben. Aber wäre dies eine *wichtige* Operation, so hätten wir vielleicht einen andern geläufigen Begriff von der arithmetischen Addition.

Ms-124 165[4] & 166[1]

Daß man ein Boot, einen Hut, etc. aus einem quadratischen Stück Papier (nach gewissen Regeln) falten kann, ist uns natürlich als geometrische Tatsache zu betrachten, nicht der Physik. Aber ist Geometrie, so verstanden, nicht ein Teil der Physik? Nein; wir spalten die Geometrie von der Physik ab. Die geometrische Möglichkeit von der physikalischen. Aber wie, wenn man sie beisammen ließe? Wenn man einfach sagte: "wenn Du das & das & das mit dem Stück Papier tust, wird *dies* herauskommen"? Was zu tun ist, könnte durch einen Reim gegeben werden. Ist es denn nicht möglich, daß jemand zwischen den beiden Möglichkeiten gar nicht unterscheidet? Wie etwa ein Kind, das diese Technik lernt. Es weiß nicht, & denkt nicht darüber nach, ob diese Resultate des Faltens nur möglich sind weil das Papier sich dabei in der & der Weise dehnt, verzerrt, oder, weil es sich *nicht* verzerrt.

Ms-124 166[2] & 167[1] Und ist es nun nicht auch so in der Arithmetik? Warum sollten Leute nicht rechnen lernen können ohne einen Begriff von einer mathematischen & einer physikalischen Tatsache. Sie wissen nur, daß das immer herauskommt, wenn sie gut achtgeben & tun was man sie gelehrt hat. Denken wir uns, während wir rechneten veränderten sich die Ziffern sprungweise auf dem Papier. Eine Eins würde plötzlich zu einer 6 dann zu einer 5, dann wieder zu einer 1 u.s.f. Und ich will einmal annehmen, das änderte an der Rechnung gar nichts, weil, sowie ich eine Ziffer ablese um mit ihr zu rechnen, oder sie anzuwenden, sie wieder zu der würde, die wir bei *unserm* Rechnen vor uns haben. Dabei sähe man aber wohl während des Rechnens wie die Ziffern sich ändern; wir sind aber instruiert uns darum weiter nicht zu kümmern. Dieses Rechnen könnte natürlich, auch wenn wir die obige Annahme nicht machen, zu brauchbaren Resultaten führen. Wir rechnen hier streng nach Regeln, & doch *muß* dies Resultat nicht herauskommen. – Ich nehme an, daß wir keinerlei Gesetzmäßigkeit in dem Wechsel der Ziffern sehen.

Ms-124 167[2] & 168[1] Ich will sagen: Man könnte dieses Rechnen wirklich als ein Experimentieren auffassen, & z.B. sagen: “versuchen wir was jetzt herauskommt, wenn ich diese Regel anwende”.

Ms-124 168[2] Oder auch: “Machen wir dieses Experiment: schreiben wir die Ziffern mit einer Tinte von dieser Zusammensetzung … & rechnen nach der Regel ….

Ms-124 168[3] Nun könntest Du natürlich sagen: “Dieses Manipulieren von Ziffern nach Regeln ist (nun) kein Rechnen.

Ms-124 168[4] "Wir rechnen nur, wenn hinter dem Resultat ein Muß steht." – Aber wenn wir nun nur dieses Muß nicht wissen, – liegt es da dennoch in der Rechnung? Oder rechnen wir nicht, wenn wir es sozusagen ganz naiv tun?

Ms-124 168[5] & 169[1] Wie ist es *damit*: Der rechnet nicht, der, wenn ihm einmal das, einmal jenes herauskommt & er einen Fehler nicht finden kann, sich damit abfindet & sagt: es zeige sich eben, daß gewisse noch unbekannte Umstände das Ergebnis beeinflussen.

Ms-124 169[2] Man könnte das so ausdrücken: Wer die Rechnung zum Finden eines kausalen Zusammenhangs verwendet, rechnet nicht.

Ms-124 169[3] Die Kinder werden nicht nur im Rechnen geübt, sondern auch in einer ganz bestimmten Stellungnahme gegen einen Rechenfehler.

Ms-124 169[4] Was ich sage, kommt darauf hinaus, die Mathematik sei *normativ*. Aber "Norm" bedeutet nicht dasselbe, wie "Ideal".

Ms-124 171[2] 62 22.03.1944

Die Einführung einer neuen Schlußregel kann man als Übergang zu einem neuen Sprachspiel auffassen. Ich stelle mir eines vor, in welchem etwa eine Person '$p \supset q$' aussagt, eine andere 'p', & eine dritte den Schluß zieht.

Ms-124 171[3] **63** Ist es möglich, zu beobachten, daß eine Fläche rot & blau gefärbt ist; & nicht zu beobachten, daß sie rot ist? Denk Dir, man verwende eine Art Farbadjektiv für Dinge, die halb rot halb blau sind: Man sagt sie seien 'bu'. Könnte nun jemand nicht darauf trainiert sein, zu beobachten, ob etwas bu ist; & nicht darauf, ob es auch rot ist? Dieser würde dann nur zu melden wissen: "bu", oder "nicht bu". Und wir würden aus der ersten Meldung den Schluß ziehen, die Fläche enthalte rot.

Ms-124 172[1] 23.03.1944

Ich stelle mir vor, daß die Beobachtung durch ein psychologisches Sieb geschieht, das z.B. nur das Faktum durchläßt, die Fläche sei blau-weiß-rot (französische Trikolore), oder sei es nicht.

Ms-124 172[2] Ist es nun eine besondere Beobachtung, die Fläche sei zum Teil rot, wie kann dies logisch aus dem Vorigen folgen. Die Logik kann uns doch nicht sagen, was wir beobachten müssen.

Ms-124 172[3] Jemand zählt Äpfel in einer Kiste; er zählt bis 100. Ein Andrer sagt: "also sind jedenfalls 50 Äpfel in der Kiste" (das ist alles, was ihn interessiert). Das ist doch ein logischer Schluß; ist es aber nicht auch eine besondere Erfahrung?

Ms-124 172[4] & 173[1] **64** Eine Fläche, in eine Anzahl von Streifen geteilt, wird von mehreren Leuten beobachtet. Die Farben der Streifen ändern sich, alle

zu gleicher Zeit, immer nach je einer Minute. *Jetzt* sind die Farben: rot, grün, blau, schwarz, schwarz, blau. Es wird beobachtet: rot ● blau ⊃ schwarz .⊃. weiß Es wird auch beobachtet: ~ grün ⊃ ~ weiß und Einer zieht den Schluß: ~ grün ⊃ rot ● blau ● ~ schwarz Und diese Implikationen sind 'material implications' in Russells Sinn.

Ms-124 173[2] & 174[1] Aber kann man denn, daß

r . b ⊃ s .⊃. w,

beobachten? Beobachtet man nicht *Farben-Zusammenstellungen*, also etwa, daß r ● b ● s ● w; & leitet dann jenen Satz ab? Aber kann Einer bei der Beobachtung einer Fläche nicht ganz von der Frage eingenommen sein, ob sie sich grün, oder nicht grün färben wird; & wenn er nun sieht: ~g, muß er auf die besondere Farbe der Fläche aufmerksam sein? Und könnte einer nicht ganz von dem Aspekt r ● b ⊃ s .⊃. w eingenommen sein? Wenn er z.B. dazu angelernt worden wäre, alles andere vergessend, nur unter diesem Gesichtspunkt die Fläche zu betrachten. (Es könnte den Menschen unter bestimmten Verhältnissen gleichgültig sein, ob Gegenstände rot, oder grün sind; von Wichtigkeit aber, ob sie eine dieser Farben, oder eine dritte besitzen. Und es könnte in diesem Falle ein Farbwort für "rot oder grün" geben.)

Ms-124 174[2] Wenn man aber beobachten kann, daß

r ● b ⊃ s .⊃. w

&

~g ⊃ ~w,

dann kann man ja auch beobachten, & nicht bloß schließen, daß

~g ⊃ r ● b ● ~s.

Ms-124 175[1] Wenn dies drei Beobachtungen sind, dann muß es auch möglich sein, daß, die dritte Beobachtung, nicht mit dem logischen Schluß aus den beiden ersten übereinstimmt.

Ms-124 176[2] 24.03.1944

[→ ←] Ist es denn also denkbar, daß einer beim Beobachten einer Fläche die Verbindung Rot-&-Schwarz sieht (etwa als Flagge), aber, wenn er sich (nun) drauf einstellt, *eine* der beiden Hälften zu sehen, statt des Rot ein Blau sieht? Nun, Du hast es gerade beschrieben. – Es wäre etwa so, wie wenn jemand auf eine Gruppe von Äpfeln schaute & sie ihm immer als zwei Gruppen von je zwei Äpfeln erschienen, so wie er aber versuchte, sie mit dem Blick zusammenzufassen, erschienen sie ihm als 5. Dies wäre ein sehr merkwürdiges Phänomen. Und es ist keines, von deren Möglichkeit wir Notiz nehmen.

Ms-124 176[3] & 177[1] 25.03.1944

Erinnere Dich dran, daß ein Rhombus, als Raute angesehen, nicht wie ein Parallelogramm ausschaut. Nicht aber, als schienen seine gegenüberliegenden Seiten nicht parallel zu sein, sondern der Parallelismus fällt uns nicht auf.

Ms-124 177[2] **65** Ich könnte mir denken, daß Einer sagt, er sähe einen weiß & gelben Stern aber nichts Gelbes – weil er den Stern gleichsam als eine *Verbindung* von Farbteilen sieht, die er nicht zu trennen vermag.

Ms-124 177[3] Er hatte z.B. Figuren vor sich, wie diese

Gefragt, ob er ein rotes Fünfeck sieht & würde er ‘ja’ sagen; gefragt ob er ein gelbes sieht: ‘nein’. Ebenso sagt er er sehe ein blaues Dreieck, aber kein rotes. – Aufmerksam gemacht sagte er etwa: “Ja, jetzt seh ich’s; ich hatte die Sterne nicht so aufgefaßt.” Und so könnte es ihm auch vorkommen, man könne die Farben im Stern nicht trennen, weil man die Formen nicht trennen kann.

Ms-124 177[4] & 178[1] Der kann die Geographie einer Landschaft nicht übersehen lernen, der so langsam in ihr sich fortbewegt, daß er das eine Stück vergessen hat, wenn er zu einem andern kommt.

Ms-124 178[3] & 179[1] **66** 29.03.1944

Warum rede ich immer vom Zwang durch die Regel; warum nicht davon, daß ich ihr folgen *wollen* kann? Denn das ist ja ebenso wichtig. Aber ich will auch nicht sagen, die Regel zwinge mich so & so zu handeln, sondern sie mache es mir möglich, mich an ihr anzuhalten & von ihr zwingen zu lassen.

Ms-124 179[2] Und wer, z.B., ein Spiel spielt, der hält sich an seine Regeln. Und es ist eine interessante Tatsache, daß Menschen zum Vergnügen Regeln aufstellen & sich dann nach ihnen halten.

Ms-124 Meine Frage war eigentlich: “wie kann man sich an eine Regel
179[3] & *halten*?” Und das Bild, das einem hier vorschweben könnte,
180[1] wäre das eines kurzen Stücks Geländer, durch das ich mich weiter soll führen lassen, als das Geländer reicht. [Aber da *ist* doch nichts; aber da ist doch nicht *nichts*!] Denn wenn ich Frage “wie *kann* man sich ...”, so heißt es, daß mir hier etwas *paradox* erscheint; also ein Bild mich verwirrt.

Ms-124 “Daß das auch rot ist, daran habe ich gar nicht gedacht; ich
180[2] habe es nur als Teil des mehrfärbigen Ornaments gesehen.”

Ms-124 Logischer Schluß ist ein Übergang der gerechtfertigt ist, wenn
180[3] er einem bestimmten Paradigma folgt & dessen Rechtmäßigkeit von sonst nichts abhängt.

Ms-124 67 Wir sagen: “Wenn ihr beim Multiplizieren wirklich der
180[4] Regel folgt, *muß* das Gleiche herauskommen.” Nun, wenn dies nur die etwas hysterische Ausdrucksweise der Universitätssprache ist, so braucht sie uns nicht sehr zu interessieren. Es ist aber der Ausdruck einer Einstellung zu der Technik des Rechnens, die sich überall in unserm Leben zeigt. Die Emphase des Muß entspricht nur der Unerbittlichkeit dieser Einstellung sowohl zur Technik des Rechnens, als auch zu unzähligen verwandten Techniken.

Ms-124 Das mathematische Muß ist nur ein andrer Ausdruck dafür,
181[1] daß die Mathematik Begriffe bildet. Und Begriffe dienen zum Begreifen. Sie entsprechen einer bestimmten Behandlung der Sachlagen.

Ms-124 Die Mathematik bildet ein Netz von Normen.

181[2] **68** Es ist möglich, den Komplex aus A & B sehen, ohne A,
Ms-124 oder B, zu sehen. Es ist auch möglich, den Komplex einen
181[5] & “Komplex von A & B” zu nennen & zu denken, diese
182[1] Benennung deutete nur auf eine Art Verwandtschaft dieses Ganzen mit A & mit B hin. Es ist also möglich, zu sagen, man sehe den Komplex von A & B, aber weder A noch B. Etwa wie man sagen könnte, es sei hier ein rötlich-gelb, aber weder rot noch gelb.

Ms-124 Kann ich nun A & B vor mir haben & auch beide sehen, aber
182[2] nur A∨B beobachten? Nun, in gewissem Sinne ist das doch möglich. Und zwar dachte ich mir es so, daß der Beobachter von einem gewissen Aspekt eingenommen sei; daß er etwa eine bestimmte Art von Paradigma vor sich habe, in einer bestimmten Routine der Anwendung begriffen sei. – Und wie er nun auf A∨B eingestellt sein kann, so (doch) auch auf A ● B. Es fällt ihm also nur A ● B auf & nicht, z.B., A. Auf A∨B eingestellt sein heiße, könnte man sagen, mit dem Begriff ‘A∨B’ auf die & die Situation zu reagieren. Und genauso kann man’s natürlich auch mit A ● B tun.

Ms-124 Sagen wir: es interessiert Einen nur A ● B, & er urteilt also, was
182[3] & immer geschieht, nur “A ● B”, oder “~ (A ● B)”; so kann ich
183[1] mir denken, daß er “A ● B” urteilt & auf die Frage “siehst Du B?” sagt “nein, ich sehe A ● B”. Etwa wie mancher der A ● B sieht nicht zugeben wird, er sehe A∨B.

Ms-124 **69** 30.03.1944
183[2]

Aber die Fläche 'ganz rot sehen' & 'ganz blau sehen' sind doch gewiß 'echte' Erfahrungen, & doch sagen wir, Einer könne sie nicht zugleich haben.

Ms-124 183[3] Wenn er uns nun versicherte, er sehe diese Fläche ganz rot & zugleich ganz blau? Wir müßten sagen: "Du machst Dich uns nicht verständlich".

Ms-124 183[4] Der Satz 1 Fuß = ... cm ist bei uns zeitlos. Man könnte sich aber auch den Fall denken, in welchem sich das Fußmaß & das Metermaß nach & nach etwas veränderten & dann immer wieder verglichen werden müßten um in einander umgerechnet zu werden.

Ms-124 183[5] Ist aber nicht auch bei uns das Verhältnis der Längen des Meters & Fußes experimentell bestimmt worden? Doch; aber das Ergebnis wurde zu einer Regel gestempelt.

Ms-124 189[2] 70 Inwiefern kann man sagen, ein Satz der Arithmetik gebe uns einen Begriff? Nun, denken wir uns ihn nicht als Satz, als Entscheidung einer Frage, sondern als eine, irgendwie anerkannte, Verbindung von Begriffen.

Ms-124 191[3] Das gleichgesetzte 25^2 & 625 gibt mir nun, könnte man sagen, einen neuen Begriff. Und der Beweis zeigt, was es mit dieser Gleichheit für eine Bewandtnis hat. – "Einen neuen Begriff geben" kann nur heißen, eine neue Begriffsverwendung einführen, eine neue Praxis.

Ms-124 192[1] "Wie kann man den Satz von seinem Beweis loslösen?" Dieser Satz zeigt natürlich eine falsche Auffassung.

Ms-124 192[2] Der Beweis ist eine *Umgebung* des Satzes.

Ms-124 192[3] ‘Begriff’ ist ein vager Begriff.

Ms-124 192[4] 71 Nicht in jedem Sprachspiel gibt es etwas, was man “Begriffe” nennen wird.

Ms-124 192[5] Begriff ist etwas wie ein Bild, womit man Gegenstände vergleicht.

Ms-124 192[6] & 193[1] Gibt es im Sprachspiel (2) Begriffe? Aber man könnte es leicht so erweitern, daß “Platte”, “Würfel”, etc. zu Begriffswörtern würden. Z.B. durch eine Technik des Beschreibens oder Abbildens jener Gegenstände. Es ist natürlich keine scharfe Grenze zwischen Sprachspielen, die mit Begriffen arbeiten, & andern. Wichtig ist, daß das Wort “Begriff” sich auf eine Art von Behelf im Mechanismus der Sprachspiele bezieht.

Ms-124 193[2] & 194[1] 72 Betrachte einen Mechanismus. Etwa den:

Während der Punkt A einen Kreis beschreibt, beschreibt B eine Acht. Wir schreiben das nun als einen kinematischen Satz. Indem ich den Mechanismus umtreibe, beweist mir seine Bewegung den Satz; wie eine Konstruktion auf dem Papier es täte. Der Satz entspricht etwa einem Bild des Mechanismus mit den eingezeichneten Bahnen der Punkte A & B. Er ist also in gewisser Beziehung ein Bild jener Bewegung. Er hält das fest, wovon mich der *Beweis* überzeugt. Oder – wozu er mich überredet.

Ms-124 194[3] Wenn der Beweis das Vorgehn nach der Regel registriert, so erzeugt er (dadurch) einen neuen Begriff.

Ms-124 194[4] & 195[1] Indem er einen neuen Begriff erzeugt, überzeugt er mich von etwas. Denn zu dieser Überzeugung ist es wesentlich, daß das Vorgehn nach diesen Regeln immer das gleiche Bild erzeugen muß. (‘Gleich’ nämlich nach unsern gewöhnlichen Regeln des Vergleichens & Kopierens.)

Ms-124 195[2] Damit hängt es zusammen, daß man sagen kann, der Beweis müsse das Bestehen einer internen Relation zeigen. Denn die interne Relation ist die Operation, die eine Struktur aus der andern erzeugt als äquivalent angesehen mit dem Bild dieses Übergangs selbst – so daß nun der Übergang dieser Bilderreihe gemäß eo ipso ein Übergang jenen Regeln gemäß ist.

Ms-124 195[3] Indem der Beweis einen Begriff erzeugt, überzeugt er mich von etwas. Wovon er mich überzeugt, ist in dem Satz ausgesprochen, den er bewiesen hat.

Ms-124 195[4] & 196[1] Problem: Bedeutet das Wort “mathematisch” jedesmal das Gleiche: wenn wir von ‘mathematischen’ Begriffen, von ‘mathematischen’ Sätzen & von ‘mathematischen’ Beweisen reden? |

Ms-124 196[2] 19.04.1944

Was hat nun der bewiesene Satz mit dem Begriff zu tun den der Beweis schuf? Oder, was hat der bewiesene Satz mit der internen Relation zu tun, die der Beweis demonstrierte?

Ms-124 196[3] Das Beweisbild ist ein Instrument des Überzeugens.

Ms-124 196[4] Es ist klar, man kann auch den unbewiesenen math. Satz anwenden; ja auch den falschen. Der math. Satz sagt mir dann: Verfahre so!

Ms-124 196[5] 73 “Wenn uns der Beweis überzeugt, dann müssen wir auch von den Axiomen überzeugt sein“. Nicht als von empirischen Sätzen; das ist ihre Rolle nicht. Sie sind im Sprachspiel von der Verifikation durch die Erfahrung ausgeschlossen. Sind nicht Erfahrungssätze sondern Prinzipien des Urteilens.

Ms-124 197[2] Ein Sprachspiel: Wie habe ich mir eins vorzustellen, in dem Axiome, Beweise & bewiesene Sätze auftreten?

Ms-124 197[3] & 198[1] Wer in der Schule zum erstenmal ein bißchen von der Logik hört, der ist sogleich davon überzeugt, wenn man ihm sagt, ein Satz implizierte sich selbst, oder wenn er nun den Satz vom Widerspruch lernt, oder des ausgeschlossenen Dritten. – Warum ist er gleich davon überzeugt? Nun, diese Gesetze passen ganz in den Gebrauch der Sprache, der ihm so geläufig ist. Dann lernt er etwa kompliziertere Sätze der Logik beweisen. Die Beweise werden ihm vorgeführt, & er ist wieder überzeugt; oder er erfindet einen Beweis selber. Er lernt so neue Techniken des Schließens. Und auch, auf welche Rechnung es zu setzen ist, wenn (nun) Fehler sich zeigen.

Ms-124 198[2] Der Beweis überzeugt ihn, daß er an dem Satz, an der Technik, die er vorschreibt, festhalten muß; aber er zeigt ihm zugleich, wie er an dem Satz festhalten kann, ohne Gefahr zu laufen mit einer Erfahrung in Konflikt zu geraten.

Ms-124 198[4] 74 Jeder Beweis in der angewandten Mathematik kann aufgefaßt werden als ein Beweis der reinen Mathematik, welcher beweist daß *dieser* Satz aus *diesen* Sätzen folgt, oder aus ihnen durch die & die Operationen zu erhalten ist; etc.

Ms-124 198[5] Der Beweis ist ein bestimmter *Gang*. Wenn wir ihn beschreiben, so werden Ursachen nicht genannt.

Ms-124 199[1] Ich handle auf den Beweis hin. – Aber wie? – Dem Satz gemäß der bewiesen wurde.

Ms-124 199[2] Der Beweis hat mich etwa eine Technik des Approximierens gelehrt. Aber er hat doch *etwas* bewiesen, mich von etwas überzeugt. *Das* spricht der Satz aus. *Er* sagt, was ich nun auf den Beweis hin tun werde.

Ms-124 199[3] Der Beweis gehört zum Hintergrund des Satzes. Zum System, in dem der Satz wirkt.

Ms-124 199[4] Sieh', *so* geben 3 und 2 5. Merk Dir diesen Vorgang!

Ms-124 199[5] & 200[1] Jeder Erfahrungssatz kann als Regel dienen wenn man ihn – wie einen Maschinenteil – feststellt, unbeweglich macht, so daß sich nun alle Darstellung um ihn dreht & er zu einem Teil des Koordinatensystems wird & unabhängig von den Tatsachen.

Ms-124 200[2] "So ist es, wenn dieser Satz aus diesen abgeleitet wird. Das mußt Du doch zugeben." – Was ich zugebe ist, daß ich so einen Vorgang *so* nenne.